Vlastnosti funkcií tangens a kotangens

RNDr. Marián Macko

U: Niektoré vlastnosti funkcií tangens a kotangens sa dajú objaviť na základe ich definícií. Tie dávajú funkcie tangens a kotangens do vzťahu s funkciami sínus a kosínus, ktorých vlastnosti už poznáme. Pripomeňme si, ako sú definované funkcie tangens a kotangens?

Ž: *Funkcia* **tangens premennej x je podiel** $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ *a pre funkciu* **kotangens platí:** $\mathrm{cotg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

U: Z predpisov ľahko zistíme napríklad ***nulové body funkcií tangens a kotangens***. Sú to body, v ktorých graf funkcie ***pretína x-ovú os***. Aká musí byť ich y-ová súradnica?

Ž: *Nulová.*

U: Za y dosadíme 0 a vyriešime rovnicu $\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = 0$. Kedy sa zlomok rovná nule?

Ž: *Zlomok je nula, ak jeho čitateľ je rovný nule.*

U: V našom prípade $\sin x = 0$. A tu je prvé dôležité zistenie. ***Funkcia tangens*** má tie isté ***nulové body ako funkcia sínus***. Ako vieme, sínus nadobúda nulové hodnoty pre všetky reálne čísla v tvare $x = k\pi$***, kde k je celé číslo***. Sú to aj nulové body funkcie tangens.

Pre funkciu kotangens skús určiť nulové body sám.

Ž: *Musím riešiť rovnicu:* $\mathrm{cotg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = 0$*. Je to analogické, ibaže teraz musí byť rovný nule kosínus:* $\cos x = 0$*. Jej riešením sú reálne čísla v tvare* $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$**, kde k je celé číslo**.

U: ***Nulové body funkcie kosínus*** sú zároveň ***nulovými bodmi funkcie kotangens.*** U oboch funkcií tangens a kotangens je nutné zohľadniť ich definičné obory. Pre funkciu tangens:

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

a pre funkciu kotangens

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Našťastie neovplyvnia nami získané výsledky.

U: Ani rozhodnutie o párnosti, či nepárnosti pre funkcie tangens a kotangens nebude problémom. Najskôr je však potrebné určiť, či je splnená prvá podmienka definícií párnosti a nepárnosti. Patrí s každým x do definičného oboru aj $-x$?

Ž: *Definičným oborom funkcie tangens sú všetky reálne čísla, okrem nepárnych násobkov čísel* $\dfrac{\pi}{2}$.

U: To znamená, že sú z množiny reálnych čísel vylúčené tak kladné celočíselné násobky, ako aj záporné celočíselné násobky čísla $\frac{\pi}{2}$. ***Definičný obor je symetrická množina okolo nuly***. Podobne to je pre funkciu kotangens. Do definičného oboru nepatria celočíselné násobky čísla π:

$$\ldots;\ -3\pi;\ -2\pi;\ -\pi;\ \pi;\ 2\pi;\ \ldots$$

Ž: *Prvá podmienka definícií párnosti a nepárnosti funkcie je splnená.*

U: Podľa druhej podmienky je nutné dať do vzťahu hodnoty $\mathrm{tg}(-x)$ a $\mathrm{tg}x$ a podobne pre funkciu kotangens. Pamätáš sa, aký je vzťah medzi týmito hodnotami pri párnej funkcií?

Ž: *Rovnajú sa. Pri nepárnej sú navzájom opačné.*

U: Poďme zistiť, či niektorá z týchto vlastností platí v našom prípade.

Podľa definície vyjadríme $\mathrm{tg}(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$. V ďalších úpravách nám pomôžu vedomosti o funkciách sínus a kosínus. Aké sú z hľadiska párnosti, nepárnosti?

Ž: *Funkcia sínus je nepárna a funkcia kosínus párna.*

U: Preto môžeme využiť: $\sin(-x) = -\sin x$ a $\cos(-x) = \cos x$, ktoré dosadíme do predpisu funkcie. Sleduj úpravy v rámčeku.

$$\boxed{\mathrm{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x}}$$

Ž: *Ale* $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ *predstavuje tangens* x.

U: Získali sme teda: $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x$. Aká je teda funkcia tangens?

Ž: **Funkcia tangens je nepárna**.

U: Pre funkciu kotangens by úpravy boli analogické.

