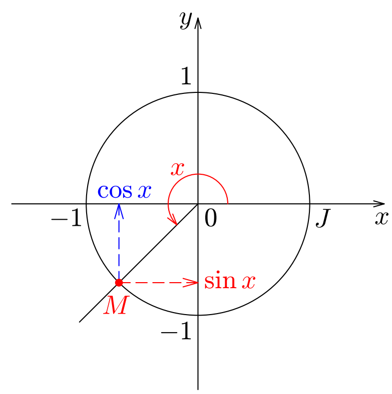
Vlastnosti funkcií sínus a kosínus

RNDr. Marián Macko

U: Tak, ako u ostatných funkcií, aj pre funkcie sínus a kosínus je dobré poznať ich vlastnosti. Pripomeňme si definície týchto funkcií na jednotkovej kružnici.

Ž: *Ak reálnemu číslu x priradíme na jednotkovej kružnici bod M tak, že dĺžka oblúka JM je rovná číslu x, tak*

$$y_M = \sin x \quad a \quad x_M = \cos x.$$



U: Táto názorná predstava umožňuje pochopiť vlastnosti daných funkcií.

Na náčrt grafov funkcií, určovanie podmienok pri úpravách výrazov, riešenie rovníc je dobré poznať ***nulové body***.

Ž: *Teda tie reálne čísla x, pre ktoré funkčná hodnota je* **rovná 0**.

U: Urč najskôr všetky reálne čísla x, pre ktoré $\sin x = 0$.

Ž: *To nebude náročné. Stačí určiť na jednotkovej kružnici všetky body, ktorých y-ová súradnica je rovná nule. Také body sú dva: $A[1;\ 0]$ a $B[-1;\ 0]$. Tie sú priradené reálnym číslam $x_1 = 0$ a $x_2 = \pi$.*

U: Ak využijeme, že funkcia je periodická, ***nulovými bodmi funkcie sínus*** sú všetky reálne čísla v tvare $x = 0 + 2k\pi$, a tiež v tvare $x = \pi + 2k\pi$, kde k je celé číslo. Čo myslíš, nedalo by sa to skrátiť do jedného tvaru?

Ž: *Máte pravdu, čísla sa opakujú pridaním násobkov čísla π.*

$$\ldots;\ -2\pi;\ -\pi;\ 0;\ \pi;\ 2\pi;\ \ldots$$

U: Sú to ***celočíselné násobky čísla*** π. Dajú sa vyjadriť v tvare

$$k\pi;$$

kde k je celé číslo.
Ako to vyzerá pre funkciu kosínus?

Ž: *Vyriešim analogicky. Bude ma zaujímať x-ová súradnica. Také body sú tiež dva: $C\,[0;\ 1]$ a $D\,[0;\ -1]$, ktorým zodpovedá $x = \frac{\pi}{2}$ alebo $\frac{3\pi}{2}$.*

U: Nielen tieto, ale aj

$$\dots;\ -\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \dots$$

Ž: *Stále je tam nejaký násobok čísla $\frac{\pi}{2}$.*

U: Násobok vyjadrujú ***nepárne čísla***: $\dots;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7;\ \dots$

Ž: **Nulovými bodmi funkcie kosínus sú teda nepárne násobky čísla $\frac{\pi}{2}$.** *V akom tvare ich zapíšeme?*

U: Párne číslo je násobkom čísla 2, zapíše sa v tvare $2k$; nepárne číslo je o 1 viac ako párne, zapíše sa v tvare $2k+1$, kde k je celé číslo. Nulové body funkcie kosínus možno zapísať v tvare

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

kde k je celé číslo.

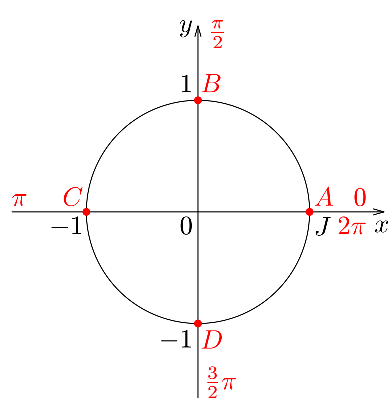
U: V téme pri zavedení pojmov sínus a kosínus sme určili aj obor funkčných hodnôt.

