Vzorce pre dvojnásobný argument

RNDr. Marián Macko

U: Predstav si, že by sme mali za úlohu načrtnúť graf funkcie $f : y = 2\sin x \cos x$. Čo by si pri riešení využil?

Ž: *Asi by som násobil hodnoty funkcií sínus a kosínus pre niekoľko hodnôt argumentu x.*

U: Ukážeme si, že existuje iný, jednoduchší predpis tejto funkcie. Tento predpis bude súvisieť iba s hodnotami jednej goniometrickej funkcie.

Ž: *Ako sa k nemu dopracujeme?*

U: Východiskom nám budú súčtové vzorce. Pripomeňme si najskôr, ako sa dá vyjadriť $\sin(x+y)$ pomocou hodnôt $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ a $\cos y$.

Ž: *Platí:*

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

U: Čo dostaneme, ak oba argumenty v tomto vzorci budú rovnaké? Teda

$$y = x.$$

Ž: *Namiesto y dosadím premennú x a dostávam*

$$\sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x.$$

Ale oba sčítance na pravej strane sú rovnaké, lebo v druhom sčítanci môžem zameniť poradie násobenia.

$$\boxed{\sin(x+x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x}$$

U: Takže si dostal výraz $2\sin x \cos x$, ktorý súvisí s našou úlohou. Podľa úprav, ktoré si previedol, tento výraz nahrádza hodnotu funkcie sínus pre ***dvojnásobok argumentu*** x.

Ž: *Aha! Ak som dobre porozumel, tak predpis funkcie $f : y = 2\sin x \cos x$ nahradím tvarom $f : y = \sin 2x$.*

U: Áno. Preto grafom zadanej funkcie bude sínusoida. ***Najmenšou periódou*** funkcie bude číslo π. To čo je z riešenia tejto úlohy dôležité je vzorec:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

Tento vzorec si treba pamätať. Využiješ ho pri riešení rôznych ďalších úloh.

Ž: *Predpokladám, že druhým dôležitým vzorcom bude vyjadrenie hodnoty funkcie kosínus pre* **dvojnásobok argumentu**.

U: Ak využiješ súčtový vzorec

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

tak jeho odvodenie nebude náročné.

Ž: *Stačí mi dosadiť do súčtového vzorca x za premennú y a dostávam*

$$\cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x.$$

Súčin dvoch rovnakých hodnôt $\cos x \cos x$ nahradím **druhou mocninou** *hodnoty funkcie kosínus. Rovnako budem postupovať aj pri súčine $\sin x \sin x$.*

U: Dostaneš druhý dôležitý vzorec:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Ž: *Dosť sa podobá na základný vzorec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.*

U: Preto dávaj pozor, aby si ich nedoplietol.

U: Ukážeme si využitie tohto vzorca pri riešení jednej úlohy. Máme vypočítať hodnotu funkcie kosínus pre 120 stupňov.

Ž: *Máte na mysli zapísať 120 stupňov ako* **dvojnásobok** *60 stupňov?*

U: Vidím, že ti riešenie nebude robiť problém. Pokračuj.

Ž: *Dosadím do vzorca*

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

za premennú x 60 stupňov a dostávam

$$\cos 120^\circ = \cos\left(2 \cdot 60^\circ\right) = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ.$$

U: Hodnoty funkcií kosínus a sínus pre 60 stupňov patria medzi známe:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ž: *Po dosadení mám*

$$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Zlomky umocním a potom odčítam. Dostávam

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4}.$$

U: Výsledok je $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Úloha by sa dala vyriešiť ešte viacerými spôsobmi. Napríklad využitím súčtového vzorca pre funkciu kosínus. 120 stupňov sa dá vyjadriť aj ako ***súčet*** 90 a 30 stupňov.

Ž: *Dobrý nápad. Potom do súčtového vzorca* $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ *stačí za* x *dosadiť* 90 *stupňov a za* y 30 *stupňov, takže*

$$\cos(90^\circ + 30^\circ) = \cos 90^\circ \cos 30^\circ - \sin 90^\circ \sin 30^\circ.$$

U: Ďalej vieme, že $\cos 90^\circ = 0,\ \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 90^\circ = 1,\ \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$.

Ž: *Dosadím a mám*

$$0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2}.$$

Opäť sme dostali výsledok $-\dfrac{1}{2}$.

U: Nakoniec odvodíme vzorec aj pre hodnotu funkcie ***tangens dvojnásobného argumentu***. Našou snahou bude dostať výraz, ktorý obsahuje iba hodnoty funkcie tangens premennej x. Začneme definíciou funkcie tangens.