Ž: *Zlomok by sa obrátil.*

U: To znamená, že aj ***funkcia kotangens je nepárna***. Máš predstavu ako sa to prejaví na ich grafoch?

Ž: *Mali by byť stredovo súmerné podľa začiatku súradnicovej sústavy.*

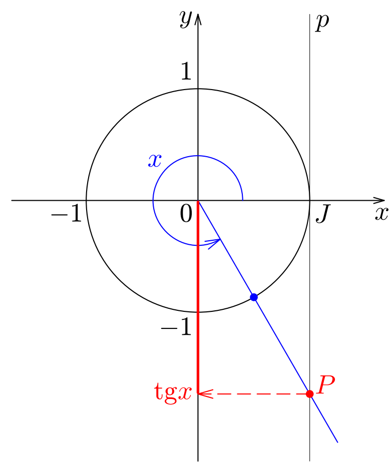
U: Ak zostaneme naďalej pri definícií funkcií tangens a kotangens, môžeme ukázať, že sú periodické s periódou 2π. Stačí urobiť podobné úpravy. Vyjadríme $\mathrm{tg}(x + 2k\pi)$ podľa definície a využijeme, že funkcie sínus a kosínus sú periodické s najmenšou periódou 2π.

$$\boxed{\mathrm{tg}(x + 2k\pi) = \frac{\sin(x + 2k\pi)}{\cos(x + 2k\pi)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}x}$$

Ž: *Znamená to, že* 2π *je najmenšia perióda pre funkcie tangens a kotangens?*

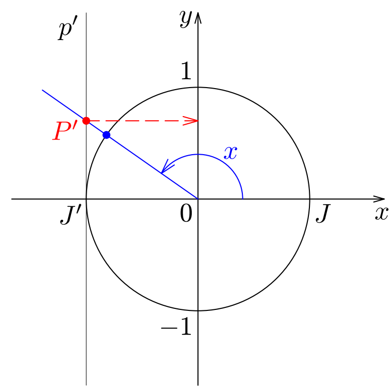
U: Nie, tieto funkcie majú menšiu periódu. K jej určeniu nám pomôže ***geometrická interpretácia*** týchto funkcií na jednotkovej kružnici. Spomínaš si, ako sa odčítava na jednotkovej kružnici hodnota funkcie tangens?

Ž: *Ak zostrojím dotyčnicu k jednotkovej kružnici v bode* $J\,[1;0]$*, tak* **tangensom bude** y**-ová súradnica priesečníka** *koncového ramena uhla veľkosti* x *a tejto dotyčnice.*



U: Pre I. a IV. kvadrant je to z obrázka jasné.

Ž: *Áno. Prečo ale nezostrojíme dotyčnicu aj v bode* $J'\,[-1;0]$*? Mohli by sme tam odčítavať hodnoty pre II. a III. kvadrant.*



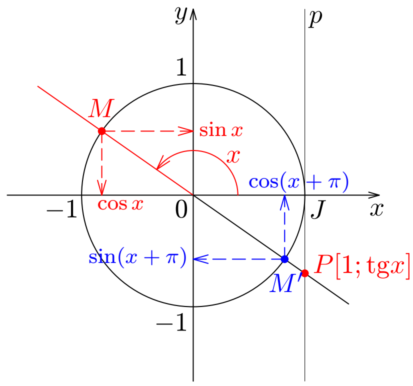
U: Ak by si zobral argument, ktorému je priradený bod na jednotkovej kružnici v II. kvadrante a potom určil známym spôsobom bod na dotyčnici, mal by y-ovú súradnicu kladnú. Ale tangens je v II. kvadrante záporný.

Čím sa líši II. a IV. kvadrant, z hľadiska hodnôt funkcií sínus a kosínus vzhľadom k nule?

Ž: *V II. kvadrante je sínus kladný a kosínus záporný, vo IV. kvadrante naopak.*

U: Pre oba kvadranty je ***podiel*** týchto funkcií ***záporný***. Podiel definuje buď tangens alebo kotangens.

Ak navyše zoberieš v II. a IV. kvadrante body, ktoré sú súmerné podľa začiatku, budú absolútne hodnoty sínusov rovnaké. To isté platí aj pre hodnoty funkcie kosínus. Teda hodnota tangens pre nejaké x zodpovedajúce bodu na jednotkovej kružnici vo ***IV. kvadrante je rovnaká ako*** pre ***bod v II. kvadrante*** s ním stredovo súmerný podľa začiatku súradnicovej sústavy. Podobný súvis je medzi I. a III. kvadrantom.