Ž: *U oboch funkcií je to uzavretý interval $\langle -1; 1\rangle$.*

U: Táto informácia nám dáva predstavu aj o ďalších vlastnostiach. Čo myslíš, sú dané funkcie ohraničené alebo môžu mať lokálne extrémy?

Ž: *Keďže hodnoty funkcií sínus a kosínus sú z uzavretého intarvalu $\langle -1; 1\rangle$,* **obe funkcie sú ohraničené**, *zhora číslom 1, zdola -1. Tieto hodnoty by mohli byť aj hodnotami extrémov.*

U: Ide o najväčšie, respektíve najmenšie hodnoty, ktoré môžu funkcie nadobudnúť, takže máš pravdu. Využi jednotkovú kružnicu a urč, pre ktoré $x \in \langle 0;\ 2\pi)$ nadobúda funkcia maximum, a pre ktoré minimum.



Ž: *Pre* **sínus je maximum 1**, *zaujíma ma bod $B\,[0;\ 1]$, ktorý je priradený reálnemu číslu $\frac{\pi}{2}$.* **Minimum je -1**, *ktorému zodpovedá bod $D\,[0;\ -1]$ a reálne číslo $\frac{3\pi}{2}$.*

U: Pre funkciu ***kosínus*** určíme analogicky:
maximum je 1 ***pre*** $x = 0$, vzhľadom na bod $A\,[1;\ 0]$ a ***minimum je*** -1 ***pre*** $x = \pi$, vzhľadom na bod $C\,[-1;\ 0]$.

U: Pamätáš na riešenie úlohy $\cos\left(-\dfrac{10\pi}{3}\right)$ v predchádzajúcej téme?

Ž: *Išlo to celkom v pohode.*

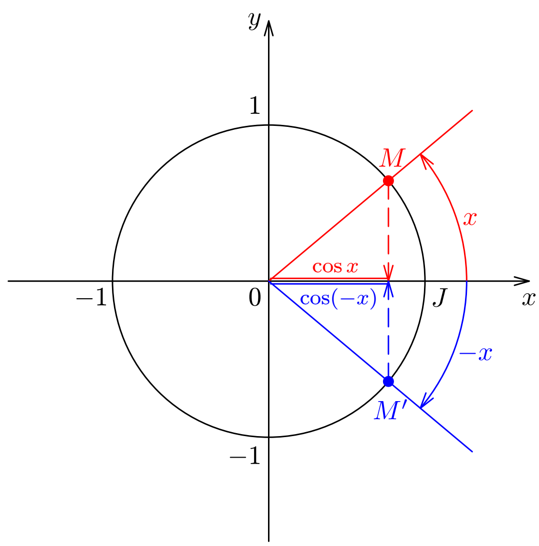
U: Ukážeme si, že sa dá vyriešiť aj iným spôsobom. Skúsme porovnať $\cos x$ a $\cos(-x)$.

Ž: *Tuším, kam mierite. Chcete zistiť, či je párna, alebo nepárna.*

U: Super! Tak poďme na to. Zoberme $x \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ž: *Číslu $-x$ priradíme bod na jednotkovej kružnici, ktorý patrí do IV. kvadrantu.*

U: Áno. Porovnajme hodnoty. Uvedom si, že obrázok je symetrický podľa osi x. Navyše, kosínus nepredstavuje dĺžku úsečky, ale súradnicu bodu.



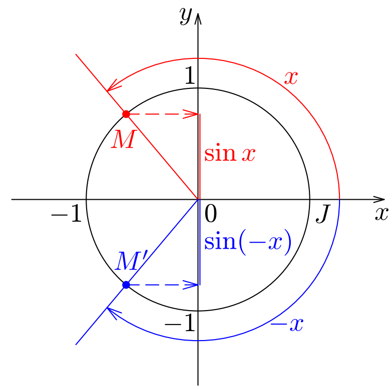
Ž: *Dostali sme, že* **funkcia kosínus je párna***, lebo x-ové súradnice bodov sú rovnaké.*

$$\boxed{\cos(-x) = \cos x}$$

U: Nie je to síce dôkaz, ale pre predstavu to stačí. Neviem, či si uvedomuješ, ale premennú x používame v obrázku v dvoch významoch. Ako označenie jednej zo súradnicových osí a ako reálne číslo, ktorému na jednotkovej kružnici priraďujeme bod. Pre to reálne číslo x určujeme hodnoty funkcie kosínus. Z úvah a povedaného vždy doteraz bolo a bude zrejmé, v akom význame symbol x použijeme. Je to ako napríklad zo symbolom a v geometrii. Označuje úsečku, ale aj priamku.

