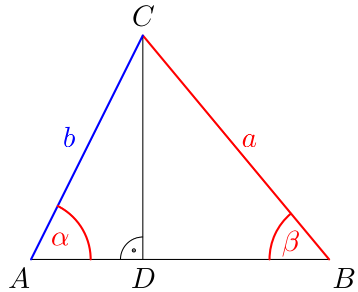
Sínusová veta

RNDr. Marián Macko

U: Uvažujme ostrouhlý trojuholník ABC. Predpokladajme, že v tomto trojuholníku poznáme uhly α a β, ako aj dĺžku strany a. Našou úlohou je vypočítať dĺžku strany b. Pri výpočte si pomôžeme výškou v_c na stranu c.



Ž: *Výška rozdelila trojuholníka ABC na pravouhlé trojuholníky ADC a BDC. V oboch trojuholníkoch je pravý uhol pri vrchole D. Netuším však, akým spôsobom mám vyjadriť dĺžku strany b.*

U: V pravouhlých trojuholníkoch vieme vyjadriť goniometrické funkcie ostrého uhla tohto trojuholníka. V trojuholníku ADC daj do súvisu strany b, v_c a uhol α.

Ž: *Strana b je preponou a strana v_c protiľahlou odvesnou k uhlu α. Použijem funkciu sínus. Preto platí*

$$\sin\alpha = \frac{v_c}{b}.$$

U: Podobne vyjadríme funkciu sínus pre uhol β v trojuholníku BDC.

Ž: *Teraz je preponou strana a, protiľahlou odvesnou je opäť výška v_c na stranu c. Dostávame*

$$\sin\beta = \frac{v_c}{a}.$$

U: Z oboch vzťahov vyjadríme výšku v_c na stranu c. V prvom prípade dostávame

$$v_c = b\sin\alpha.$$

Ž: *V druhom prípade platí*

$$v_c = a\sin\beta.$$

Ale je to tá istá výška v_c na stranu c v trojuholníku ABC.

U: Z toho dôvodu sa výrazy na pravých stranách týchto vyjadrení musia rovnať

$$b\sin\alpha = a\sin\beta.$$

Ž: *Dĺžku strany b získame, ak výrazy na oboch stranách rovnice vydelíme výrazom $\sin\alpha$. Dostávame*

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

U: Máš pravdu. Vzťah $b \sin\alpha = a \sin\beta$ môžeme však upraviť aj iným spôsobom. Rovnicu vydelíme oboma výrazmi obsahujúcimi funkciu sínus.

Ž: *Získame vzťah*

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Nebude platiť to isté aj pre stranu c a uhol γ?

U: Myšlienka odvádzania by sa vôbec nezmenila, ak by sme zobrali ktorékoľvek iné ***dva uhly a k nim protiľahlé strany***. Výsledný vzťah, ktorý si zapísal, je matematickým vyjadrením ***sínusovej vety***. Platí aj pre podiel dĺžky strany c a sínusu protiľahlého uhla γ.

Ž: **Sínusová veta** *pre ostrouhlý trojuholník sa teda dá zapísať v tvare*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

U: ***Sínusová veta*** platí pre akýkoľvek trojuholník: ***V ľubovoľnom trojuholníku je pomer dĺžky strany a sínusu uhla protiľahlého k strane konštantný.***

Ž: *Ak je tento pomer konštantný, čomu je rovný?*

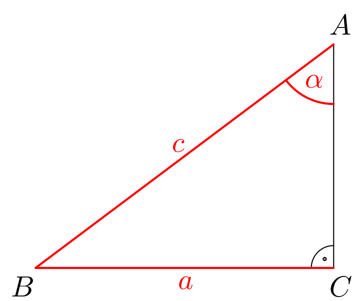
U: Tento pomer je rovný ***dvojnásobku polomeru*** kružnice trojuholníku opísanej.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

kde r je polomer kružnice trojuholníku opísanej.

Ž: *Platí sínusová veta aj pre pravouhlý trojuholník?*

U: Vyskúšaj.



Ž: *Nech trojuholník ABC má pravý uhol pri vrchole C. Zoberiem iba pomer*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Uhol γ má veľkosť 90 stupňov. Vtedy je sínus rovný jednej. Po dosadení dostávam

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{1}\ .$$

U: Posledný vzťah skús vyjadriť v inom tvare. Tak, aby si v ňom objavil niečo nám už známe.