Ž: *To znamená, že* **najmenšou periódou** *funkcie tangens je číslo* π.

U: Úvahy pre kotangens by boli analogické. Platí:

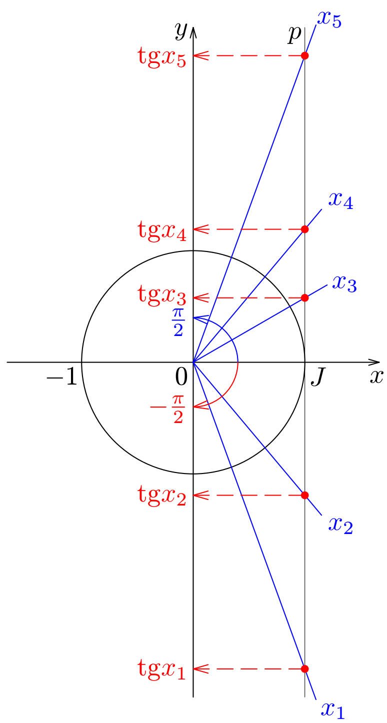
$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg}x \quad \text{a} \quad \operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg}x,$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. Samozrejme, iba pre prípustné x.

Ž: *Potom sa ľahšie budú počítať hodnoty.*

U: Áno, v jednom kvadrante budú kladné, v druhom záporné. Navyše nás to oprávňuje skúmať zvyšné vlastnosti iba na intervale dĺžky π. Ak sa pozrieš na obrázok, pre funkciu tangens je výhodný interval spájajúci I. a IV. kvadrant.

Ž: *Zobral by som interval* $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.



U: V obrázku s jednotkovou kružnicou je ukrytá aj odpoveď na otázku, aké ďalšie vlastnosti má funkcia tangens na tebou zvolenom intervale. V obrázku sú vyznačené hodnoty argumentu x: $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < \frac{\pi}{2}$. Porovnaj ich funkčné hodnoty.

Ž: *Sú v tom istom vzťahu:* $\mathrm{tg}x_1 < \mathrm{tg}x_2 < \mathrm{tg}x_3 < \mathrm{tg}x_4 < \mathrm{tg}x_5$.

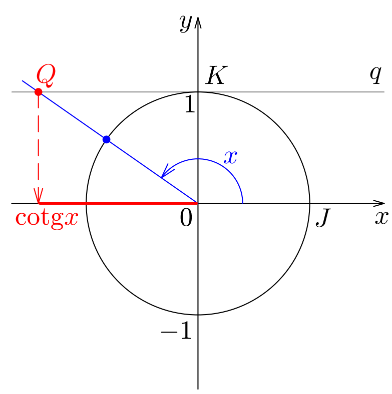
U: ***Funkcia tangens je rastúca na intervale*** $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Keďže je periodická, tak aj na každom intervale: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, kde k je celé číslo.

Obrázok zároveň ukazuje, že funkcia ***nie je ohraničená*** a jej ***obor hodnôt je množina všetkých reálnych čísel***.

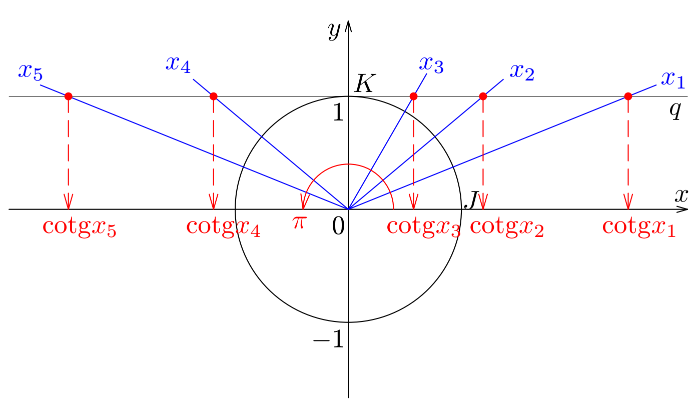
$$\boxed{\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}}$$

U: Pripomeňme si ešte geometrickú interpretáciu funkcie kotangens na jednotkovej kružnici.