Ž: *Podľa definície je tangens podielom hodnôt funkcií sínus a kosínus. Preto platí*

$$\mathrm{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}.$$

U: Po dosadení výrazov $2\sin x \cos x$ za $\sin 2x$ a $\cos^2 x - \sin^2 x$ za $\cos 2x$ dostávame

$$\mathrm{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}.$$

Ž: *Aj to si treba pamätať?*

U: Nie sme ešte na konci odvodenia. Naším cieľom je, aby vo výraze na pravej strane boli ***iba hodnoty funkcie tangens*** premennej x. Preto vydelíme čitateľa aj menovateľa výrazom $\cos^2 x$, tak ako to vidíš v rámčeku.

$$\boxed{\frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\dfrac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}}$$

Ž: *V čitateli zloženého zlomku môžem* ***krátiť*** *výraz cosx.*

U: Áno a s úpravou zlomku v menovateli zloženého zlomku ti pomôžem. Zlomok $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$ rozdelíme na rozdiel dvoch zlomkov $\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$, tak ako to vidíš v ďalšom rámčeku.

$$\boxed{\frac{\dfrac{2\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}}$$

Ž: *Výraz* $\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$ *môžeme nahradiť číslom* 1.

U: A podiel $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ vyjadruje hodnotu funkcie tangens. Preto výraz $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ nahradíme druhou mocninou funkcie tangens a máme

$$\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}.$$

Dostali sme výsledný vzorec

$$\mathrm{tg}2x = \frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}.$$

Ten platí iba za určitých podmienok.

Ž: *Hodnoty funkcie kosínus* **nesmú byť rovné nule**. *To preto, lebo výraz* $\cos x$ *je v menovateli zlomku.*

U: Táto podmienka zároveň určuje definičný obor funkcie tangens. Vyrieš ju.

Ž: *Kosínus nadobúda nulové hodnoty, ak* x *je* **nepárnym celočíselným násobkom čísla** $\dfrac{\pi}{2}$, *preto*

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

kde k *je celé číslo.*

U: Podobná podmienka platí aj pre definičný obor funkcie $\mathrm{tg}2x$, takže

$$2x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Po vydelení číslom 2 dostávame

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}.$$

Spojením oboch podmienok dostávame, že

$$x \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Príklad 1: *Bez určenia hodnoty x určte hodnoty* $\sin 2x,\ \cos 2x,\ \mathrm{tg} 2x,\ \mathrm{cotg} 2x$*, ak platí* $\cos x = -\frac{4}{5}$ *a* $x \in \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ž: *Hodnotu* $\sin 2x$ *by som vypočítal podľa vzorca* $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. *Ale nepoznám hodnotu funkcie sínus.*

U: Na jej určenie použijeme základný vzorec:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Dosaď za výraz $\cos x$.

Ž: *Po dosadení dostávam*

$$\sin^2 x + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1.$$

Umocním

$$\sin^2 x + \frac{16}{25} = 1$$

a od výrazov na oboch stranách rovnice odčítam číslo $\frac{16}{25}$. *Teraz mám rovnicu*

$$\sin^2 x = 1 - \frac{16}{25}.$$

Na pravej strane dostanem číslo $\frac{9}{25}$, *teda*

$$\sin^2 x = \frac{9}{25}.$$

U: Odmocnením výrazov na oboch stranách rovnice získame

$$|\sin x| = \frac{3}{5}.$$

Podľa zadania argument x ***patrí do intervalu*** $\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$. Pre takéto reálne čísla je hodnota funkcie sínus ***záporná***, preto

$$\sin x = -\frac{3}{5}.$$

U: Môžeš vypočítať hodnotu výrazu $\sin 2x$.

Ž: *Použijem teda vzorec* $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. *Za výraz* $\sin x$ *dosadím číslo* $-\frac{3}{5}$ *a za kosínus číslo* $-\frac{4}{5}$. *Dostávam*

$$\sin 2x = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right).$$

Dve záporné čísla dajú v súčine **kladné** *číslo. Výsledkom bude číslo* $\frac{24}{25}$.

U: Ani výpočet hodnoty $\cos 2x$ nebude náročný. Stačí použiť vzorec

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Ž: *Dosadím hodnoty za sínus a kosínus*

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2$$

a keď zlomky umocním, mám rozdiel

$$\frac{16}{25} - \frac{9}{25}.$$

U: Výsledkom po odčítaní zlomkov $\frac{16}{25}$ a $\frac{9}{25}$ bude zlomok $\frac{7}{25}$.

$$\cos 2x = \frac{7}{25}$$

Zostáva nám vypočítať hodnoty $\mathrm{tg} 2x$ a $\mathrm{cotg} 2x$.

