Súčet a rozdiel hodnôt goniometrických funkcií

RNDr. Marián Macko

U: Vypočítajme hodnotu číselného výrazu $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ bez použitia kalkulačky a tabuliek.

Ž: *Budeme musieť použiť súčtové vzorce, lebo* 75° *a* 15° *nepatria medzi význačné hodnoty. Dajú sa však vyjadriť pomocou uhlov* 45° *a* 30°. *Uhol* 75 *stupňov sa vyjadrí ako súčet a uhol* 30 *stupňov ako rozdiel týchto význačných hodnôt. Preto platí*

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) + \sin(45^\circ - 30^\circ).$$

U: Pripomeniem ti tie súčtové vzorce, ktoré potrebuješ využiť:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

V našom prípade $x = 45^\circ$ a $y = 30^\circ$.

Ž: *Po dosadení dostávam*

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) + \sin(45^\circ - 30^\circ) = (\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ) +$$

$$+ (\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ).$$

Po odstránení zátvorky sa druhý a štvrtý člen navzájom odčítajú.

U: Dostali sme teda

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ.$$

U: Hodnotu tohto číselného výrazu už spočítame ľahko. Nebudeme to robiť. Pozrieme sa však na to, ako súvisia hodnoty 45° a 30° so zadanými hodnotami 75° a 15°.

Ž: *Hodnota* 45 *stupňov je polovicou zo súčtu zadaných hodnôt. Platí*

$$45^\circ = \frac{75^\circ + 15^\circ}{2}.$$

U: Hodnota 30 stupňov bude tiež polovicou, ale rozdielu zadaných hodnôt.

$$30^\circ = \frac{75^\circ - 15^\circ}{2}.$$

Ž: *Naša úloha by sa teda dala prepísať do tvaru*

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} .$$

U: Výborne. Ak číselné hodnoty v argumente funkcie sínus nahradíš premennými, napríklad α a β, dostávaš ďalší dôležitý vzťah

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Na základe tohto vzťahu vieme ***súčet*** dvoch hodnôt goniometrickej funkcie sínus prepísať v tvare ***súčinu***.

Ž: *Platí podobný vzťah aj pre rozdiel dvoch hodnôt goniometrickej funkcie sínus?*

U: Odvodíme ho ľahko z predchádzajúceho. Rozdiel $\sin\alpha - \sin\beta$ upravíme na súčet.

Ž: *Ako?*

U: Využijeme, že funkcie sínus je nepárna funkcia. Preto platí

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Ž: *Rozumiem. Potom môžem písať*

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin\alpha + \sin(-\beta).$$

U: Správne. Teraz stačí využiť vzťah

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Namiesto premennej β treba však všade dosadiť $-\beta$.

Ž: *Nebude to problém. Dostávam*

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin\alpha + \sin(-\beta) = 2\sin\frac{\alpha+(-\beta)}{2}\cos\frac{\alpha-(-\beta)}{2}.$$

Teraz budú znamienka vo výsledku opačne, ako boli v prvom vzťahu.

U: Preto platí

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Aj ***rozdiel*** dvoch hodnôt goniometrickej funkcie sínus sa dá vyjadriť v tvare ***súčinu*** hodnôt goniometrických funkcií sínus a kosínus.

Ž: *Oba vzťahy sú dosť náročné na zapamätanie si.*

U: Nie je dôležité ich vedieť naspamäť. Dôležité je vedieť ich využiť pri riešení úloh. Na záver v rámčeku zrekapitulujeme oba vzorce. Pridáme k nim analogické vzorce pre súčet a rozdiel hodnôt goniometrickej funkcie kosínus.

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha-\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\
\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}}$$

Príklad 1: *V množine reálnych čísel vyriešte rovnicu* $\sin 3x = \sin 2x - \sin x$.

Ž: *K výrazom na oboch stranách rovnice pripočítam výraz* $\sin x$. *Dostanem rovnicu v tvare*

$$\sin 3x + \sin x = \sin 2x.$$

U: Na úpravu výrazu $\sin 3x + \sin x$ na ľavej strane rovnice využijeme vzorec

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

V našom prípade α je rovné $3x$ a β je x.