Ž: *Ak zostojím dotyčnicu k jednotkovej kružnici v bode* $K\,[0;1]$*, tak* **x-ová súradnica priesečníka** *tejto dotyčnice a koncového ramena uhla vyjadruje kotangens.*



U: V prípade tejto funkcie je vhodné zobrať za základný interval $(0;\pi)$, ako to ukazuje obrázok. Veľké odlišnosti v niektorých vlastnostiach od vlastností funkcie tangens nebudú. Preskúmajme monotónnosť. Aký je vzťah medzi funkčnými hodnotami kotangens, ak argumenty sú: $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < \pi$?



Ž: *Tu je opačný vzťah:* $\mathrm{cotg}\, x_1 > \mathrm{cotg}\, x_2 > \mathrm{cotg}\, x_3 > \mathrm{cotg}\, x_4 > \mathrm{cotg}\, x_5$

U: ***Funkcia kotangens je klesajúca na intervale*** $(0; \pi)$ a vzhľadom na najmenšiu periódu π aj na každom intervale: $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, kde k je celé číslo. Ani táto funkcia ***nie je ohraničená*** a jej ***obor hodnôt je množina všetkých reálnych čísel***.

Príklad 1: *Vypočítajte:*

a) $\mathrm{tg}\left(-\dfrac{2007\pi}{4}\right)$

b) $\mathrm{cotg}\left(-\dfrac{61\pi}{6}\right)$.

U: V úlohe a) najskôr využijeme, že funkcia tangens je nepárna: $\mathrm{tg}(-x) = \mathrm{tg}x$.
V našom prípade: $\mathrm{tg}\left(-\dfrac{2007\pi}{4}\right) = -\mathrm{tg}\left(\dfrac{2007\pi}{4}\right)$.

Ž: *Ďalej viem, že funkcia tangens je periodická s najmenšou periódou π. Zlomok $\dfrac{2007\pi}{4}$ vyjadrím súčtom dvoch zlomkov. Číslo $\dfrac{2004}{4}\pi$ predstavuje 501-násobok najmenšej periódy funkcie tangens, preto to zanedbám:*

$$-\mathrm{tg}\left(\frac{2007\pi}{4}\right) = -\mathrm{tg}\left(\frac{2004\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = -\mathrm{tg}\left(501\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = -\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}.$$

U: Využil si vzťah: $\mathrm{tg}(x+k\pi) = \mathrm{tg}x$. Do ktorého kvadrantu patrí bod na jednotkovej kružnici, ak je mu priradené číslo $\dfrac{3\pi}{4}$?

Ž: *Jedná sa o* ***druhý kvadrant****, preto to prepíšem na tvar:* $-\mathrm{tg}\dfrac{3\pi}{4} = -\mathrm{tg}\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

U: Pre $x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right)$ je $\mathrm{tg}x < 0$. Preto $\mathrm{tg}\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)$ nahradíme výrazom $-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}$. Hodnotu $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}$ poznáme, je rovná jednej. Výsledok po úpravách je 1.

$$\boxed{-\mathrm{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\left(-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1}$$

U: Úlohu sme mohli vyriešiť aj iným spôsobom. Nepotrebujeme v ňom vedieť, že funkcia tangens je nepárna. Argument v zadaní $-\dfrac{2007\pi}{4}$ upravíme tak, aby pri využití periodickosti funkcie nám zostala ***kladná hodnota argumentu*** z intervalu $(0; \pi)$.

Ž: *Môžete to bližšie vysvetliť?*

U: Číslo $-\dfrac{2007\pi}{4}$ predstavuje niekoľko celých polotáčok v zápornom smere. Vieš určiť koľko?

Ž: *Podľa predchádzajúceho riešenia vieme, že $\dfrac{2007\pi}{4} = 501\pi + \dfrac{3\pi}{4}$. Preto bude 501 polotáčok v zápornom smere. Zodpovedá im číslo -501π.*

U: Zostáva ešte číslo $-\dfrac{3\pi}{4}$. Nepredstavuje celú polotáčku. Koľko treba pridať do celej polotáčky v zápornom smere?

Ž: *Štvrtinu čísla π.*

U: Aby sme dostali ďalšiu úplnú polotáčku v zápornom smere, od hodnoty argumentu odrátame číslo $\frac{\pi}{4}$. Hodnota argumentu musí však zostať nezmenená. Preto ak niečo odrátame, tak to musíme aj pripočítať. V matematike sa tomu hovorí: ***pridáme vhodnú nulu***.