Ž: *To bude jednoduché. Tangens je* **pomer hodnôt funkcií sínus a kosínus**. *Preto*

$$\mathrm{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}.$$

Dosadím za $\sin 2x$ *vypočítanú hodnotu* $\frac{24}{25}$ *a za* $\cos 2x$ *číslo* $\frac{7}{25}$. *Dostávam*

$$\mathrm{tg} 2x = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}.$$

U: Keďže kotangens je prevrátenou hodnotou funkcie tangens, $\mathrm{cotg} 2x$ bude rovný číslu $\frac{7}{24}$, t. j.

$$\mathrm{cotg} 2x = \frac{7}{24}.$$

Príklad 2: *Bez určenia hodnoty x určte hodnoty $\sin x$ a $\cos x$, ak platí $\cos 2x = \dfrac{3}{4}$ a* $2x \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ž: *Keďže poznám $\cos 2x$ a mám vypočítať hodnotu funkcie kosínus premennej x, použijem vzorec*

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Ale nepoznám hodnotu funkcie sínus.

U: Využiješ iný vzťah medzi hodnotami funkcií sínus a kosínus. Vieme, že platí

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Vyjadri odtiaľ druhú mocninu hodnoty funkcie sínus a dosaď do vzorca, ktorý si uviedol ako prvý.

Ž: *Od výrazov na oboch stranách rovnice odčítam druhú mocninu hodnoty funkcie kosínus premennej x a mám*

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

Dosadím do vzorca pre hodnotu funkcie kosínus **dvojnásobného argumentu**. *Dostávam*

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right),$$

čo po odstránení zátvorky dá výsledok

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

U: Vyjadríme odtiaľ hodnotu $\cos x$. Pripočítame číslo 1

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x,$$

predelíme dvomi

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Nakoniec odmocníme. Pozor na to, aby si nezabudol na ***absolútnu hodnotu***

$$|\cos x| = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}.$$

Ž: *Ako odstránime absolútnu hodnotu?*

U: Zohľadníme zadanie úlohy. Vieme, že v zadaní je uvedené, že $2x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Preto $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$. Pre takéto hodnoty argumentu x je $\cos x$ kladné číslo. Teda

$$\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}.$$

Stačí dosadiť zadanú hodnotu a upraviť číselný výraz.

Ž: *Za $\cos 2x$ dosadím hodnotu $\frac{3}{4}$, výraz pod odmocninou upravím na spoločného menovateľa a nakoniec zjednoduším zložený zlomok. Dostávam*

$$\cos x = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{7}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{7}{8}}.$$

U: Výsledok upravíme tak, že číslo $\sqrt{8}$ v menovateli ***čiastočne odmocníme***. V menovateli dostaneme $2\sqrt{2}$.

$$\sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$$

Odstráň ešte odmocninu z menovateľa.

Ž: *Vynásobím čitateľa a menovateľa zlomku číslom $\sqrt{2}$. Potom*

$$\cos x = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

U: Hodnotu funkcie sínus premennej x vypočítame zo vzorca

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

Ž: *Za výraz $\cos x$ dosadím vypočítanú hodnotu $\frac{\sqrt{14}}{4}$ a dostávam*

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{14}{16} = \frac{2}{16}.$$

U: Aj hodnota funkcie sínus bude kladné číslo, lebo x patrí do intervalu $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$. Preto

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Príklad 3: *Zjednodušte výraz* $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$ *a určte, pre ktoré reálne čísla* x *má výraz zmysel.*

Ž: *Výraz* $\sin 2x$ *v čitateli nahradím výrazom* $2\sin x\cos x$. *Kosínus dvojnásobku premennej* x *v menovateli nahradím výrazom* $\cos^2 x-\sin^2 x$, *takže*

$$\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{1-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}.$$

U: Odstránime zátvorky vo výraze v menovateli a dostávame

$$\frac{2\sin x\cos x}{1-\cos^2 x+\sin^2 x}.$$

Akým výrazom sa dá nahradiť dvojčlen $1-\cos^2 x$ v menovateli zlomku?

Ž: *Zo základného vzorca* $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ *sa dá tento výraz nahradiť výrazom* $\sin^2 x$. *Potom mám*

$$\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin^2 x}.$$

U: V menovateli zlomku dostaneme dvojnásobok výrazu $\sin^2 x$:

$$\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}.$$

Ž: *Po vykrátení zlomku výrazom* $2\sin x$ *dostávame výsledok*

$$\frac{\cos x}{\sin x}.$$

U: Ktorú funkciu definuje podiel hodnôt funkcií kosínus a sínus?

Ž: *Tento podiel určuje hodnotu funkcie kotangens. Platí teda*

$$\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{cotg} x.$$

U: Výraz $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$ sa teda dá upraviť na tvar $\operatorname{cotg} x$. To je výsledok prvej časti úlohy. Určme ešte ***podmienky***, za akých má výraz zmysel.