Ž: *Vyjadrím sínus uhla α:*

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\ .$$

Ale takto sme definovali funkciu sínus v pravouhlom trojuholníku.

U: Niekedy sa sínusová veta zapíše aj v tvare

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Teraz vyjadruje, že v ľubovoľnom trojuholníku je ***pomer dĺžok strán*** je ***rovnaký*** ako ***pomer sínusov protiľahlých uhlov***.

Ž: *Nemôžem zapísať sínusovú vetu aj v takomto tvare*

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}?$$

U: Tento tvar vyjadrenia je vhodný v prípade, že máme vypočítať veľkosť niektorého z vnútorných uhlov.

Ž: *Čo teda musíme mať zadané v trojuholníku, aby sme mohli použiť sínusovú vetu?*

U: Pozri sa ešte raz na zápis sínusovej vety. Napríklad na rovnosť prvých dvoch zlomkov

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Z dvoch strán a dvoch uhlov môže byť pre výpočet neznámy iba jeden prvok trojuholníka.

Ž: *Čiže poznáme buď dve strany a jeden uhol alebo dva uhly a jednu stranu.*

U: Máš pravdu. Sú ***dva prípady***, keď použijeme sínusovú vetu. Poznáme ***dve strany a uhol oproti jednej z nich***. Vtedy vypočítame ***uhol oproti druhej zadanej strane***.

Ž: *Druhý prípad bude, ak poznáme* **dva uhly a stranu oproti jednému z nich**. *Vypočítame* **stranu oproti druhému uhlu**.

U: Ak poznáš dva uhly, nepoznáš aj tretí uhol?

Ž: *Jasné. Veď súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je* 180 *stupňov.*

U: Teda v druhom prípade môže byť zadaná ktorákoľvek strana. Nemusí byť oproti jednému z dvoch zadaných uhlov.

Ž: *Ak by bola oproti neznámemu uhlu, tak si tento uhol najskôr vypočítam.*

U: Pozrieme sa ešte raz na sínusovú vetu v tvare

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Predpokladajme že medzi stranami a a b trojuholníka platí vzťah $a < b$. Vieme porovnať veľkosti uhlov α a β?

Ž: *Ak sa dva zlomky majú rovnať, pričom prvý zlomok má menšieho čitateľa ako druhý zlomok, musí to isté platiť aj pre menovatele zlomkov. Teda*

$$\sin\alpha < \sin\beta.$$

U: Výborne. Ako ďalej vieme, funkcia sínus je rastúca. Preto je $\alpha < \beta$.
Dostali sme: ak $a < b$, tak $\alpha < \beta$. Sínusová veta je zároveň vyjadrením vlastnosti: ***oproti väčšej strane v trojuholníku je väčší uhol, oproti väčšiemu uhlu je väčšia strana***.

Ž: *To znamená, že sa môžem kontrolovať, či v riešení úlohy nemám chybu.*

U: Pochopil si správne. Vždy máme možnosť porovnať číselné hodnoty pre dĺžky strán a veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka. Medzi stranami nemôže byť iný vzťah ako medzi uhlami, a naopak.

Príklad 1: *Vypočítajte dĺžky zvyšných strán a uhlov v trojuholníku ABC, ak je dané $c = 20$ cm, $\alpha = 45°$, $\gamma = 30°$.*

U: Najskôr vypočítame dĺžku strany, ktorá je protiľahlá k uhlu α. Využijeme ***sínusovú vetu***.

Ž: *Zo vzťahu*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

vyjadrím dĺžku strany a. Vynásobím výrazom $\sin\alpha$ a dostávam

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

U: Po dosadení zadaných hodnôt vieme dĺžku strany a vyjadriť v tvare

$$a = \frac{20\sin 45°}{\sin 30°}.$$

Ž: *Sínus pre uhol 45 stupňov je rovný reálnemu číslu $\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

U: Sínus pre 30 stupňov je jedna polovica. Dosaď a uprav.

Ž: *Po dosadení dostávam*

$$a = \frac{20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}.$$

Dvojky v menovateľoch sa vykrátia.

U: Strana a má dĺžku $\sqrt{2} \cdot 20$ cm. Zostáva nám vypočítať dĺžku strany b a veľkosť uhla β. Čím začneš?