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{2007\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{2007\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{2008\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Ž: *Chápem. Tangens má periódu π.*

U: Ďalej už vieš pokračovať v riešení aj sám.

Ž: *Číslo $-\frac{2008\pi}{4}$ vyjadruje -502-násobok najmenšej periódy a hodnota $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ je 1.*

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{2008\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-502\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

U: V úlohe b) postupuj analogicky ako v a). Vlastnosti funkcie kotangens, potrebné na jej riešenie nie sú odlišné od vlasností funkcie tangens.

Ž: *Najskôr využijem nepárnosť funkcie kotangens. Aj funkcia kotangens má periódu π, preto pre výpočet hodnota argumentu 10π nemá význam. Nakoniec využijem známu hodnotu pre* $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}$.

$$\boxed{\begin{aligned}&\operatorname{cotg}\left(-\frac{61\pi}{6}\right) = -\operatorname{cotg}\frac{61\pi}{6} = -\operatorname{cotg}\left(\frac{60\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{cotg}\left(10\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}\end{aligned}}$$

Úloha : *Vypočítajte:* $\operatorname{tg}\frac{14\pi}{3} - \operatorname{cotg}\frac{35\pi}{6}$.

Výsledok: 0

Príklad 2: *Rozhodnite o pravdivosti výrokov:*

a) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} < \operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}$

b) $\operatorname{cotg}\frac{7\pi}{4} > \operatorname{cotg}\frac{9\pi}{5}$.

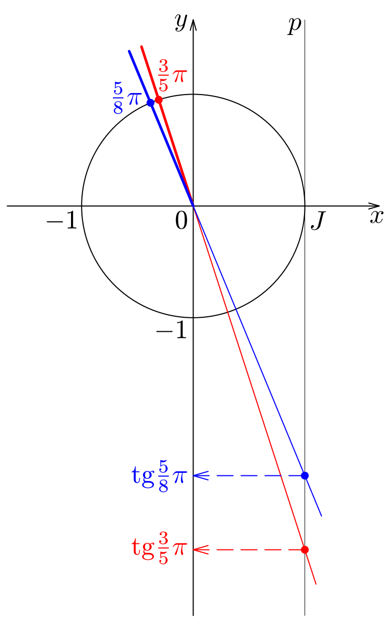
U: Porovnaj čísla $\frac{3\pi}{5}$ a $\frac{5\pi}{8}$ navzájom a rozhodni, do ktorého kvadrantu patria body priradené týmto číslam.

Ž: *$\frac{3\pi}{5}$ aj $\frac{5\pi}{8}$ sú čísla menšie ako π, ale väčšie ako $\frac{\pi}{2}$, lebo $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$ a $\frac{5}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Patria do* **II. kvadrantu**.

Navzájom ich porovnám tak, že oba zlomky upravím na **spoločného menovateľa***:*

$$\frac{3\pi}{5} = \frac{3\pi}{5} \cdot \frac{8}{8} = \frac{24\pi}{40} \qquad a \qquad \frac{5\pi}{8} = \frac{5\pi}{8} \cdot \frac{5}{5} = \frac{25\pi}{40}.$$

U: $\frac{25\pi}{40} > \frac{24\pi}{40}$, preto aj $\frac{5\pi}{8} > \frac{3\pi}{5}$. Na porovnanie hodnôt funkcie tangens pre tieto čísla využi jednotkovú kružnicu.



Ž: *Z obrázka vyplýva, že* $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} < \operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}$.

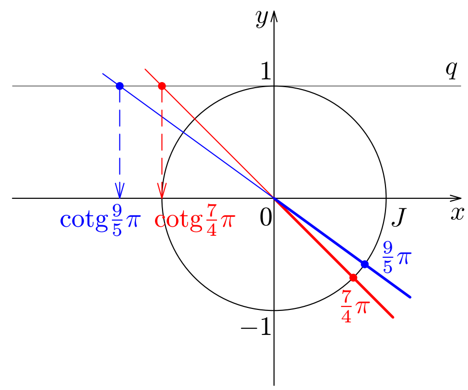
U: Výrok je ***pravdivý***. Vyjadruje to, že funkcia tangens je v II. kvadrante ***rastúca***.
Zvládnuť úlohu b) už nebude problém.