Ž: *V menovateli zlomku v zadanom výraze je dvojčlen* $1-\cos 2x$. *Musí byť* **rôzny od nuly**, *lebo nulou nevieme deliť.*

U: Máš pravdu. Riešenie podmienky $1-\cos 2x\neq 0$ však môžeme nahradiť jednoduchšou podmienkou. Sleduj ešte raz výrazy v menovateľoch zlomkov, ktoré vznikli pri úprave. Výraz $1-\cos 2x$ sme využitím vzorcov nahradili postupne výrazmi $1-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$, $1-\cos^2 x+\sin^2 x$ a nakoniec výrazom $2\sin^2 x$. Podmienku $1-\cos 2x\neq 0$ môžeme teda nahradiť podmienkou $\sin^2 x\neq 0$. A toto by si mal byť schopný vyriešiť aj sám.

Ž: *Druhá mocnina hodnoty funkcie sínus je rôzna od nuly, ak hodnota* $\sin x$ *je rôzna od nuly. Sínus nadobúda nulové hodnoty pre celočíselné násobky čísla* π. *Preto* $x\neq k\pi$, *kde* k *je celé číslo.*

U: Správne. Výraz je preto definovaný pre

$$x \in \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Príklad 4: *Zjednodušte výraz* $\dfrac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1}$ *a určte, pre ktoré reálne čísla x má výraz zmysel.*

Ž: *Najskôr by som pri úprave výrazu využil vzorce pre dvojnásobný argument:*

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

U: Máš pravdu. Potom dostaneš:

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} = \frac{2\sin x \cos x - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 1}{2\sin x \cos x + \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 1}.$$

Ž: *Odstránim zátvorky a mám zlomok*

$$\frac{2\sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x + 1}{2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x + 1}.$$

Dosť komplikované. V čitateli aj v menovateli zlomku sú štyri členy.

U: Ak určité dva z nich dáš dohromady, môžeš využiť základný vzorec

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

V čitateli sú to členy $-\cos^2 x$ a 1. Nahradíš ich výrazom $\sin^2 x$.

Ž: *Aha! V menovateli spojím členy $-\sin^2 x$ a 1, ktoré nahradím výrazom $\cos^2 x$.*

U: Tieto úpravy zhrnieme ešte raz do zápisu v rámčeku.

$$\boxed{\frac{2\sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x + 1}{2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x + 1} = \frac{2\sin x \cos x + \sin^2 x + \sin^2 x}{2\sin x \cos x + \cos^2 x + \cos^2 x}}$$

Ž: *Posledné dva členy v čitateli sú rovnaké, dajú sa vyjadriť v tvare $2\sin^2 x$. To isté platí o posledných dvoch členoch v menovateli. Akurát je tam funkcia kosínus. Dostávam zlomok*

$$\frac{2\sin x \cos x + 2\sin^2 x}{2\sin x \cos x + 2\cos^2 x}.$$

U: K výsledku sa už teraz dopracujeme pomerne ľahko. V čitateli vyberieme pred zátvorku výraz $2\sin x$.

Ž: *V menovateli by som vybral výraz $2\cos x$.*

U: Správne. V oboch prípadoch zostane v zátvorke ten istý dvojčlen $\sin x + \cos x$. Máme teda

$$\frac{2\sin x(\sin x + \cos x)}{2\cos x(\sin x + \cos x)}.$$

Ž: *Keďže výrazy v zátvorkách sú rovnaké, môžeme ich* **vykrátiť**. *Tak isto vykrátime dvojky a dostávame jednoduchý zlomok*

$$\frac{\sin x}{\cos x}.$$

U: Nie je to ešte výsledok. Zabudol si, že takýmto podielom je definovaná hodnota funkcie tangens. Teda

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} = \mathrm{tg} x.$$

Určiť podmienky, znamená všímať si výrazy v menovateľoch zlomkov, ktoré vznikli pri úpravách. Výraz $\sin 2x + \cos 2x + 1$ v menovateli zadaného výrazu sme postupnými úpravami nahradili výrazom $2\cos x(\sin x + \cos x)$ v zlomku pred krátením.

Ž: *Čiže tento výraz musí byť rôzny od nuly, preto*

$$2\cos x(\sin x + \cos x) \neq 0.$$

U: Súčin dvoch výrazov je rôzny od nuly, keď každý z výrazov je rôzny od nuly. V našom prípade

$$2\cos x(\sin x + \cos x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \ \wedge \ (\sin x + \cos x) \neq 0.$$

Vyriešiť prvú nerovnicu by nemal byť pre teba problém.

Ž: *Kosínus je rôzny od nuly, ak x je rôzne od nepárnych násobkov čísla $\frac{\pi}{2}$*

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

U: S podmienkou $\sin x + \cos x \neq 0$ ti pomôžem. Od funkcií sínus a kosínus prejdeme k funkcii tangens. Najskôr odčítame výraz $\cos x$

$$\sin x \neq -\cos x,$$

potom výrazy na oboch stranách ***vydelíme výrazom*** $\cos x$. Získame podmienku

$$\frac{\sin x}{\cos x} \neq -1.$$

Ž: *Mohli sme deliť výrazom $\cos x$?*

U: Áno. Z prvej podmienky $\cos x \neq 0$ predsa vieme, že kosínus nadobúda nenulové hodnoty.