Ž: *Veľkosť uhla β vypočítam zo* **súčtu veľkostí vnútorných uhlov** *v trojuholníku. Vieme, že platí*

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Z tohto vzťahu pre uhol β dostávam

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma.$$

Dosadím zadané hodnoty $\alpha = 45°$ a $\gamma = 30°$.

U: Uhol β má teda veľkosť 105 stupňov. Dĺžku strany b vypočítame analogicky, ako sme počítali dĺžku strany a.

Ž: *Zo sínusovej vety teraz zoberiem rovnosť*

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Stačí vynásobiť výrazom $\sin\beta$ a dostávam

$$b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

U: Dosadíme hodnoty $c = 20$ cm, $\beta = 105^\circ$, $\gamma = 30^\circ$

$$b = \frac{20 \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}.$$

U: Ak chceme dostať presný výsledok, tak na výpočet hodnoty $\sin 105^\circ$ využijeme súčtový vzorec.

Ž: *To mi budete musieť pripomenúť.*

U: Uhol veľkosti 105 stupňov napíšeme ako súčet hodnôt 60 a 45. Súčtový vzorec pre hodnotu funkcie sínus súčtu dvoch argumentov má tvar

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

V našom prípade je $x = 60^\circ$ a $y = 45^\circ$.

Ž: *Preto dĺžka strany b bude*

$$b = \frac{20 \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{20(\sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ)}{\sin 30^\circ}.$$

U: Hodnoty goniometrických funkcií pre všetky argumenty vyskytujúce sa vo vyjadrení strany b poznáme. Dosadíme a upravíme zložený zlomok

$$b = \frac{20\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{20\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{1}{2}}.$$

Pokračuj v úpravách.

Ž: *V čitateli vyberiem pred zátvorku zlomok $\frac{1}{4}$. V zátvorke zostane číselný výraz $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.*

$$b = \frac{20 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\frac{1}{2}}.$$

Vynásobením čísel 20 a $\frac{1}{4}$ dostanem číslo 5.

U: Zároveň číslo dva z menovateľa zlomku v menovateli zloženého zlomku sa dostane do čitateľa zjednodušeného zlomku

$$\frac{20 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\frac{1}{2}} = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot 2 = 10(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

A to je presné vyjadrenie dĺžky strany b v centimetroch.

Príklad 2: *Vypočítajte dĺžky zvyšných strán a uhlov v trojuholníku* ABC*, ak je dané* $a = 10\,\text{cm}$, $b = 10\sqrt{2}\,\text{cm}$, $\alpha = 30^\circ$.

Ž: *Poznáme dve strany v trojuholníku a uhol oproti jednej z nich. Najskôr vypočítame uhol oproti druhej strane. Teda uhol* β.

U: Na výpočet použijeme ***sínusovú vetu***

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}.$$

Všetky hodnoty, až na veľkosť uhla β, poznáme. Dosaď a vypočítaj uhol β.

Ž: *Po dosadení dostanem goniometrickú rovnicu*

$$\frac{\sin\beta}{10\sqrt{2}} = \frac{\sin 30^\circ}{10}.$$

Viem, že sínus 30 *stupňov je jedna polovica. Rovnicu vynásobím reálnym číslom* $10\sqrt{2}$. *Preto pre uhol* β *platí*

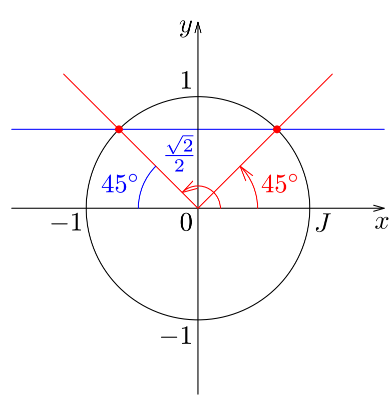
$$\sin\beta = \frac{10\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{10}.$$

U: Vykrátime reálne číslo 10 a dostaneme goniometrickú rovnicu v tvare

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ž: *Sínus nadobúda hodnotu* $\frac{\sqrt{2}}{2}$, *ak uhol* β *má veľkosť* 45 **stupňov**.

U: Pozor! Rovnica $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ má dve základné hodnoty riešenia. Okrem ***ostrého uhla*** je riešením rovnice aj ***tupý uhol***. Pozri obrázok.