Ž: *Opäť porovnám argumenty* $\dfrac{7\pi}{4}$ *a* $\dfrac{9\pi}{5}$. *Patria do* **IV. kvadrantu**, *lebo*

$$\frac{7\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4} \qquad a \qquad \frac{9\pi}{5} = \frac{10\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = 2\pi - \frac{\pi}{5}.$$

$\dfrac{9\pi}{5}$ **je viac**, *lebo uberám od* 2π *iba* $\dfrac{\pi}{5}$, *čo je menej ako ubrať* $\dfrac{\pi}{4}$.

U: Na jednotkovej kružnici to teraz bude vyzerať trochu inak:



Ž: *Z obrázka vyplýva, že* $\operatorname{cotg}\dfrac{7\pi}{4} > \operatorname{cotg}\dfrac{9\pi}{5}$. *Výrok je* **pravdivý**.

U: Aj tu sme mohli využiť vlastnosť, že funkcia kotangens je na intervale $\left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ ***klesajúca***.

Úloha : *Rozhodnite o pravdivosti výroku:* $\operatorname{cotg}150^\circ > \operatorname{cotg}151^\circ$.

Výsledok: výrok je pravdivý

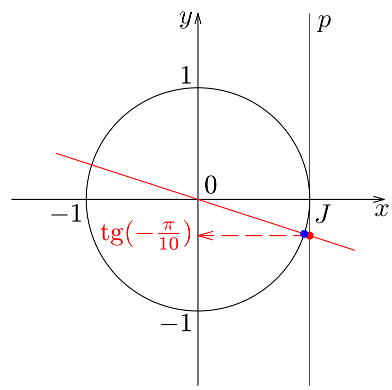
Príklad 3: *Určte všetky reálne čísla $x \in (0; 2\pi)$, pre ktoré platí:* $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10}$.

U: Aby sme mohli porovnať argumenty funkcie tangens na pravej a ľavej strane rovnice, musíme najskôr vyriešiť znamienko mínus vo výraze na pravej strane. Stačí využiť ***nepárnosť*** funkcie tangens.

Ž: $\operatorname{tg}(-x) = \operatorname{tg} x$. *V úlohe to použijeme z opačnej strany:* $-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10} = \operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{10}\right)$.

U: Potom zadaná rovnosť bude mať tvar: $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{10}\right)$.

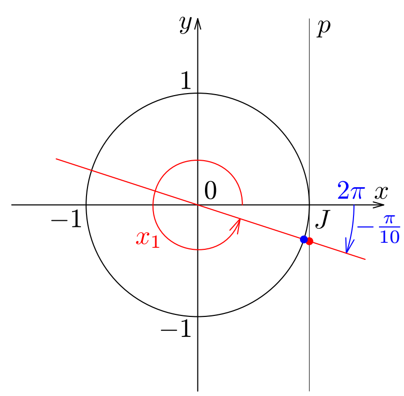
$\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{10}\right)$ je určitá hodnota. Nie je dôležité koľko presne. Dôležité je však zistiť, ***koľkokrát*** túto hodnotu funkcia nadobúda na intervale $(0; 2\pi)$. Pomôže nám v tom ***jednotková kružnica***.



Ž: *Jedna hodnota pre x je* $-\dfrac{\pi}{10}$.

U: V množine reálnych čísel áno. Úlohu však riešime na intervale $(0; 2\pi)$. K tomuto zápornému číslu skús nájsť zodpovedajúcu hodnotu, ktorá zodpovedá situácií na obrázku, ale v kladnom smere.

Ž: *V kladnom smere to bude* $x_1 = 2\pi - \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{19\pi}{10}$.

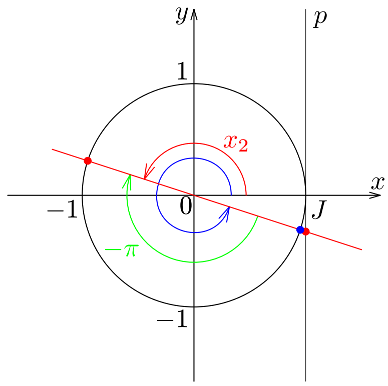


U: Existuje aj iné riešenie v zadanom intervale?

Ž: *Malo by byť v II. kvadrante, lebo tangens má* **záporné hodnoty v II. a IV. kvadrante**.