Ž: *Rozumiem. Už ste spomínali, že podiel hodnôt funkcií sínus a kosínus určuje funkciu tangens. Teda podmienku $\frac{\sin x}{\cos x} \neq -1$ môžeme prepísať do tvaru $\mathrm{tg} x \neq -1$.*

U: Tangens nadobúda hodnotu jedna pre argument x rovný číslu $\frac{\pi}{4}$. Zápornú hodnotu nadobúda v intervale $\left(\frac{\pi}{2}; \ \pi\right)$. Preto je x rôzne od čísla $\pi - \frac{\pi}{4}$, čo je číslo $\frac{3\pi}{4}$.

Ž: *Ale funkcia tangens je periodická, takže tých čísel bude nekonečne veľa.*

U: Najmenšou periódou funkcie tangens je číslo π. Preto podmienkou $\mathrm{tg} x \neq -1$ vylúčime čísla v tvare $\frac{3\pi}{4} + k\pi$, kde k je celé číslo. Zhrnutím riešení oboch podmienok dostávame

$$x \in \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Príklad 5: *V množine reálnych čísel vyriešte rovnicu* $\cos 2x - 2 = \cos x$.

Ž: *Najskôr využijem vzorec pre hodnotu funkcie kosínus dvojnásobného argumentu:*

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Dosadím do zadania

$$\cos^2 x - \sin^2 x - 2 = \cos x.$$

U: Chceme, aby v rovnici boli iba hodnoty funkcie kosínus. Preto druhú mocninu hodnoty funkcie sínus vyjadríme zo základného vzorca:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Za výraz $\sin^2 x$ dosadíme dvojčlen $1 - \cos^2 x$. Máme teda

$$\cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) - 2 = \cos x.$$

Uprav výraz na ľavej strane rovnice.

Ž: *Odstránim zátvorku*

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x - 2 = \cos x.$$

Môžem sčítať druhé mocniny a čísla zvlášť, dostanem

$$2\cos^2 x - 3 = \cos x.$$

U: Zápis rovnice sa podobá na tvar kvadratickej rovnice. Preto odčítame od oboch strán rovnice výraz $\cos x$ a usporiadame členy

$$2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0.$$

Ž: *Spomenuli ste kvadratickú rovnicu. Spôsob jej riešenia by som potreboval pripomenúť.*

U: Namiesto výrazu $\cos x$ v rovnici

$$2 \cdot (\cos x)^2 - \cos x - 3 = 0$$

použijeme substitučnú neznámu, napríklad u. Kvadratická rovnica pre neznámu u bude mať tvar

$$2u^2 - u - 3 = 0.$$

Korene kvadratickej rovnice vypočítaš pomocou vzorca, ktorý máš v rámčeku.

$$\boxed{u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

U: Kde v našom prípade $a = 2$, $b = -1$ a $c = -3$. Dosaď do vzorca a vypočítaj hodnoty neznámej u.

Ž: *Po dosadení do vzorca dostanem pod odmocninou číslo* 25.

$$\boxed{u_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4}}$$

Ž: *Odmocnina z čísla* 25 *je rovná číslu* 5*, a teda*

$$u_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{4}.$$

U: To číslo pod odmocninou sa nazýva diskriminant. Pokračuj ďalej vo výpočtoch. Rozdeľ to na dva prípady.

Ž: *Pre znamienko plus v čitateli zlomku dostanem* $u_1 = \frac{1+5}{4}$*, a to je zlomok* $\frac{3}{2}$*. Analogicky počítam, ak v čitateli zoberiem znamienko mínus. Vtedy* $u_2 = \frac{1-5}{4}$ *je rovné číslu* -1*.*

U: Pre každú hodnotu substitučnej neznámej u treba ešte určiť hodnoty neznámej x, lebo $\cos x = u$. Najskôr vyriešme prípad, keď $u = \frac{3}{2}$. Jednoduchá goniometrická rovnica bude mať tvar $\cos x = \frac{3}{2}$.

Ž: *Táto rovnica nebude mať riešenie.*

U: Prečo?

Ž: *Kosínus nadobúda iba hodnoty v rozpätí od* -1 *do* 1 *vrátane. Nemôže mať hodnotu* $\frac{3}{2}$*, lebo to je viac ako jedna.*

U: Správne. Ani riešenie druhej rovnice pre prípad $u = -1$ nebude ťažké. Funkcia kosínus nadobúda v základnom intervale $\langle 0; 2\pi)$ hodnotu -1 iba raz, pre $x = \pi$. Keďže funkcia kosínus je ***periodická*** s najmenšou periódou 2π, všetky riešenia tejto rovnice môžeme vyjadriť v tvare $x = \pi + k \cdot 2\pi$, kde k je celé číslo. Teda

$$\mathcal{K} = \{\pi + k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Úloha : *V množine reálnych čísel vyriešte rovnicu* $\sin x + \sin 2x = 0$.