Ž: *Potom rovnicu upravím na tvar*

$$2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = \sin 2x.$$

Po úprave zlomkov, ktoré sú v argumentoch funkcií sínus a kosínus, dostávam

$$2\sin 2x\cos x = \sin 2x.$$

U: Od výrazov na oboch stranách rovnice odčítame $\sin 2x$ a máme

$$2\sin 2x\cos x - \sin 2x = 0.$$

Ž: *Výraz* $\sin 2x$ *vyberieme pred zátvorku. Po tejto úprave dostaneme rovnicu*

$$\sin 2x(2\cos x - 1) = 0.$$

U: Kedy sa súčin dvoch výrazov rovná nule?

Ž: *Súčin dvoch výrazov sa rovná nule, ak aspoň jeden z výrazov má nulovú hodnotu.*

$$\sin 2x(2\cos x - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin 2x = 0 \;\vee\; 2\cos x - 1 = 0$$

U: Budeme teda riešiť dve rovnice. Najskôr vyriešme rovnicu $\sin 2x = 0$. Kedy funkcia sínus nadobúda nulovú hodnotu?

Ž: *Funkcia sínus nadobúda nulovú hodnotu, ak argument funkcie je celočíselným násobkom reálneho čísla* π.

U: V našom prípade je argumentom funkcie sínus výraz $2x$, preto platí: $2x = k\pi$, kde k je celé číslo. Po úprave dostávame $x = k\dfrac{\pi}{2}$.

U: Prejdeme k riešeniu druhej rovnice. Snaž sa upraviť druhú rovnicu $2\cos x - 1 = 0$ na výhodnejší tvar.

Ž: *Pripočítaním čísla jeden mám*

$$2\cos x = 1.$$

Po predelení dvomi dostanem rovnicu

$$\cos x = \frac{1}{2}.$$

Táto rovnica má jedno riešenie $x = \dfrac{\pi}{3}$.

U: Je to jedno z dvoch základných riešení, ktoré hľadáme v intervale $\langle 0;\ 2\pi)$. Vzhľadom na to, že funkcia kosínus je periodická a jej najmenšou periódou je číslo 2π, rovnica bude mať nekonečne veľa riešení.

Ž: *Ako nájdem druhé základné riešenie? Môžete mi to pripomenúť?*

U: Na určenie druhého základného riešenia rovnice využijeme geometrickú interpretáciu funkcie kosínus na jednotkovej kružnici. Spomínaš si, s ktorou súradnicou bodov na jednotkovej kružnici súvisí hodnota funkcie kosínus?

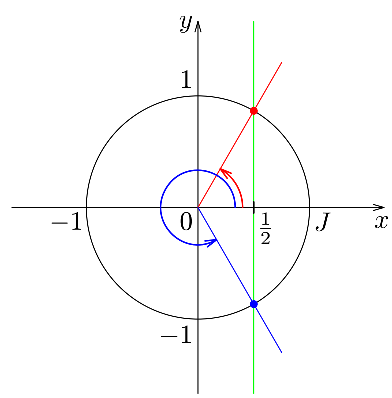
Ž: *Kosínus predstavuje* **x-ovú súradnicu** *bodu na jednotkovej kružnici.*

U: Nepovedal si to celkom presne, ale pokračuj vo výpočte.

Ž: *Hľadám také body na jednotkovej kružnici, ktorých x-ová súradnica je $\dfrac{1}{2}$, ako to vyplýva z rovnice* $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

U: Správne. V ktorých kvadrantoch ležia body, ktorých x-ová súradnica je rovná číslu $\dfrac{1}{2}$?

Ž: *V I. a vo IV. kvadrante, tak ako to je na obrázku.*



U: Ako vieme, tieto dva body na jednotkovej kružnici sú symetrické podľa x-ovej osi. Základnému riešeniu $\dfrac{\pi}{3}$ odpovedá bod v I. kvadrante. Preto hodnota argumentu funkcie kosínus zodpovedajúca bodu na jednotkovej kružnici vo IV. kvadrante sa vypočíta ako rozdiel čísel 2π a $\dfrac{\pi}{3}$.

Ž: *Odčítaním týchto čísel dostaneme zlomok* $\dfrac{5\pi}{3}$.