Ž: *Zadanú úlohu by som mohol teraz riešiť:*
$\cos\left(-\dfrac{10\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{10\pi}{3}\right)$*, lebo kosínus je párna funkcia.*

U: V ďalších výpočtoch by si uplatnil nám už známe vlastnosti danej funkcie. Pre nás teraz nie je dôležitý celý výpočet.
Preskúmajme ešte funkciu sínus. Vezmi teraz $x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.



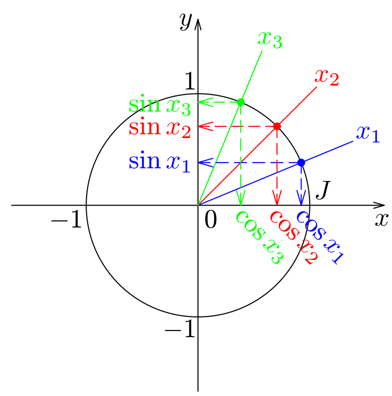
Ž: $\sin x$ *a* $\sin(-x)$ *majú rovnakú veľkosť, líšia sa však znamienkom.*

U: Aj teraz je obrázok symetrický poľa osi x. ***Funkcia sínus je teda nepárna***. Platí:

$$\boxed{\sin(-x) = -\sin x}$$

Ž: *Nerozobrali sme ešte, kde sú funkcie sínus a kosínus rastúce, a kde klesajúce.*

U: Výpočet hodnôt, kladnosť a zápornosť hodnôt v závislosti od kvadrantov naznačujú, aby sme to zohľadnili aj pri skúmaní tejto vlastnosti. Zoberme najskôr interval $\left\langle 0;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$ a v ňom 3 čísla $x_1 < x_2 < x_3$ tak, aby sme porovnali hodnoty sínus a kosínus.



Ž: *Je to dosť názorné na to, aby som povedal, že* **funkcia sínus bude na intervale** $\left\langle 0;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$ **rastúca**, *lebo y-ová súradnica bodu M_3 je najväčšia a bodu M_1 najmenšia.*

U: Pre kosínus platí obrátený vzťah: $\cos x_1 > \cos x_2 > \cos x_3$.

Ž: **Kosínus je na intervale** $\left\langle 0;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$ **klesajúca**.

U: Analogicky sa to dá zistiť aj pre ostatné uzavreté intervaly $\left\langle\frac{\pi}{2};\ \pi\right\rangle$; $\left\langle\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\rangle$; $\left\langle\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right\rangle$. Stačí si všímať, ako sa menia súradnice bodu na jednotkovej kružnici. Či sa zväčšujú, alebo zmenšujú, ak sa bod na oblúku v danom kvadrante pohybuje v kladnom smere, teda reálne číslo x sa zväčšuje. Tu je ***prehľadová tabuľka pre monotónnosť***.

x	$\left\langle 0;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$	$\left\langle\frac{\pi}{2};\ \pi\right\rangle$	$\left\langle\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\rangle$	$\left\langle\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right\rangle$
$\sin x$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
$\cos x$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

U: ***Symbol*** $\nearrow$ znamená ***rastúca*** a ***symbol*** $\searrow$ znamená ***klesajúca***.

U: Zostáva nám určiť, či dané funkcie sú prosté. V odpovedi na otázku by mohla pomôcť periodickosť funkcií.

Ž: *Sú periodické, nadobúdajú tú istú hodnotu pre nekonečne veľa reálnych čísel.* **Funkcie sínus a kosínus preto nie sú prosté**. *Prostá funkcia môže mať danú funkčnú hodnotu iba pre jedno x.*

U: Všetky uvedené vlastnosti sa dajú vyčítať aj z grafov funkcií sínus a kosínus.

Ž: *Prečo sme to neurobili? Veď v prípade iných funkcií sme vždy najskôr načrtli grafy a až potom určovali vlastnosti.*

U: Máš pravdu. Pre lepšie pochopenie obsahu pojmov sínus a kosínus je však jednotková kružnica vhodnejším spôsobom. Využiješ to aj pri riešení rovníc, nerovníc, uplatnení vzťahov medzi hodnotami goniometrických funkcií a podobne. Samozrejme mnohé z týchto problémov sa dajú riešiť aj cez grafy. Budeš mať možnosť porovnať.