Výsledok: $\mathcal{K} = \left\{k\pi,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Príklad 6: *Vyjadrite* $\sin 3x$ *ako výraz obsahujúci* $\sin x$.

Ž: *Výraz* $3x$ *sa dá zapísať ako súčet iných dvoch výrazov. Napríklad* x *a* $2x$.

U: Dosadíme do zadania a využijeme súčtový vzorec

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

V našom prípade $a = x$ a $b = 2x$.

$$\sin 3x = \sin(x + 2x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x.$$

Ž: *Teraz by som využil vzorce pre hodnoty sínus a kosínus dvojnásobného argumentu*

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Dosadím

$$\sin 3x = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = \sin x \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) - \cos x \cdot 2 \sin x \cos x.$$

U: Roznásobíme zátvorku a v druhom člene za znamienkom mínus využijeme to, že súčin $\cos x \cdot 2 \sin x \cos x$ sa dá vyjadriť v tvare $2 \sin x \cos^2 x$.

$$\boxed{\sin x \cos^2 x - \sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x}$$

U: Ďalej to upravíme na tvar

$$3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x.$$

Ž: *To je výsledok?*

U: Nie. Vo výslednom výraze, podľa zadania, nesmie byť hodnota funkcie kosínus. Výraz $\cos^2 x$ vieme vyjadriť zo ***základného vzťahu*** medzi hodnotami funkcií sínus a kosínus.

Ž: *Aha! Viem, že platí* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. *Za výraz* $\cos^2 x$ *teda dosadím výraz* $1 - \sin^2 x$. *Dostávam*

$$3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 3 \sin x \left(1 - \sin^2 x\right) - \sin^3 x.$$

U: Výrazy stačí roznásobiť a dostaneme

$$3 \sin x - 3 \sin^3 x - \sin^3 x.$$

Potom sčítame tretie mocniny výrazu $\sin x$ a máme výsledok

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

Úloha : *Vyjadrite* $\cos 3x$ *ako výraz obsahujúci* $\cos x$.

Výsledok: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

Príklad 7: *Načrtnite graf funkcie* $f : y = \sin x \cos x$ *na intervale* $\langle -\pi;\ 2\pi\rangle$.

U: Najskôr upravíme výraz na pravej strane v predpise funkcie f. S ktorým vzorcom súvisí výraz $\sin x \cos x$?

Ž: *S hodnotou funkcie sínus pre argument* $2x$. *Ale to by tam musel byť dvojnásobok výrazu* $\sin x \cos x$, *lebo platí*

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

U: Z toho dôvodu hodnota výrazu $\sin x \cos x$ bude predstavovať polovicu výrazu $\sin 2x$,

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Po dosadení do predpisu zadanej funkcie dostávame

$$f : y = \frac{\sin 2x}{2}.$$

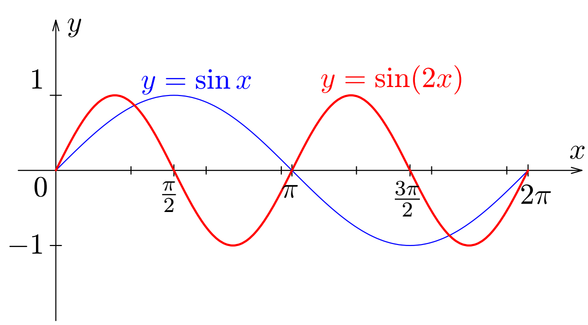
Vieš, aký geometrický význam majú jednotlivé koeficienty v tomto predpise?

Ž: *Pamätám sa, že číslo* 2 *v menovateli zlomku zmení obor funkčných hodnôt. Pre funkciu* $y = \sin x$ *patria funkčné hodnoty do uzavretého intervalu* $\langle -1;\ 1\rangle$. *Teraz sa zmenia na polovičnú hodnotu. Teda* $y \in \left\langle -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right\rangle$. *Ako sa prejaví na grafe funkcie číslo* 2 *v argumente* $2x$, *potrebujem vysvetliť.*

U: Argument $2x$ v predpise $y = \sin 2x$ mení periódu.