U: Určili sme teda všetky základné riešenia rovnice $\cos x = \dfrac{1}{2}$. Zohľadníme ešte periodicitu funkcie kosínus. Najmenšou periódou je číslo 2π. Teda všetky riešenia rovnice $2\cos x - 1 = 0$ môžeme vyjadriť v tvare $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ alebo v tvare $\dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$, kde k je celé číslo.

Ž: *To znamená, že množina koreňov zadanej rovnice sa dá zapísať tak, ako je to zapísané v rámčeku.*

$$\boxed{\mathcal{K} = \left\{ k\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Príklad 2: *V množine reálnych čísel vyriešte rovnicu* $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$.

U: Združíme prvé dva členy a posledné dva členy vo výraze $\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x$ na ľavej strane rovnice. V oboch prípadoch použijeme vzorec pre súčet hodnôt goniometrickej funkcie kosínus

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ž: *V prvom prípade je* α *rovné* $2x$ *a* $\beta = 4x$.

U: Keďže sčítanie je komutatívne, tak

$$\cos 2x + \cos 4x = \cos 4x + \cos 2x,$$

a vhodnejšie bude označiť uhly opačne

$$\alpha = 4x;\ \beta = 2x.$$

V ďalších úpravách sa vyhneme práci so záporným argumentom.

Ž: *Dobre. Podobne zamením poradie členov v poslednej dvojici sčítancov výrazu na ľavej strane. Dostávam*

$$(\cos 4x + \cos 2x) + (\cos 8x + \cos 6x) = 0.$$

Použijem dvakrát spomenutý vzorec a mám

$$2\cos\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2} + 2\cos\frac{8x+6x}{2}\cos\frac{8x-6x}{2} = 0.$$

U: Po úprave argumentov funkcie kosínus dostaneme

$$2\cos 3x\cos x + 2\cos 7x\cos x = 0.$$

Ž: *Pred zátvorku môžeme vybrať výraz* $2\cos x$. *Preto platí*

$$2\cos x(\cos 3x + \cos 7x) = 0.$$

U: Opäť zameníme poradie sčítancov v zátvorke, takže rovnica má tvar

$$2\cos x(\cos 7x + \cos 3x) = 0$$

a pre súčet hodnôt funkcie kosínus v zátvorke použijeme rovnaký vzorec. Dostávame

$$2\cos x\left(2\cos\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2}\right) = 0.$$

Ž: *To sa dá zjednodušiť na tvar*

$$4\cos x\cos 5x\cos 2x = 0.$$

U: Kedy sa súčin troch výrazov rovná nule?

Ž: *Súčin sa rovná nule, ak* $\cos x = 0$ *alebo* $\cos 5x = 0$ *alebo* $\cos 2x = 0$.

U: Výborne. Vyriešiť tieto tri rovnice už dúfam nebude problém. Začni prvou rovnicou $\cos x = 0$.

Ž: *Funkcia kosínus nadobúda nulovú hodnotu, ak argument* x *je* **nepárnym násobkom reálneho čísla** $\frac{\pi}{2}$. *To môžeme zapísať v tvare*

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}.$$

U: Tú istú myšlienku využijeme pri riešení rovnice $\cos 5x = 0$. Argumentom funkcie kosínus je však výraz $5x$. Preto platí

$$5x = (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vydelíme piatimi a pre neznámu x dostávame

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{10},$$

kde k je celé číslo.

Ž: *Podobne vyriešim aj poslednú rovnicu* $\cos 2x = 0$. *Hodnoty* $2x$ *musia byť rovné reálnemu číslu v tvare* $(2k+1)\frac{\pi}{2}$. *Neznáma* x *bude mať polovičnú hodnotu výrazu na pravej strane. Preto*

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{4}.$$

U: Riešením zadanej rovnice je množina $\mathcal{K}$, ktorá je zapísaná v rámčeku.

$$\boxed{\mathcal{K} = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\frac{\pi}{10},\ (2k+1)\frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Príklad 3: *Vypočítajte bez použitia kalkulačky:*

a) $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ =$,

b) $\dfrac{\cos 80^\circ + \cos 20^\circ}{\sin 110^\circ + \sin 10^\circ} =$.