Ž: *Na to by som bol zabudol. Riešením je teda aj hodnota, ktorú dostanem odrátaním* 45 *stupňov od* 180 *stupňov.*

$$\beta_2 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

U: Keďže dĺžka strany b je podľa zadania väčšia ako dĺžka strany a, musí byť aj veľkosť uhla β väčšia ako veľkosť uhla α. Pre obe riešenia $\beta_1 = 45^\circ$ ***a*** $\beta_2 = 135^\circ$ to platí. Navyše, v oboch prípadoch je súčet veľkostí uhlov α a β menší ako 180 stupňov. Môžeme tak dopočítať veľkosť uhla γ.

Ž: *Viem, že súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je* 180 *stupňov. Preto uhol* γ *vypočítam podľa vzťahu*

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Pre prvé riešenie $\beta_1 = 45^\circ$ *dostávam*

$$\gamma_1 = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ.$$

U: Pre druhé riešenia $\beta_2 = 105^\circ$ dostaneme

$$\gamma_2 = 180^\circ - 30^\circ - 135^\circ = 15^\circ.$$

Zostáva nám v oboch prípadoch vypočítať dĺžku strany c. Na jej výpočet využijeme opäť sínusovú vetu, napríklad v tvare

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Ž: *Pre hodnotu* $\gamma_1 = 105^\circ$ *po dosadení dostávam*

$$\frac{c_1}{\sin 105^\circ} = \frac{10}{\sin 30^\circ}.$$

Hodnota sínus pre uhol 30 *stupňov je jedna polovica. Ako však určím hodnotu sínus pre* 105 *stupňov?*

U: Použijeme kalkulačku. Dostaneme tak približnú hodnotu dĺžky strany c.

$$c_1 = \frac{10\sin 105^\circ}{0{,}5} \approx 19{,}32 \text{ cm.}$$

Vypočítaj dĺžku strany c pre hodnotu uhla $\gamma = 15^\circ$.

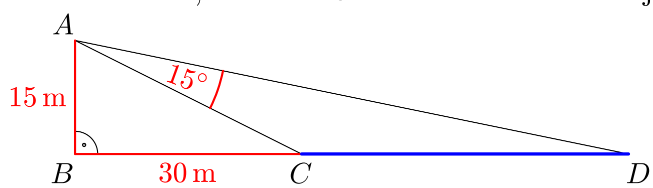
Ž: *Výpočet bude podobný. Akurát namiesto hodnoty* 105 *stupňov dosadím hodnotu* 15 *stupňov.*

$$c_2 = \frac{10\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{10\sin 15^\circ}{0{,}5} \approx 5{,}18 \text{ cm.}$$

U: Úloha nie je teda jednoznačná. Má dve riešenia.

Príklad 3: *Z veže vysokej* 15 m *a vzdialenej od rieky* 30 m *je vidieť šírku rieky pod uhlom* 15°. *Aká široká je rieka v tomto mieste?*

U: Najskôr načrtneme obrázok. Označíme v ňom vrchol veže ako bod A, pätu veže ako bod B, breh rieky, korý je bližšie k veži, ako bod C a nakoniec vzdialenejší breh rieky ako bod D.



U: Ktoré úsečky a uhly podľa zadania poznáme?

Ž: *Poznáme dĺžku úsečky AB. Tá je* 15 *metrov, lebo to je výška veže. Dĺžka úsečky BC je* 30 *metrov a poznáme ešte veľkosť uhla $\sphericalangle CAD$, čo je* 15 *stupňov. Chceme vypočítať* **dĺžku úsečky** *CD.*

U: Na jej výpočet použijeme trojuholník ACD, v ktorom zatiaľ poznáme iba jeden uhol.

Ž: *Ale z pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole B vieme vypočítať dĺžku úsečky AC, ktorá je spoločná obom trojuholníkom. Na jej výpočet použijem* **Pytagorovu vetu**

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2.$$

U: Dĺžka strany AC bude

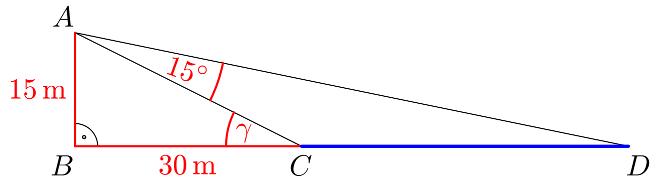
$$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2}.$$