Príklad 1: *Rozhodnite, ktoré z výrokov sú pravdivé:*

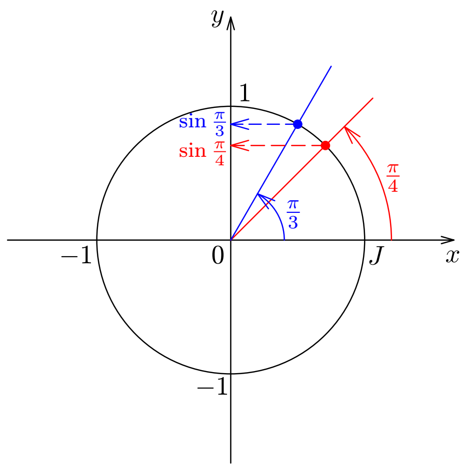
a) $\sin\dfrac{\pi}{4} < \sin\dfrac{\pi}{3}$,

b) $\cos\dfrac{4\pi}{3} > \cos\dfrac{5\pi}{3}$

Ž: *Načrtnem si obrázok a vyznačím body, ktoré sú priradené reálnym číslam* $\dfrac{\pi}{4}$ *a* $\dfrac{\pi}{3}$ *na jednotkovej kružnici. Body budú v I. kvadrante.*

U: Vieš čísla $\dfrac{\pi}{4}$ a $\dfrac{\pi}{3}$ porovnať?

Ž: *To nie je problém. Tretina celku, teda aj čísla* π*, je určite viac ako štrtina.*



U: Máš pravdu, $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{3}$. Aký je potom vzťah medzi funkčnými hodnotami $\sin\dfrac{\pi}{4}$ a $\sin\dfrac{\pi}{3}$?

Ž: *Hodnoty* $\sin\dfrac{\pi}{4}$ *a* $\sin\dfrac{\pi}{3}$ *predstavujú y-ové súradnice bodov A a B. Z obrázka je zrejmé, že* $y_A < y_B$*, a preto* $\sin\dfrac{\pi}{4} < \sin\dfrac{\pi}{3}$.

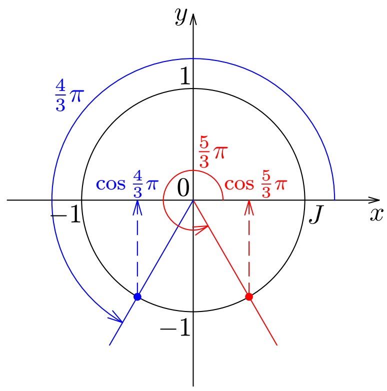
U: Zistil si, že výrok je ***pravdivý***. Ako argument na zdôvodnenie pravdivosti výroku si využil to, že funkcia sínus je na intervale $\left\langle 0; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$ ***rastúca***.

Ž: *Pri riešení úlohy po b) si taktiež pomôžem obrázkom. Najskôr ale určím, do ktorých kvadrantov patria body na jednotkovej kružnici, ktoré sú priradené číslam* $\dfrac{4\pi}{3}$ *a* $\dfrac{5\pi}{3}$.

$\dfrac{4\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3}$ *a to je III. kvadrant*

$\dfrac{5\pi}{3}$ *je viac, takže to je IV. kvadrant.*

U: Máš pravdu: $\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{6\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$.



Ž: *Ale kosínus je v III. kvadrante záporný a v IV. kvadrante kladný.*

U: To znamená, že $\cos\dfrac{4\pi}{3} < 0 < \cos\dfrac{5\pi}{3}$.

Ž: $\cos\dfrac{5\pi}{3} > \cos\dfrac{4\pi}{3}$. *Výrok je* **nepravdivý**.

Úloha 1: *Rozhodnite, či výrok je pravdivý:*

$$\sin 300^\circ > \sin 301^\circ.$$

Výsledok: výrok neplatí

Príklad 2: *Určte, v ktorých intervaloch sú funkcie sínus a kosínus súčasne rastúce.*

U: Uvažuj zatiaľ podmnožiny intervalu $\langle 0;\ 2\pi\rangle$.

Ž: *Sínus je rastúca na intervale* $\left\langle 0;\ \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$ *a na intervale* $\left\langle \dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right\rangle$.

Kosínus je rastúca na intervale $\left\langle \pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right\rangle$ *a na intervale* $\left\langle \dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right\rangle$.