U: Druhé riešenie zodpovedajúce II. kvadrantu je v porovnaní s x_1 o π ***menšie***, pretože funkcia tangens je periodická s najmenšou periódou π. Teda

$$x_2 = x_1 - \pi = \frac{19\pi}{10} - \frac{10\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}.$$



Ž: *Riešením úlohy sú čísla* $x \in \left\{ \frac{9\pi}{10}; \frac{19\pi}{10} \right\}$.

Úloha : *Určte všetky reálne čísla* $x \in (0; 2\pi)$, *pre ktoré platí:* $\mathrm{cotg} x = -\mathrm{cotg} \frac{8\pi}{9}$

Výsledok: $x \in \left\{ \frac{\pi}{9}; \frac{10\pi}{9} \right\}$

Príklad 4: *Usporiadajte podľa veľkosti čísla:* $\mathrm{tg}\dfrac{10\pi}{3}$; $\mathrm{cotg}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$; $\sin(-5\pi)$; $\cos 2\pi$.

U: Vypočítaj si hodnoty goniometrických funkcií, a potom ich usporiadaj podľa veľkosti.

Ž: *Využil som, že funkcia tangens je* **periodická** *s najmenšou periódou* π*, teda* 3π *môžem zanedbať a mám*

$$\mathrm{tg}\frac{10\pi}{3} = \mathrm{tg}\left(\frac{9\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

U: Pri výpočte kotangensu využiješ iné vlastnosti.

Ž: *Kotangens je* **nepárna** *funkcia, preto:* $\mathrm{cotg}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\mathrm{cotg}\dfrac{2\pi}{3}$.

U: Číslo $\dfrac{2\pi}{3} \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$, čo odpovedá ***II. kvadrantu***. Ako vieme, pre také x platí: $\mathrm{cotg}x < 0$. Využi tento poznatok.

Ž: *Najskôr som využil nepárnosť funkcie. Číslo* $\dfrac{2\pi}{3}$ *zodpovedá bodu na jednotkovej kružnici v II. kvadrante, preto ho prepíšem pomocou čísla* π*. Pre II. kvadrant je kotangens záporný, preto pribudne ďalšie mínus a hodnota* $\mathrm{cotg}\dfrac{\pi}{3}$ *je* $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{cotg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\mathrm{cotg}\frac{2\pi}{3} = -\mathrm{cotg}\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -\mathrm{cotg}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= -\left(-\mathrm{cotg}\frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{cotg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}}$$

U: Zápis riešenia máš ukážkový. Chválim ťa.

Pokračuj vo výpočte ďalších hodnôt. Pri výpočte $\sin(-5\pi)$ využiješ ***nepárnosť*** funkcie sínus.

Ž: *Áno, ale aj* **periodickosť**. *Najmenšia perióda pre sínus je iná, až* 2π.

$$\sin(-5\pi) = -\sin 5\pi = -\sin(4\pi + \pi) = -\sin\pi = -0 = 0.$$

U: Hodnota $\cos 2\pi$ patrí medzi význačné.

Ž: *Hodnota je* 1*, teda* $\cos 2\pi = 1$.

U: Zostáva nám tieto výsledky $\sqrt{3}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 0; 1 ***usporiadať*** podľa veľkosti, lebo to je úlohou.

Ž: *Ťažšie sa mi pracuje, keď mám odmocniny. Koľko je* $\sqrt{3}$*?*

U: Približne 1,73.

Ž: *Potom* $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ *je asi* 0,6. *Teda platí:* $\sqrt{3} > 1 > \dfrac{\sqrt{3}}{3} > 0$.

U: Výsledok by sme mali zapísať v tvare zadania:

$$\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3} > \cos 2\pi > \operatorname{cotg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) > \sin(-5\pi).$$

Príklad 5: *Určte definičný obor funkcie:* $f: y = \dfrac{1}{1 - \operatorname{cotg} x}$.

U: Určiť podmienku pre výraz v tvare zlomku by nemalo byť problém.

Ž: **Menovateľ** *zlomku nesmie byť nula.*

U: V našom prípade $1 - \operatorname{cotg} x \neq 0$ a po úprave $\operatorname{cotg} x \neq 1$.

Vyriešiť túto podmienku znamená to isté ako vyriešiť rovnicu $\operatorname{cotg} x = 1$. Tie reálne čísla, ktoré získame riešením rovnice, nebudú patriť do definičného oboru.

Ž: *Viem, že* $\operatorname{cotg} x = 1$ *platí pre* $x = \dfrac{\pi}{4}$. *Toto číslo teda nevyhovuje podmienke.*

U: Je to jediné číslo v intervale $(0; \pi)$, ktoré treba vylúčiť, lebo funkcia je na tomto intervale klesajúca, teda aj prostá.