Dosadíme číselné hodnoty a využijeme súvis medzi mocninanami čísel 15 a 30. Čiastočne odmocníme

$$|AC| = \sqrt{15^2 + 30^2} = \sqrt{15^2 + (2 \cdot 15)^2} = \sqrt{15^2 + 4 \cdot 15^2} = \sqrt{15^2 \cdot (1+4)} = 15\sqrt{5}.$$

Ž: *Dobre, dĺžka strany AC v trojuholníku ACD je rovná $15\sqrt{5}$. Ako však určíme niektorý zo zvyšných uhlov alebo strán?*

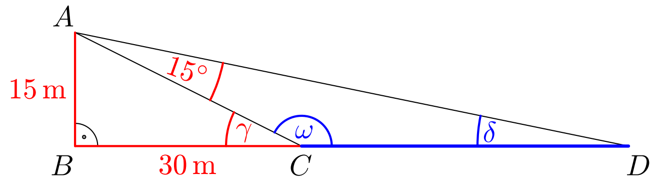
U: Určíme veľkosť uhla ACD. Najskôr však vypočítame veľkosť uhla ACB. Využijeme opäť pravouhlý trojuholník ABC, v ktorom poznáme dĺžky všetkých jeho strán. Môžeme použiť niektorú goniometrickú funkciu.



Ž: *Využijem funkciu tangens pre uhol γ. Je to pomer protiľahlej odvesny k priľahlej odvesne. V našom prípade platí*

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{2}.$$

U: Veľkosť uhla γ určíme pomocou kalkulačky. Jeho približná hodnota je 26,56°. Akú veľkosť bude mať uhol ω, ktorý je vyznačený na obrázku?



Ž: *Spolu s uhlom γ tvoria dvojicu susedných uhlov. Súčet ich veľkostí je* 180 *stupňov. Preto*

$$\omega = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 26{,}56^\circ = 153{,}44^\circ.$$

U: Keďže poznáme veľkosti dvoch uhlov v trojuholníku ACD, poznáme aj veľkosť tretieho uhla.

Ž: *Súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je* 180 *stupňov. Pre uhol δ, čo je uhol ADC, dostávam*

$$\delta = 180^\circ - 15^\circ - 153{,}44^\circ = 11{,}56^\circ.$$

U: Teraz už poznáme v trojuholníku ACD veľkosti všetkých vnútorných uhlov a dĺžku jednej strany. Hľadanú dĺžku strany CD vypočítame využitím ***sínusovej vety***

$$\frac{|CD|}{\sin\varphi} = \frac{|AC|}{\sin\delta}.$$

Dosaď a vypočítaj dĺžku strany CD.

Ž: *Ak vynásobím výrazom* $\sin\varphi$ *dostanem*

$$|CD| = |AC| \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}.$$

Po dosadení číselných hodnôt dostanem výsledok 43,32 m.

$$|CD| = 15\sqrt{5}\,\frac{\sin 15^\circ}{\sin 11{,}56^\circ} \approx 43{,}32.$$

U: Šírka rieky je v danom mieste asi 43,32 metra.

Príklad 4: *Veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC sú v pomere $\alpha : \beta : \gamma = 7 : 2 : 3$. Vypočítajte pomer strán v tomto trojuholníku.*

U: Vieme, že súčet veľkostí vnútorných uhlov v každom trojuholníku je rovný 180 ***stupňom***. Preto zo zadaného pomeru veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku ABC môžeme tieto hodnoty vypočítať.

Ž: *Uhol α predstavuje 7 dielov, uhol β dva diely a γ tri diely. Spolu je to 12 dielov, na ktoré pripadá 180 stupňov. Na* **jeden diel** *teda pripadá $180 : 12 = 15$ stupňov.*

U: Uhol α bude mať veľkosť $\alpha = 7 \cdot 15° = 105°$. Vypočítaj analogicky veľkosti zvyšných dvoch uhlov.

Ž: *Pre uhol β dostávam $\beta = 2 \cdot 15° = 30°$. Uhol γ bude mať veľkosť $\gamma = 3 \cdot 15° = 45°$.*

U: Pomer dĺžok strán súvisí s veľkosťami uhlov.

Ž: *Je taký istý, ako je pomer uhlov?*

U: A prečo si to myslíš?