U: Pre prvú dvojicu sčítancov v číselnom výraze $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ$ využijeme vzorec

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ž: *V našom prípade* $\alpha = 85^\circ$ *a* $\beta = 35^\circ$. *Dosadím a dostávam*

$$\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ = 2\cos\frac{85^\circ + 35^\circ}{2}\cos\frac{85^\circ - 35^\circ}{2} - \cos 25^\circ.$$

U: Po sčítaní, respektíve odčítaní a vydelení dvomi to upravíme na tvar

$$2\cos 60^\circ \cos 25^\circ - \cos 25^\circ.$$

Ž: *Ale kosínus* 60 *stupňov je jedna polovica. Po dosadení teda mám*

$$2\cdot\frac{1}{2}\cos 25^\circ - \cos 25^\circ.$$

Výsledok je nula, lebo $2\cdot\frac{1}{2} = 1$ *a teda kosínusy sa odčítajú.*

U: Máš pravdu. Hodnota zadaného číselného výrazu $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ$ je rovná nule.

Ž: *Predpokladám, že ten istý vzorec použijeme aj v úlohe b) pri úprave výrazu v čitateli zlomku* $\dfrac{\cos 80^\circ + \cos 20^\circ}{\sin 110^\circ + \sin 10^\circ}$. *Preto dostávam*

$$\frac{\cos 80^\circ + \cos 20^\circ}{\sin 110^\circ + \sin 10^\circ} = \frac{2\cos\frac{80^\circ + 20^\circ}{2}\cos\frac{80^\circ - 20^\circ}{2}}{\sin 110^\circ + \sin 10^\circ}.$$

Ako sa však upraví súčet hodnôt funkcie sínus pre dva rôzne argumenty?

U: Pre súčet hodnôt sínusov v menovateli zlomku použijeme vzorec

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Uhol α je 110 stupňov a β sa rovná 10 stupňom. Dosadíme a dostávame

$$\frac{2\cos\frac{80^\circ + 20^\circ}{2}\cos\frac{80^\circ - 20^\circ}{2}}{2\sin\frac{110^\circ + 10^\circ}{2}\cos\frac{110^\circ - 10^\circ}{2}}.$$

Ž: *Po úprave všetkých zlomkov, ktoré sú argumentami funkcií sínus a kosínus, môžeme písať:*

$$\frac{2\cos 50^\circ \cos 30^\circ}{2\sin 60^\circ \cos 50^\circ}\,.$$

U: Výraz $2\cos 50^\circ$ vykrátime a máme zlomok

$$\frac{\cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}\,.$$

Dopočítaj.

Ž: *Hodnota kosínus pre* 30 *stupňov je* $\frac{\sqrt{3}}{2}$*. Ale tú istú hodnotu dostaneme aj pre sínus* 60 *stupňov. Preto výsledkom úlohy b) bude číslo jedna.*

$$\frac{\cos 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1.$$

U: To znamená, že

$$\frac{\cos 80^\circ + \cos 20^\circ}{\sin 110^\circ + \sin 10^\circ} = 1.$$

Príklad 4: *Upravte na súčin:*
a) $\sin 3y + \sin y$,
b) $\cos x - \sin x$.

U: Pri riešení prvej časti úlohy využijeme vzorec pre súčet ***hodnôt funkcie sínus*** dvoch rôznych argumentov

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Urči α a β pre náš prípad.

Ž: *V našom prípade platí* $\alpha = 3y$ *a* β *je* y.

U: Využi vzorec a dosaď.

Ž: *Výraz* $\sin 3y + \sin y$ *upravím na tvar*

$$2\sin\frac{3y+y}{2}\cos\frac{3y-y}{2}.$$

U: Ak zlomky v argumentoch funkcií upravíme, tak dostaneme výraz

$$2\sin 2y\cos y,$$

čo sa žiadalo.
Zaujímavosťou tejto úlohy je, že v úprave na súčin ešte môžeme pokračovať. Ako sa dá vyjadriť výraz $\sin 2y$?

Ž: *Použijem vzorec pre dvojnásobný argument*

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

U: My máme výraz $\sin 2y$, takže dostávame

$$2\sin 2y\cos y = 2\cdot 2\sin y\cos y\cos y.$$

Ž: *Vynásobím dvojky a kosínusy. Výsledok bude*

$$4\sin y\cos^2 y.$$

U: Aby sme aj výraz $\cos x - \sin x$ v úlohe b) upravili na súčin hodnôt goniometrických funkcií, musíme najskôr hodnotu funkcie kosínus vyjadriť pomocou hodnoty funkcie sínus. Vieme, že platí

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Ž: *Takže budeme upravovať výraz*

$$\cos x - \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x.$$

U: Využijeme vzorec pre rozdiel hodnôt goniometrickej funkcie sínus, ktorý má tvar

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Urči hodnoty α a β.

