Obsah trojuholníka

RNDr. Marián Macko

U: Čo potrebuješ poznať, aby si mohol vypočítať obsah trojuholníka?

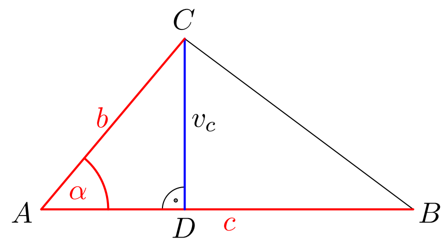
Ž: *Potrebujem poznať jednu stranu a výšku na túto stranu, lebo základný vzorec pre obsah trojuholníka je*

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

U: Strane trojuholníka, pomocou ktorej vyjadrujeme jeho obsah, niekedy hovoríme aj ***základňa***. Niektoré trojuholníky však môžu byť zadané svojimi stranami, niektorými vnútornými uhlami, ba dokonca aj polomerom kružnice trojuholníku opísanej, respektíve vpísanej. Nás bude zaujímať, ako v takýchto prípadoch vyjadriť obsah trojuholníka.

Ž: *Pomocou zadaných prvkov trojuholníka budeme musieť asi vyjadriť jeho výšku.*

U: Začnime prípadom, keď je trojuholník zadaný ***dvomi stranami a uhlom, ktorý tieto strany zvierajú***. Nech sú to napríklad strany b, c a uhol α.



Ž: *Ak za základňu trojuholníka zoberiem stranu c, tak potom musím pomocou strany b a uhla α vyjadriť výšku v_c na stranu c. Ale to je jednoduché. V pravouhlom trojuholníku ADC s pravým uhlom pri vrchole D využijem* funkciu sínus *pre uhol α.*

U: Máš pravdu. Strana b je v tomto trojuholníku preponou, výška v_c na stranu c protiľahlou odvesnou k uhlu α. Preto platí

$$\sin\alpha = \frac{v_c}{b}.$$

Ž: *Ak rovnicu vynásobím premennou b, dostanem výšku*

$$v_c = b\sin\alpha.$$

Po dosadí do základného vzorca získam vzorec

$$S = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot b\sin\alpha}{2}.$$

U: Vzorec sa dá ľahko zapamätať a obmeniť. V čitateli zlomku na pravej strane vzorca je ***súčin dvoch strán a hodnoty funkcie sínus*** pre uhol, ktorý je týmito stranami ***zovretý***.

Ž: *To znamená, že ak sú zadané strany a a b, musí byť zadaný uhol γ. A tieto premenné potom figurujú vo vzorci pre obsah trojuholníka.*

U: Cyklicky ich vo vzorci zameníme podľa spomenutého významu. To znamená, že ak poznáme dve strany trojuholníka a uhol nimi zovretý, možno obsah trojuholníka vyjadriť v tvare

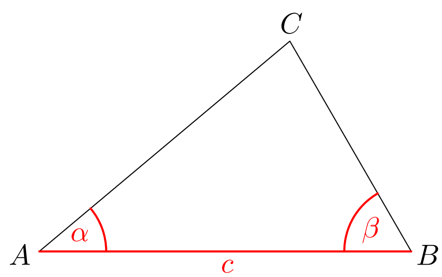
$$S = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2}.$$

Ž: *Ako budeme počítať obsah trojuholníka, ak bude daná iba jedna strana?*

U: V takomto prípade musia byť zadané aj dva vnútorné uhly trojuholníka.

Ž: *Potom poznáme aj tretí uhol, lebo súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je* 180 *stupňov.*

U: Vyriešime situáciu, keď je ***zadaná strana*** c ***a uhly*** α ***a*** β k tejto strane priľahlé.



Ž: *Výšku na stranu* c *asi cez dva uhly nevyjadrím.*

U: Vzorec teraz odvodíme z predchádzajúcej situácie. Ak by boli zadané strany a, c a uhol β, obsah trojuholníka by sa počítal podľa vzorca

$$S = \frac{ac\sin\beta}{2}.$$

Ž: *Nepoznáme však stranu* a.