Ž: *Nikdy neviem, či sa zväčší alebo zmenší.*

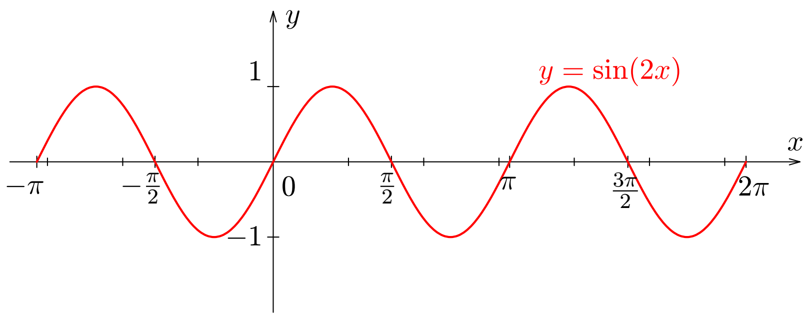
U: Hodnoty argumentu $2x$ rastú ***dvakrát rýchlejšie***, ako hodnoty argumentu x vo funkcii $y = \sin x$. Preto funkcia $y = \sin 2x$ nadobudne hodnoty na základnom intervale $\langle 0;\ 2\pi)$ dvakrát rýchlejšie v porovnaní s funkciou $y = \sin x$. ***Perióda sa dvakrát zmenší***. Pre funkciu $y = \sin 2x$ bude ***najmenšou periódou číslo*** π.



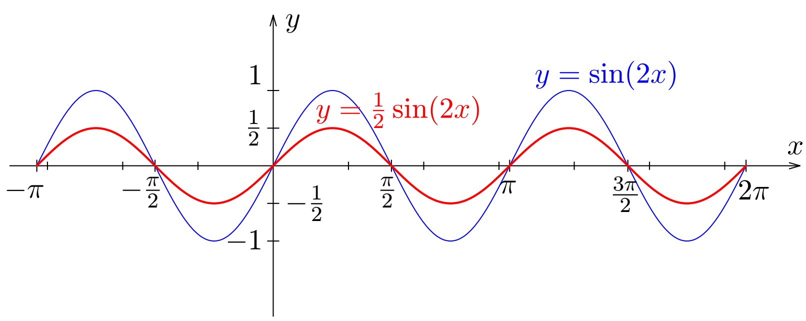
Ž: *Na intervale* $\langle 0;\ 2\pi\rangle$ *sme načrtli základnú časť sínusoidy dvakrát.*

U: Áno. Nezabúdaj ale, že našou úlohou je načtrnúť graf funkcie f na uzavretom intervale $\langle -\pi;\ 2\pi\rangle$.

Ž: *Tak tam načrtneme ešte jednu základnú časť na intervale* $\langle -\pi;\ 0\rangle$.



U: V úvode si správne povedal, že oborom hodnôt funkcie $f : y = \dfrac{1}{2} \cdot \sin 2x$ bude uzavretý interval $\left\langle -\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2} \right\rangle$. Tam, kde boli na grafe funkcie $y = \sin 2x$ maximálne hodnoty rovné číslu 1, budú teraz hodnoty rovné jednej polovici. Minimálne hodnoty budú rovné číslu $-\dfrac{1}{2}$. ***Nulové hodnoty*** zostanú nezmenené. Ostatné hodnoty budú polovicou hodnôt z grafu funkcie $y = \sin 2x$.



Príklad 8: *V množine reálnych čísel vyriešte rovnicu* $\sin 2x = \mathrm{tg} x$.

Ž: *Výraz* $\sin 2x$ *by som nahradil výrazom* $2\sin x\cos x$ *podľa vzorca* $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. *Dostanem rovnicu*

$$2\sin x\cos x = \mathrm{tg} x.$$

U: Aj hodnota funkcie tangens sa dá vyjadriť cez hodnoty funkcií sínus a kosínus.

Ž: *Spomínam si. Tangens je definovaný ako podiel funkcie sínus a kosínus.*

$$\boxed{\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.}$$

U: Po dosadení do rovnice dostaneme

$$2\sin x\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Pokračuj v riešení rovnice.

Ž: *Vo výrazoch na ľavej, aj pravej strane rovnice je hodnota* $\sin x$. *Rovnicu by som týmto výrazom* **vydelil**.

U: Pozor! Táto úprava nie je dovolená. Výraz $\sin x$ ***nadobúda aj nulové hodnoty***. Nulou deliť nemôžeme. Stratil by si časť riešení zadanej rovnice. Oba výrazy radšej prenes na jednu stranu rovnice a porovnaj s nulou na druhej strane rovnice.

Ž: *Od výrazov na oboch stranách rovnice odčítam výraz* $\dfrac{\sin x}{\cos x}$, *potom*

$$2\sin x\cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

Pred zátvorku by som vybral výraz $\sin x$, *takže mám*

$$\sin x\left(2\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) = 0.$$

U: Výraz $2\cos x - \dfrac{1}{\cos x}$ v zátvorke upravíme na spoločného menovateľa takto:

$$\sin x\left(\frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}\right) = 0.$$

U: Kedy sa ***súčin*** dvoch výrazov ***rovná nule***?