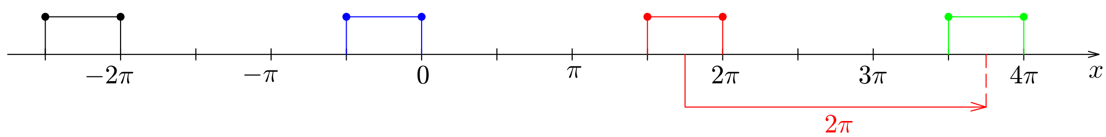
U: Aká je teda odpoveď na otázku?

Ž: *Obe funkcie sú súčasne rastúce na intervale* $\left\langle \dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right\rangle$.

U: Vzhľadom na periodickosť funkcií sínus a kosínus sa táto situácia bude opakovať aj v ďalších intervaloch.

Ž: *Interval* $\left\langle \dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right\rangle$ *sa posunie o celočíselné násobky čísla* 2π *doprava alebo doľava.*

U: Úlohe teda vyhovujú aj intervaly znázornené na číselnej osi:



U: Všeobecne sa každý z týchto intervalov dá zapísať v tvare:

$$\left\langle \frac{3\pi}{2} + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi \right\rangle,$$

kde k je celé číslo.

Ž: *Nedá sa povedať, že obe funkcie sú rastúce na zjednotení všetkých týchto intervalov?*

U: Nie. Periodickosť znamená, že hodnoty v posunutých intervaloch sa budú opakovať. Nie pre každú dvojicu x_1, x_2 zo zjednotenia intervalov by platila podmienka definície rastúcej funkcie:

$$\text{ak } x_1 < x_2, \text{ tak } f(x_1) < f(x_2).$$

Stačí zobrať napr. $x_1 = 2\pi$ a $x_2 = 4\pi$.

Platí síce, že 2π je menej ako 4π, ale $\sin 2\pi$ ako aj $\sin 4\pi$ je rovný nule a to odporuje definícií rastúcej funkcie. Preto riešením nie je zjednotenie intervalov, ale každý interval zvlášť.

Ž: *Aha, rozumiem. Riešením je teda každý z uzavretých intervalov*

$$\left\langle \frac{3\pi}{2} + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi \right\rangle,$$

kde k je celé číslo.

Úloha 2: *Určte, v ktorých intervaloch sú funkcie sínus a kosínus súčasne klesajúce.*

Výsledok: $\left\langle \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi \right\rangle$, kde k je celé číslo.

Príklad 3: *Pre ktoré reálne hodnoty parametra a má rovnica*

$$\sin x = \frac{1-a}{2}$$

s neznámou x v množine reálnych čísel aspoň jedno riešenie?

Ž: *Opäť parameter. Netuším ako to vyriešim.*

U: Iba zápis zadania úlohy vyzerá odstrašujúco. Jej riešenie nebude vôbec náročné. Skúsme najskôr pochopiť zápis zadanej rovnosti. Čo nám hovorí výraz na ľavej strane? Aké hodnoty môže nadobúdať, ak za neznámu x budeme dosadzovať ľubovoľné reálne čísla?

Ž: *No, sínus môže nadobúdať iba hodnoty* **od -1 do 1**.

U: To znamená, že pre každé reálne číslo x platí $-1 \leqq \sin x \leqq 1$, a teda aj pre tie x, ktoré sú riešením rovnice pri vhodnej voľbe parametra a na pravej strane.

A teraz výraz na pravej strane. Mala by rovnica riešenie pre neznámu x, ak by výraz $\frac{1-a}{2}$ na pravej strane rovnice mal hodnotu 2?

Ž: *To určite nie, veď sínus nemôže byť 2. On nemôže byť dokonca viac ako 1, ani menej ako -1. Chcete tým povedať, že aj výraz $\frac{1-a}{2}$* **musí mať hodnoty od -1 do 1**?