Ž: *Veď platí vlastnosť: čím väčší je uhol, tým dlhšia je strana oproti tomuto uhlu.*

U: To máš pravdu. Táto vlastnosť je dôsledkom ***sínusovej vety***. Dĺžky strán sú však v pomere sínusov ***veľkostí vnútorných uhlov*** trojuholníka

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Ž: *Aha! Už si spomínam. Stačí mi dosadiť známe hodnoty za uhly a dostávam*

$$a : b : c = \sin 105° : \sin 30° : \sin 45°.$$

Hodnoty sínus pre 30 a 45 stuňov poznám

$$\sin 30° = \frac{1}{2},\ \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ako vypočítam hodnotu sínus pre 105 stupňov?

U: Pomôžeme si súčtovým vzorcom

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

V našom prípade 105 stupňov môžeme vyjadriť ako súčet hodnôt 60 a 45 stupňov. Teda

$$\sin 105° = \sin(60° + 45°).$$

Ž: *Premenná x bude mať hodnotu 60 stupňov a $y = 45°$. Po dosadení dostávam*

$$\sin 105° = \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°.$$

Hodnoty sínus a kosínus pre všetky uvažované veľkosti uhlov poznám, preto dosadím a mám

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

U: Vynásobíme a jednu štvrtinu vyberieme pred zátvorku. Máme

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right),$$

lebo súčin druhých odmocnín z čísel dva a tri je ***odmocnina z ich súčinu***. Teda $\sin\alpha = \sin 105^\circ = \frac{1}{4}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})$. Teraz už môžeme vypočítať pomer strán.

Ž: *Všetky už známe hodnoty sínusov dosadím do sínusovej vety*

$$a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$$

a dostávam

$$a:b:c=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right]:\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

U: Tento pomer môžeme ešte upraviť. Rozšírime ho štyrmi a dostávame

$$a:b:c=(\sqrt{6}+\sqrt{2}):2:2\sqrt{2}.$$

Úloha : *Dané sú veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC:* $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$ *a* $\gamma=75^\circ$. *Vypočítajte pomer strán v tomto trojuholníku.*

Výsledok: $a:b:c=2\sqrt{2}:2\sqrt{3}:(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

Príklad 5: *Vypočítajte dĺžky strán trojuholníka ABC, ak sú dané veľkosti uhlov $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$. Polomer kružnice trojuholníku opísanej má veľkosť $r = 4$ cm.*

U: Podľa ***sínusovej vety*** je pomer dĺžky strany a sínusu uhla oproti tejto strane rovný dvojnásobku polomeru kružnice trojuholníku opísanej. Preto platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

Na výpočet strany a využijeme teda vzťah

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2r.$$

Ž: *Nebude to náročná úloha. Uhol a polomer poznám. Dosadím a dostávam*

$$\frac{a}{\sin 60°} = 2 \cdot 4.$$

Vynásobím hodnotou sínusu

$$a = 8 \cdot \sin 60°$$

a dosadím známu hodnotu $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *za sínus* 60 *stupňov*

$$a = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

U: Výsledok je $a = 4\sqrt{3}$ cm. Aj dĺžku strany b vypočítaš podobným postupom.

Ž: *Teraz využijem vzťah*

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2r.$$

Postup riešenia sa v porovnaní s výpočtom strany a nezmení. Akurát uhol β je teraz 45°. Hodnota sínus pre takýto uhol je rovná reálnemu číslu $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

U: Preto výpočet strany b trochu skrátime.

$$b = 2r\sin\beta = 2 \cdot 4 \sin 45° = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ž: *Výsledok bude* $b = 4\sqrt{2}$ cm.

Ž: *A máme všetky výpočty za sebou.*

U: Nie je to celkom pravda. Zostáva nám ešte vypočítať dlžku strany c.

Ž: *Ale veď nepoznáme uhol γ.*

U: Našťastie platí jedna dobrá vlastnosť pre ***súčet veľkostí vnútorných uhlov*** v ľubovoľnom trojuholníku.

Ž: *Jasné. Spolu dávajú* 180 **stupňov**. *To znamená, že uhol* γ *bude*

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$$

Na výpočet hodnoty funkcie sínus pre uhol veľkosti 75 *stupňov použijem kalkulačku.*

U: Všetky doteraz vypočítané hodnoty sme vyjadrili presne, pomocou druhých odmocnín. Výpočet hodnoty sínus zvládneme využitím súčtového vzorca.