Ž: *Ak jeden alebo druhý výraz je rovný nule.*

U: V našom prípade platí

$$\sin x\left(\frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \left(2\cos^2 x - 1 = 0\right).$$

Ž: *Prečo ste nenapísali celý zlomok, ale iba jeho čitateľa?*

U: Lebo platí, že ***zlomok*** sa rovná nule práve vtedy, keď je ***čitateľ*** rovný nule. Pokračujeme v riešení. Vyriešiť prvú rovnicu $\sin x = 0$ by pre teba nemal byť problém.

Ž: *Sínus nadobúda nulové hodnoty pre* **celočíselné násobky čísla** π. *Preto* $x = k\pi$, *kde* k *je celé číslo.*

U: V rovnici $2\cos^2 x - 1 = 0$ sú schované dve jednoduché goniometrické rovnice. Získame ich postupnými úpravami. K obom stranám rovnice pripočítame číslo 1

$$2\cos^2 x = 1$$

a výrazy odmocníme,

$$\sqrt{2}|\cos x| = 1.$$

Ž: *Prečo ste zapísali* **absolútnu hodnotu**?

U: Lebo vieme, že platí $\sqrt{u^2} = |u|$. Ak v našom prípade rovnicu $\sqrt{2}|\cos x| = 1$ vydelíme odmocninou z dvoch, dostaneme

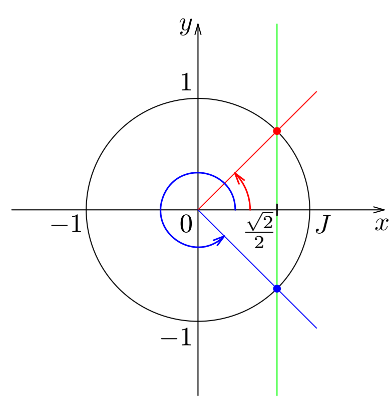
$$|\cos x| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ž: *To znamená, že hodnota kosínus môže byť rovná plus alebo mínus číslo* $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

U: Máš pravdu. Základné riešenia rovnice $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ zodpovedajú bodom na jednotkovej kružnici v I. a vo IV. kvadrante. To preto, lebo funkcia kosínus reálnemu číslu x priradí súradnicu x_M bodu M na jednotkovej kružnici. Tá má byť podľa rovnice rovná číslu $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Túto hodnotu nadobúda funkcia kosínus pre $x = \frac{\pi}{4}$. Vieš určiť riešenie zodpovedajúce IV. kvadrantu?

Ž: *Potrebujem poradiť.*

U: Pozri sa na jednotkovú kružnicu. Plný uhol predstavuje veľkosť 2π v radiánoch. Situácia vo IV. kvadrante je symetrická so situáciou v I. kvadrante podľa osi x.



Ž: *Už si spomínam. Riešenie zodpovedajúce IV. kvadrantu bude* $x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4}$, *čo je číslo* $\frac{7\pi}{4}$.

U: Vieme ešte, že funkcia kosínus je periodická s ***najmenšou periódou*** 2π. Preto všetky riešenia rovnice $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ určuje množina, ktorú máš v rámčeku.

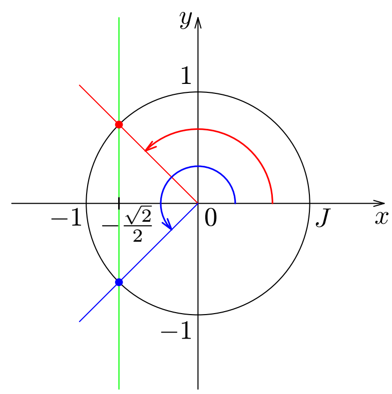
$$\boxed{\mathcal{K}_2 = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

U: Vyrieš takto aj poslednú rovnicu

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ž: *Kosínus nadobúda* **záporné hodnoty** *pre argumenty zodpovedajúce bodom na jednotkovej kružnici v II. a v III. kvadrante. Aj tu využijem, že* $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$*. Hodnotu zodpovedajúcu II. kvadrantu určím ako rozdiel čísel* π *a* $\frac{\pi}{4}$*. Súčet týchto čísel bude zodpovedať bodu na jednotkovej kružnici v III. kvadrante. Preto platí*

$$x_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};\ \ x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$



U: Všetky riešenia rovnice $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dostaneme, ak zohľadníme, že funkcia kosínus je ***periodická*** s najmenšou periódou 2π. Teda

$$\mathcal{K}_3 = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ž: *Výsledok riešenia rovnice zo zadania dostaneme, ak spojíme všetky tri čiastkové riešenia?*

U: Áno, ide o ***zjednotenie množín*** koreňov pre tri jednoduchšie rovnice, ktoré sme v riešení dostali. Preto $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \bigcup \mathcal{K}_2 \bigcup \mathcal{K}_3$ a je uvedená v poslednom rámčeku.

$$\boxed{\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \bigcup \mathcal{K}_2 \bigcup \mathcal{K}_3 = \left\{k\pi,\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$