Ž: *Čo znamená, že je* **prostá na intervale** $(0; \pi)$*?*

U: Nadobúda danú hodnotu, napríklad 1, iba pre jedno x z definičného oboru. Na základe toho vieme, že na intervale dĺžky π iba jediné x nevyhovuje podmienke pre definičný obor. Toto x sme už určili. Pri určovaní ostatných čísel využijeme ***periodickosť funkcie kotangens***. Najmenšou periódou je číslo π.

Ž: *Teda do definičného oboru funkcie* f **nepatria** *reálne čísla, ktoré sa dajú zapísať v tvare* $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, *kde* k *je celé číslo.*

U: To je časť riešenia úlohy a).

Ž: *Nie je to ešte celé riešenie?*

U: V predpise funkcie f vo výraze na pravej strane nie je len zlomok, ale aj funkcia $c: y = \operatorname{cotg} x$. Ako vieme, jej definičný obor je $\mathcal{D}(c) = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Ž: *Takže aj čísla v tvare* $k\pi$ **nepatria** *do definičného oboru funkcie* f*?*

U: Áno, pre $x = k\pi$ hodnota $\operatorname{cotg} x$ neexistuje, preto aj výraz $\dfrac{1}{1 - \operatorname{cotg} x}$ pre takéto x nemá zmysel.

Ž: *Pri výrazoch s tangensom a kotangensom nesmiem zabudnúť na* **ich definičné obory***!*

U: Súhlasím.

Spojením oboch podmienok tak dostávame riešenie našej úlohy:

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi;\ k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Úloha : *Určte definičný obor funkcie* $g: y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Výsledok: $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} - \left\{k\dfrac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Príklad 6: *Zistite, pre ktoré reálne čísla platí:*

a) $\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(-x)$

b) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-x)$.

Ž: *Pri úprave výrazu na pravej strane by som využil nepárnosť funkcie kotangens:*

$$\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x.$$

U: V tom prípade by si zadanie upravil na tvar: $\operatorname{cotg} x = -(-\operatorname{cotg} x)$, čo sa dá upraviť:

$$\operatorname{cotg} x.$$

Ž: *To platí vždy, lebo oba výrazy, naľavo aj napravo, sú rovnaké.*

U: Máš pravdu. Platí to vždy, ak existujú hodnoty funkcie kotangens. Jej definičný obor predsa neobsahuje všetky reálne čísla.

Ž: $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ *nebude definovaný, ak* $\sin x = 0$. *To je pre* $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

U: Výsledkom úlohy je:

Rovnosť $\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(-x)$ platí pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Ž: *Skúsim začať riešiť úlohu b). Aj funkcia tangens je* **nepárna***:* $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. *Zadanie prepíšem do tvaru:*

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} x.$$

Ale to nikdy nenastane.

U: Prečo?

Ž: *Na ľavej strane je kladné číslo a na pravej záporné. Nikdy sa nebudú rovnať.*

U: Aj ľavá strana môže mať záporné hodnoty. Veď oborom hodnôt funkcie tangens je $\mathbb{R}$.

Na rovnicu sa pozri, ako keby si riešil $x = -x$. Pozor! Znamienko ***mínus*** na pravej strane nevyjadruje zápornosť hodnoty, ale ***hodnotu opačnú k*** x. Ak si zabudol ako postupovať, tak ti to pripomeniem. Základná myšlienka riešenia lineárnych rovníc je dať všetky členy obsahujúce neznámu na jednu stranu rovnice.

Ž: *Aha! Pripočítam k obom stranám rovnice* $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} x$ *výraz* $\operatorname{tg} x$.

U: Áno. Dostaneš: $2\operatorname{tg} x = 0$. Pokračuj v riešení.

Ž: *Predelím 2 a mám rovnicu* $\operatorname{tg} x = 0$.

Riešením tejto rovnice sú reálne čísla v tvare $x = k\pi$, *kde* k *je celé číslo.*

U: Nezabudni na definičný obor funkcie tangens.

Ž: *Do definičného oboru funkcie tangens nepatria nepárne násobky čísla* $\dfrac{\pi}{2}$, *preto je výsledok v poriadku.*

U: Riešením úlohy b) je: $x \in \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.