Ž: *Tak to by som potreboval pripomenúť.*

U: Hodnotu 75 stupňov zapíšeme ako súčet dvoch význačných hodnôt.

Ž: *Bude to* 30 *a* 45 *stupňov.*

U: Správne. Stačí pripomenúť súčtový vzorec

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

a môžeš počítať. Za premennú x dosaď 30 stupňov a $y = 45^\circ$.

Ž: *Aha! Dosadím do súčtového vzorca a dostávam*

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ.$$

Hodnoty sínus a kosínus pre uhly veľkosti 30 *a* 45 *stupňov poznám. Preto mám*

$$\sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

U: Po vynásobení zlomkov dostávame

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Dĺžku strany c teda vypočítame analogicky ako u zvyšných dvoch strán trojuholníka.

Ž: *Pre stranu c platí*

$$c = 2r \sin \gamma = 2 \cdot 4 \sin 75^\circ = 8 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \right).$$

Po roznásobení zátvorky dostaneme

$$c = 2 \left(\sqrt{2} + \sqrt{6} \right) \text{ cm}.$$

Príklad 6: *Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC, ak je dané: $a : b = 3 : 5$ a $\beta = 2\alpha$.*

U: Podľa zadania vieme, aký je pomer dĺžok strán a a b trojuholníka a aký je vzťah medzi veľkosťami vnútorných uhlov trojuholníka, ktoré sú protiľahlé zadaným stranám. Využijeme preto ***sínusovú vetu*** v tvare

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Ž: *Namiesto zlomku $\frac{a}{b}$ môžeme podľa zadania dosadiť zlomok $\frac{3}{5}$ a dostávame*

$$\frac{3}{5} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

U: Zo zadania poznáme aj vzťah medzi uhlami α a β. To tiež dosadíme

$$\frac{3}{5} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Získame goniometrickú rovnicu o jednej neznámej. Neznámou bude veľkosť uhla α.

Ž: *Ale v menovateli zlomku na pravej strane je dvojnásobok neznámeho uhla α.*

U: V poriadku. Využijeme vzorec pre hodnotu funkcie sínus dvojnásobného argumentu. Platí

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Dosaď do rovnice.

Ž: *Po dosadení dostávam rovnicu*

$$\frac{3}{5} = \frac{\sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Po krátení výrazu $\sin \alpha$ v zlomku na pravej strane bude mať rovnica tvar

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2 \cos \alpha}.$$

U: Výraz $\sin \alpha$, ktorý si krátil, má pre hodnoty určujúce veľkosti vnútorných uhlov vždy nenulovú hodnotu. Preto si mohol krátiť. Vyjadri z poslednej rovnice hodnotu funkcie kosínus.

Ž: *Vynásobím výrazom $2 \cos \alpha$ a mám*

$$\frac{6 \cos \alpha}{5} = 1,$$

vydelím číslom 6 a zároveň vynásobím piatimi. Goniometrická rovnica, ktorej neznámou je uhol α má tvar

$$\cos \alpha = \frac{5}{6}.$$

U: Hodnota kosínus je kladná iba pre ostré uhly v trojuholníku. Veľkosť uhla α určíme použitím ***kalkulačky***. Dostávame približnú hodnotu

$$\alpha \approx 33{,}56^\circ.$$

Ž: *Uhol β bude mať dvojnásobnú veľkosť*

$$\beta = 2\alpha = 67{,}12^\circ.$$

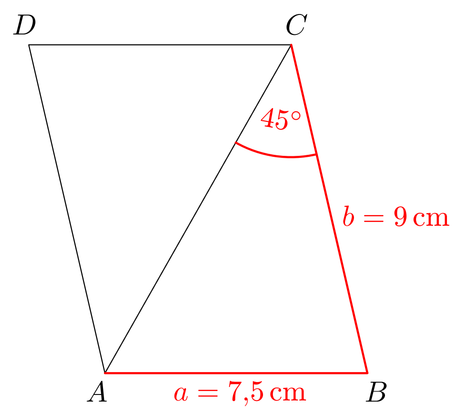
U: Zostáva nám vypočítať veľkosť uhla γ.