Ž: *Uhol α je rovný výrazu $\frac{\pi}{2} - x$ a $\beta = x$.*

U: Dosadíme teda do vzorca a dostávame

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x = 2\cos\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + x}{2}\sin\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - x}{2}.$$

V argumente funkcie kosínus sa členy s premennou x nulujú a v argumente funkcie sínus sa sčítajú. Takže

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x = 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\frac{\pi}{2} - 2x}{2}.$$

Ž: *Hodnota funkcie kosínus pre reálne číslo $\frac{\pi}{4}$ je $\frac{\sqrt{2}}{2}$, preto dostávame*

$$2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2} - 2x}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2} - 2x}{2}\ .$$

U: Zložený zlomok v argumente funkcie sínus rozdelíme na dva členy a upravíme na tvar

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Ž: *Teda výsledok úlohy je*

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Príklad 5: *Načrtnite graf funkcie $f : y = \cos x + \sin x$.*

Ž: *Načrtol by som si v jednom obrázku grafy funkcií kosínus a sínus. Pre niekoľko hodnôt premennej x by som grafickým sčítaním získal hodnotu súčtu $\cos x + \sin x$.*

U: Je to jedna z metód riešenia úlohy. Ukážeme si však inú. Najskôr sa pokúsime predpis funkcie zjednodušiť. Tak, aby v ňom figurovala iba jedna goniometrická funkcia.

Ž: *Viem, že sa hodnota funkcie sínus dá prepísať pomocou hodnoty funkcie kosínus, lebo platí*

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Preto predpis funkcie viem upraviť na tvar

$$y = \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

U: Súčet hodnôt goniometrickej funkcie kosínus sa dá upraviť na súčin podľa vzorca

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

V našom prípade $\alpha = x$ a $\beta = \frac{\pi}{2} - x$.

Ž: *Dosadím do vzorca a dostávam*

$$y = 2\cos\frac{x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}\cos\frac{x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}.$$

U: Upravíme argumenty funkcie kosínus odstránením zátvoriek. Sčítame, respektíve odčítame a máme

$$2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{2x - \frac{\pi}{2}}{2}.$$

Uprav zložený zlomok, ktorý je argumentom druhého činiteľa v súčine.

Ž: *Výraz $\frac{2x - \frac{\pi}{2}}{2}$ rozdelím na dva zlomky. Dostanem výsledok $x - \frac{\pi}{4}$. Predpis funkcie bude mať tvar*

$$y = 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

U: Hodnota funkcie kosínus pre reálne číslo $\frac{\pi}{4}$ je známa. Rovná sa číslu $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dosadíme a dostávame

$$y = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Ž: *Dvojky vykrátime. Predpis zadanej funkcie bude mať teda tvar*

$$f : y = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

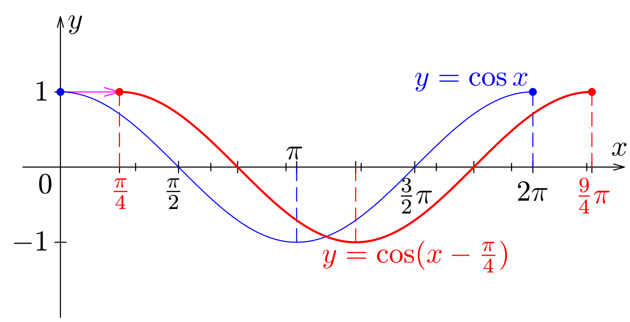
U: Východiskom pre načrtávanie grafu bude graf funkcie $y = \cos x$. Ako z neho získame graf funkcie $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$?

Ž: *Viem, že sa pôvodný graf* **posunie pozdĺž osi** x, *ale neviem si zapamätať, do ktorej strany.*

U: Argumentom funkcie je teraz výraz $x - \dfrac{\pi}{4}$. Ak je hodnota argumentu rovná nule, funkčná hodnota je rovná číslu 1. Kedy sa výraz $x - \dfrac{\pi}{4}$ rovná nule?