U: Pochopil si pointu úlohy. Začína tá jednoduchšia časť riešenia úlohy. Potrebuješ vyriešiť dve jednoduché nerovnice:

$$-1 \leqq \frac{1-a}{2} \leqq 1.$$

Ž: *Najskôr vyriešim prvú nerovnicu. Obe strany nerovnice vynásobím dvomi, potom odpočítam jedna. Pri násobení oboch strán nerovnice číslom -1 zmením znak nerovnosti.*

$$\boxed{\begin{aligned} -1 &\leqq \frac{1-a}{2} \\ -2 &\leqq 1-a \\ -3 &\leqq -a \\ 3 &\geqq a \end{aligned}}$$

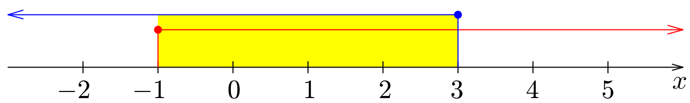
U: Násobenie oboch strán nerovnice záporným číslom si zvládol veľmi pekne. Riešením prvej nerovnice je teda interval $(-\infty;\ 3\rangle$. Vyrieš druhú nerovnicu.

Ž: *Budem riešiť analogicky. Vynásobím dvomi, odpočítam 1 a nakoniec vynásobím číslom -1. Pri poslednej úprave zmením znak nerovnosti.*

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1-a}{2} &\leqq 1 \\ 1-a &\leqq 2 \\ -a &\leqq 1 \\ a &\geqq -1 \end{aligned}}$$

Ž: *Riešením druhej nerovnice je interval* $\langle -1;\ \infty)$.

U: Obe nerovnice majú platiť súčasne, takže riešenie pre parameter nájdeme ako prienik získaných čiastkových riešení:



Ž: *Úlohe vyhovuje parameter* $a \in \langle -1;\ 3\rangle$.

Úloha 3: *Pre ktoré reálne hodnoty parametra a má rovnica*

$$\cos x = \frac{a+2}{a-3}$$

s neznámou x v množine reálnych čísel aspoň jedno riešenie?

Výsledok: $a \in \left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right\rangle$

Príklad 4: *Určte definičný obor funkcií:*

a) $f : y = \dfrac{3}{\sin x}$,

b) $g : y = \dfrac{\cos x}{\cos x - |\cos x|}$.

U: Aká podmienka musí platiť pre definičný obor funkcie, ktorej predpis obsahuje na pravej strane zlomok?

Ž: *V menovateli nesmie byť nula.*

U: Pre zadanú funkciu máme teda vyriešiť podmienku $\sin x \neq 0$. Inými slovami, z množiny reálnych čísel máme vylúčiť tie čísla x, pre ktoré $\sin x = 0$.

Ž: *Sínus sa rovná* 0 *pre* $x = k\pi$, *kde* k *je celé číslo.*

U: To znamená, že reálne čísla v tvare $k\pi$ do definičného oboru funkcie f nebudú patriť. Definičný obor funkcie f zapíšeme v tvare:

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

U: Úlohu po b) vyriešiš analogicky.

Ž: *Ale podmienka je zložitejšia:* $\cos x - |\cos x| \neq 0$.

S absolútnou hodnotou potrebujem pomôcť.

U: ***Absolútna hodnota*** je vždy nezáporné reálne číslo, pričom jej výpočet závisí od toho, či číslo, ktorého absolútnu hodnotu počítame, je nezáporné, alebo záporné.

Ž: *Rozlíšime teda dva prípady?*

U: Áno.
Podľa definície absolútnej hodnoty $|a| = a$, ak $a \geqq 0$ a $|a| = -a$, ak $a \leqq 0$. V našom prípade:

1. ak $\cos x \geqq 0$, tak $|\cos x| = \cos x$ a podmienka $\cos x - |\cos x| \neq 0$ sa zmení na tvar:

$$\cos x - \cos x \neq 0, \quad \text{po úprave} \quad 0 \neq 0.$$

Ž: *To nie je nikdy pravda. Teda také reálne čísla* x, *pre ktoré* $\cos x \geqq 0$, *do definičného oboru funkcie* g *nepatria.*

U: Ak $\cos x < 0$, tak $|\cos x| = -\cos x$. Pokračuj v riešení druhého prípadu.

Ž: *Podmienka* $\cos x - |\cos x| \neq 0$ *sa zmení na tvar:*

$$\cos x - (-\cos x) \neq 0$$

a po úprave:

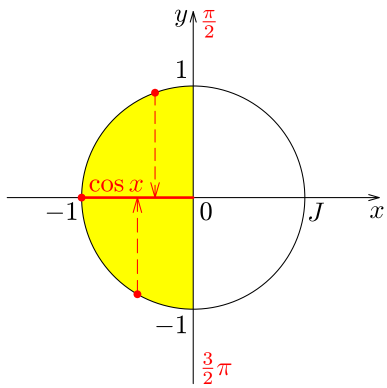
$$2\cos x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x \neq 0.$$

Mám vylúčiť tie reálne čísla, pre ktoré $\cos x = 0$ *a to sú nepárne násobky čísla* $\dfrac{\pi}{2}$.