Ž: *Viem, že* **súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov** *v trojuholníku je* 180 **stupňov**. *Preto*

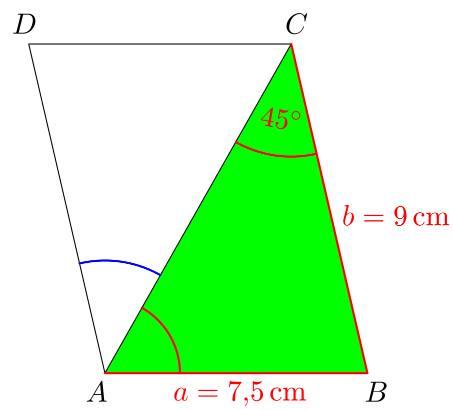
$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 33{,}56^\circ - 67{,}12^\circ = 79{,}32^\circ.$$

Príklad 7: *Vypočítajte veľkosť vnútorného uhla DAB v rovnobežníku $ABCD$, ak sú dané jeho rozmery $a = 7{,}5$ cm, $b = 9$ cm a uhol ACB má veľkosť 45 stupňov.*

U: Urobme podľa zadania náčrt rovnobežníka $ABCD$.



U: Uhol DAB je zjednotením dvoch iných uhlov. Preto jeho veľkosť určíme ako súčet veľkostí uhlov DAC a CAB. Otázka je, či vieme určiť veľkosti týchto dvoch uhlov.



Ž: *Veľkosť uhla CAB by som určil z trojuholníka ACB. Poznám v ňom dĺžky dvoch strán $|AB| = 7{,}5$ cm a $|BC| = 9$ cm. Poznám aj jeden uhol, pri vrchole C.*

U: Uhol ACB je oproti zadanej strane AB a uhol CAB, ktorého veľkosť chceme vypočítať, je oproti zadanej strane BC. Stačí použiť ***sínusovú vetu***

$$\frac{\sin|\sphericalangle CAB|}{b} = \frac{\sin|\sphericalangle ACB|}{a}.$$

Neznámou je uhol CAB.

Ž: *Vynásobím premennou b*

$$\sin|\sphericalangle CAB| = \frac{b}{a} \cdot \sin|\sphericalangle ACB|.$$

Teraz už stačí iba dosadiť zadané hodnoty. Dostávam

$$\sin|\sphericalangle CAB| = \frac{9}{7{,}5} \cdot \sin 45°.$$

U: Hodnota sínus pre uhol veľkosti 45 stupňov je $\frac{\sqrt{2}}{2}$, preto

$$\sin|\sphericalangle CAB| = \frac{9}{7{,}5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Prvý zlomok vykrátime číslom 1,5 a dostávame

$$\sin|\sphericalangle CAB| = \frac{6}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ž: *Zlomky na pravej strane rovnice môžeme ešte krátiť dvomi, teda*

$$\sin|\sphericalangle CAB| = \frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

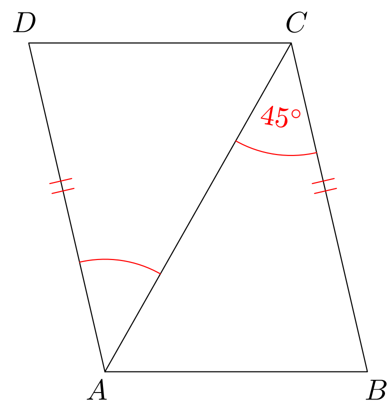
U: Na určenie veľkosti uhla CAB použijeme ***kalkulačku***. Dostávame približnú hodnotu

$$|\sphericalangle CAB| \approx 58{,}05^\circ.$$

Zostáva nám ešte určiť veľkosť uhla DAC.

Ž: *Vôbec netuším, ako to urobíme.*

U: Veľmi jednoducho. Pozri sa ešte raz na obrázok rovnobežníka $ABCD$.



U: Strany AD a BC sú rovnobežné. Uhlopriečka AC je priečkou rovnobežných strán. Preto uhly ACB a DAC sú ***dvojicou striedavých uhlov*** na priečke rovnobežných priamok. Čo vieme o ich veľkostiach?

Ž: *Jasné.* **Majú rovnakú veľkosť**. *Uhol DAC má preto veľkosť 45* **stupňov.**

U: Keďže

$$|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle CAB|,$$

bude jeho veľkosť rovná

$$|\sphericalangle DAB| = 45^\circ + 58{,}05^\circ = 103{,}05^\circ.$$