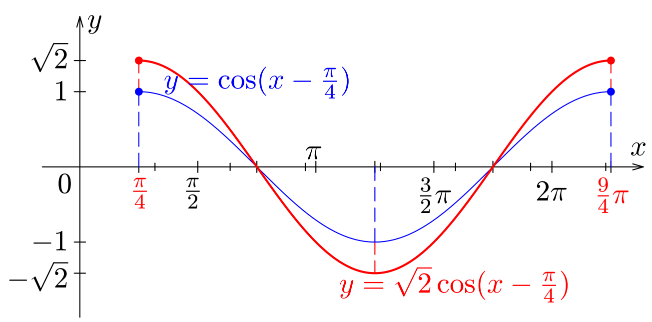
Ž: *Ak premenná x je rovná číslu* $\dfrac{\pi}{4}$.

U: A tým je to celé vysvetlené. Bod pôvodného grafu, ktorý má súradnice $[0;\ 1]$ sa posunul do bodu o súradniciach $\left[\dfrac{\pi}{4};\ 1\right]$. Celý graf sa posunie ***doprava*** o $\dfrac{\pi}{4}$.



Ž: *Prejsť od tohto grafu k výslednému grafu funkcie* $y = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ *je už ľahké. Všetky hodnoty z grafu funkcie* $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ *vynásobíme číslom* $\sqrt{2}$. *Zmení sa* **amplitúda**.

U: Oborom hodnôt zadanej funkcie bude teda uzavretý interval $\langle -\sqrt{2};\ \sqrt{2}\rangle$.



Príklad 6: *V množine reálnych čísel vyriešte rovnicu* $\cos x = \sin 3x$.

U: Rovnicu upravíme na anulovaný tvar. Od výrazov na oboch stranách rovnice odčítame výraz $\sin 3x$. Dostaneme rovnicu

$$\cos x - \sin 3x = 0.$$

Potrebujeme prejsť k rovnici, kde bude hodnota iba jednej goniometrickej funkcie.

Ž: *Hodnotu funkcie kosínus nahradím funkciou sínus. Argumentom bude výraz* $\frac{\pi}{2} - x$, *lebo platí*

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

U: Rozdiel hodnôt funkcie sínus v rovnici

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin 3x = 0$$

nahradíme súčinom podľa vzorca

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Urči najskôr α a β.

Ž: *V našom prípade* $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$ *a* $\beta = 3x$. *Dosadím a dostávam*

$$2\cos\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3x}{2}\sin\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 3x}{2} = 0.$$

U: Výraz $\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3x}{2}$, ktorý je argumentom funkcie kosínus, môžeme po odstránení zátvoriek upraviť na tvar

$$\frac{\frac{\pi}{2} + 2x}{2} = \frac{\pi}{4} + x.$$

Ž: *Analogicky upravím aj výraz* $\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 3x}{2}$, *ktorý je argumentom funkcie sínus. Dostávam*

$$\frac{\frac{\pi}{2} - 4x}{2} = \frac{\pi}{4} - 2x.$$

U: Tieto upravené výrazy dosadíme za argumenty funkcií kosínus a sínus. Zadaná rovnica bude mať po úpravách tvar

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0.$$

U: Kedy sa súčin dvoch výrazov rovná nule?

Ž: *Súčin dvoch výrazov je nula, ak jeden alebo druhý výraz má nulovú hodnotu:*

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0 \ \vee \ \sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0.$$

U: Pri riešení prvej rovnice si vystačíme s vedomosťou, kedy sa hodnota funkcie kosínus rovná ***nule***.

Ž: *Funkcia kosínus nadobúda nulovú hodnotu, ak argument funkcie je* **nepárnym násobkom čísla** $\frac{\pi}{2}$.

U: V prípade rovnice $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$ musia byť hodnoty výrazu $\frac{\pi}{4}+x$ rovné nepárnym násobkom reálneho čísla $\frac{\pi}{2}$. Platí

$$\frac{\pi}{4}+x=(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

kde k je celé číslo. Vyjadri neznámu x.