U: Sú to čísla v tvare $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde k je celé číslo.

U: Zostáva ešte vyriešiť podmienku, pre ktoré reálne čísla x platí $\cos x < 0$.

Ž: *Pomôžem si jednotkovou kružnicou.*



Ž: $x \in \left(\frac{\pi}{2}\ \ \frac{3\pi}{2}\right)$

U: V predpoklade $\cos x < 0$ je ukrytá aj nerovnosť $\cos x \neq 0$, ktorú sme dostali po úpravách. Z toho dôvodu sme ju nemuseli riešiť. Pre úplné vyriešenie úlohy je nutné ešte zohľadniť, že funkcia kosínus je periodická s najmenšou periódou 2π.

Ž: *Interval* $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ *sa posúva o násobky periódy* 2π *doprava a doľava.*

U: Definičný obor môžeme zapísať v tvare, ktorý je uvedený v rámčeku.

$$\boxed{\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k\in Z} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)}$$

U: Je to zjednotenie nekonečného počtu intervalov, ktoré dostaneme, ak za k dosadíme všetky celé čísla.

Úloha 4: *Určte definičný obor funkcie:*

$$h : y = \frac{2\sin^2 x}{2-\cos x}.$$

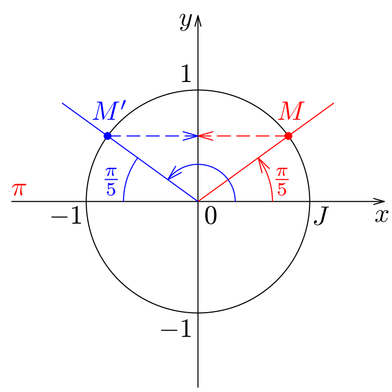
Výsledok: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

Príklad 5: *Určte všetky $x \in \langle 0; 2\pi)$, pre ktoré platí:*

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{5}.$$

Ž: *Tak túto úlohu vyriešim metódou kuknem a vidím: $x = \frac{\pi}{5}$.*

U: Je to síce jedno z riešení v uvedenom intervale, ale nie je jediné. Vráťme sa radšej k jednotkovej kružnici a geometrickej interpretácií funkcie sínus. Urob náčrt a vyznač približne hodnotu $\sin \frac{\pi}{5}$.



Ž: *Jasné. Pre sínus pracujem s y-ovými súradnicami bodov na jednotkovej kružnici, a takú istú y-ovú súradnicu ako bod M má aj bod M' v II. kvadrante.*

U: Dúfam, že nebude problémom, vyjadriť k tomuto bodu M' zodpovedajúce x.

Ž: *Vypočítam ho tak, že od hraničnej medze II. kvadrantu, čo je π, odrátam $\frac{\pi}{5}$:*

$$x = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}.$$

U: Riešením úlohy sú dve čísla $x \in \left\{\frac{\pi}{5}; \ \frac{4\pi}{5}\right\}$.

Úloha 5: *Určte všetky $x \in \langle 0; 2\pi)$, pre ktoré platí:*

$$\cos x = \cos \frac{14\pi}{5}.$$

Výsledok: $x \in \left\{\frac{4\pi}{5}; \ \frac{6\pi}{5}\right\}$

Príklad 6: *Porovnajte:*

$$\sin\frac{4\pi}{7} \quad a \quad \sin\frac{5\pi}{8}.$$

U: Je zrejmé, že obe hodnoty $\frac{4\pi}{7}$ a $\frac{5\pi}{8}$ argumentu sú menšie ako π; patia do intervalu $(0;\pi)$. Z hľadiska monotónnosti sa funkcia sínus nespráva v I. a II. kvadrante rovnako. Potrebujeme informáciu o intervale upresniť.

Ž: 4 *diely zo* 7 *je určite viac ako polovica, a to isté platí pre* 5 *dielov z* 8*. Hodnoty patria do intervalu* $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

U: Na to, aby sme porovnali $\sin\frac{4\pi}{7}$ a $\sin\frac{5\pi}{8}$, stačí nám porovnať argumenty $\frac{4\pi}{7}$ a $\frac{5\pi}{8}$, lebo na intervale $\left\langle\frac{\pi}{2};\ \pi\right\rangle$ je funkcia sínus klesajúca. Dokážeš ich porovnať?