Ž: *Odčítam zlomok* $\frac{\pi}{4}$ *a dostávam*

$$x=-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

U: Riešenie druhej rovnice $\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0$ bude analogické. Tu si všimneme, kedy funkcia sínus nadobúda nulové hodnoty.

Ž: *Je to vtedy, keď argument funkcie je* **celočíselným násobkom reálneho čísla** π. *Teda*

$$\frac{\pi}{4}-2x=k\pi.$$

U: Opäť vyjadríme neznámu x. Najskôr odčítame číslo $\frac{\pi}{4}$, čím dostaneme

$$-2x=-\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Nakoniec vydelíme číslom -2 a máme

$$x=\frac{\pi}{8}-k\frac{\pi}{2}.$$

Ž: *Ak zhrnieme oba prípady, riešením zadanej rovnice bude množina čísel v tvare uvedenom v rámčeku.*

$$\boxed{\mathcal{K}=\left\{-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{8}-k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

Príklad 7: *Zjednodušte výraz* $\cos(\alpha + 30°) - \cos(\alpha - 30°)$.

U: Ukážeme si dva spôsoby riešenia zadanej úlohy. Zápis výrazu vnucuje myšlienku použiť súčtové vzorce.

Ž: *Pre hodnotu kosínus zo súčtu dvoch uhlov platí*

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Pre kosínus rozdielu dvoch uhlov platí analogický vzorec. Medzi členmi na pravej strane bude znamienko plus.

U: Urči hodnoty premenných a a b v našom prípade.

Ž: *Uhol* a *je v našom prípade rovný* α. *Zároveň platí* $b = 30°$.

U: Dosaď do súčtových vzorcov a uprav.

Ž: *Po dosadení a využití súčtových vzorcov dostanem*

$$\cos(\alpha + 30°) - \cos(\alpha - 30°) = \cos\alpha \cos 30° - \sin\alpha \sin 30° - (\cos\alpha \cos 30° + \sin\alpha \sin 30°).$$

U: Odstránime zátvorky a máme

$$\cos\alpha \cos 30° - \sin\alpha \sin 30° - \cos\alpha \cos 30° - \sin\alpha \sin 30°.$$

Prvý a tretí člen sa odčítajú. Zvyšné dva členy sú rovnaké, preto dostaneme

$$-2 \sin\alpha \sin 30°.$$

Ž: *Hodnota funkcie sínus pre* 30 *stupňov je rovná číslu* $\frac{1}{2}$. *Dosadíme, vykrátime dvojky a dostaneme výsledok* $-\sin\alpha$. *Teda*

$$\cos(\alpha + 30°) - \cos(\alpha - 30°) = -\sin\alpha.$$

U: Výborne.

U: Druhý spôsob riešenia bude založený na vzorci pre rozdiel hodnôt goniometrickej funkcie kosínus, t. j.

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Urči premenné x a y pre naše zadanie úlohy.

Ž: *Premenná* x *je v našom prípade výraz* $\alpha + 30°$ *a* $y = \alpha - 30°$.

U: Dosadíme do spomenutého vzorca a dostávame

$$\cos(\alpha + 30°) - \cos(\alpha - 30°) = -2 \sin \frac{(\alpha + 30°) + (\alpha - 30°)}{2} \sin \frac{(\alpha + 30°) - (\alpha - 30°)}{2}.$$

Uprav argumenty.

Ž: *V prvom prípade sa odčítajú uhly veľkosti* 30 *stupňov. Zostane dvojnásobok uhla* α *delený dvomi, teda uhol* α. *V druhom prípade sa odčítajú uhly* α. *Zvyšok dá hodnotu* 30 *stupňov. Po úprave máme*

$$-2\sin\alpha\sin 30^\circ.$$

U: Dosadíme hodnotu sínus pre 30 stupňov, čo je reálne číslo $\frac{1}{2}$ a dostávame ten istý výsledok, ako v prvej metóde riešenia úlohy. Teda

$$\cos(\alpha+30^\circ)-\cos(\alpha-30^\circ)=-\sin\alpha.$$

Úloha : *Zjednodušte výraz* $\dfrac{\sin\left(x+15^\circ\right)+\sin\left(x-15^\circ\right)}{\cos\left(x-15^\circ\right)+\cos\left(x+15^\circ\right)}$.

Výsledok: $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$