Ž: *Zlomky* $\frac{4}{7}$ *a* $\frac{5}{8}$ *upravím na rovnakého menovateľa. Ten z nich bude väčší, ktorý má väčšieho čitateľa. Upravím:*

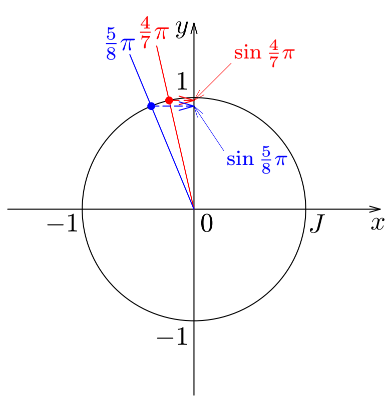
$$\frac{4}{7}=\frac{4}{7}\cdot\frac{8}{8}=\frac{32}{56} \qquad a \qquad \frac{5}{8}=\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{7}=\frac{35}{56},$$

čo je viac.

U: Zistil si, že $\frac{4\pi}{7}<\frac{5\pi}{8}$. Aký bude vzťah medzi hodnotami, ak vieme, že na uvažovanom intervale je funkcia sínus klesajúca?

Ž: *Opačný:* $\sin\frac{4\pi}{7}>\sin\frac{5\pi}{8}$.

U: Aj keď sme riešenie úlohy zvládli, pripomeniem, že ju môžeš riešiť aj využitím jednotkovej kružnice. To v prípade, ak si vlastnosť monotónnosti zabudol.



Ž: *Vlastne v obrázku ju opäť objavím.*

Úloha 6: *Porovnajte:*

$$\cos(-11) \qquad a \qquad \cos(-11{,}1).$$

Výsledok: $\cos(-11)<\cos(-11{,}1)$

Príklad 7: *Vypočítajte:*

$$\cos\left(-\frac{67\pi}{6}\right).$$

U: Využijeme párnosť funkcie kosínus, teda $\cos(-x) = \cos x$.

Ž: *V našom prípade* $\cos\left(-\frac{67\pi}{6}\right) = \cos\frac{67\pi}{6}$.

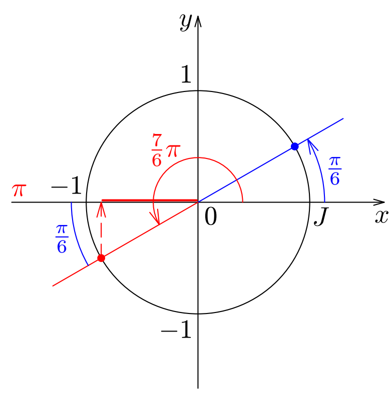
U: Keďže $\frac{67\pi}{6} \geqq 2\pi$, využijeme periodickosť. Číslo $\frac{67\pi}{6}$ zapíšeme v tvare súčtu násobku najmenšej periódy 2π a čísla $x_0 \in \langle 0;\ 2\pi)$.

Ž: *Zlomok* $\frac{60\pi}{6}$ *sa dá vyjadriť v tvare* 10π. *Toto číslo vyjadruje päťnásobok najmenšej periódy* 2π *funkcie kosínus:*

$$\cos\frac{67\pi}{6} = \cos\left(\frac{60\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(10\pi + \frac{7\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6}$$

U: Správne si použil periodickosť. Pripomeňme si, že hodnota $\cos\frac{7\pi}{6}$ bude súvisieť s hodnotou vo význačnom bode $\frac{\pi}{6}$. Znamienko plus, alebo mínus zohľadníme podľa toho do ktorého kvadrantu patrí $\frac{7\pi}{6}$.

Ž: $\frac{7\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$. *Je to* **III. kvadrant**. *Tam je* **kosínus záporný**.



U: Platí: $\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6}$, lebo $\cos x \leqq 0$ pre x z III. kvadrantu.

Ž: *Keďže* $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, *výsledok je* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Úloha 7: *Vypočítajte:* $\sin\left(-\frac{447\pi}{4}\right)$.

Výsledok: $\sin\left(-\frac{447\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$