U: Vyjadríme ju zo sínusovej vety

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Vyjadri stranu a.

Ž: *Po vynásobení rovnice výrazom* $\sin\alpha$ *dostávam*

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

U: Ak do vzorca pre obsah trojuholníka namiesto strany a dosadíme výraz $\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$, dostaneme

$$S = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}c\sin\beta}{2}.$$

Stačí upraviť zložený zlomok.

Ž: *Hodnota funkcie sínus pre uhol γ bude po úprave v menovateli zlomku, tak ako číslo dva.*

$$S = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma}.$$

U: Opäť zaujímavý vzťah. Uhol oproti strane, ktorú poznáme, je argumentom funkcie sínus nachádzajúcej sa v menovateli zlomku. V čitateli zlomku sú zvyšné uhly a druhá mocnina zadanej strany. Preto cyklickou zámenou premenných dostávame

$$S = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2\sin\beta} = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma}.$$

U: Pomerne jednoducho odvodíme aj vzorec pre prípad, že trojuholník je zadaný ***všetkými svojimi stranami a polomerom r kružnice trojuholníku opísanej***. Východiskom k odvádzaniu bude vzorec $S = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$ pre obsah trojuholníka, ktorý sme pred chvíľou uviedli.

Ž: *Potrebujeme nejakým spôsobom vyjadriť hodnotu výrazu $\sin\gamma$. Zadané sú iba strany a, b, c a pomer r kružnice trojuholníku opísanej. Netuším, odkiaľ by sme tak mohli urobiť.*

U: Uhol, protiľahlú stranu a polomer kružnice trojuholníku opísanej dáva do vzťahu sínusová veta. Vieme, že platí

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

Ž: *Aha! To znamená, že namiesto výrazu $\sin\gamma$ môžem dosadiť výraz $\dfrac{c}{2r}$, lebo*

$$\sin\gamma = \frac{c}{2r}.$$

Po dosadení dostávam

$$S = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ab\cdot\frac{c}{2r}}{2}.$$

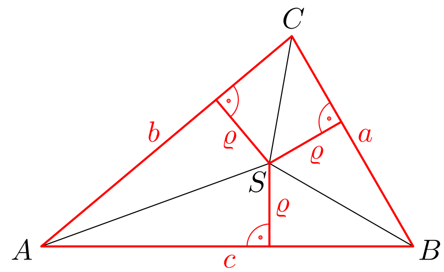
U: Po úprave zloženého zlomku dostávame výsledný vzorec pre obsah trojuholníka zadaného ***stranami a polomerom kružnice trojuholníku opísanej*** v tvare

$$S = \frac{abc}{4r}.$$

Ž: *Spomínali ste, že obsah trojuholníka sa dá vyjadriť aj cez* **polomer kružnice vpísanej do trojuholníka**.

U: Opäť musíme poznať aj ***dĺžky všetkých strán trojuholníka***. Pre myšlienku odvodenia vzorca je dôležitý stred kružnice vpísanej do trojuholníka. Ako ho zostrojíme?

Ž: *Vznikne ako prienik osí vnútorných uhlov trojuholníka.*



U: Všimni si, že body A, B, C a S vytvárajú tri nové trojuholníky ABS, BCS a CAS. Ich zjednotením je pôvodný trojuholník ABC.

Ž: *Potom ale obsah trojuholníka ABC musí byť súčtom obsahov týchto troch trojuholníkov.*

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABS} + S_{\Delta BCS} + S_{\Delta CAS}.$$

U: Obsah každého z týchto troch trojuholníkov vieme vyjadriť. Ich základňou je jedna zo strán trojuholníka ABC a výškou je ***polomer ϱ kružnice vpísanej do trojuholníka ABC***. To preto, lebo úsečka spájajúca stred kružnice a dotykový bod je kolmá na stranu trojuholníka. Predstavuje polomer ϱ kružnice vpísanej.

Ž: *Obsah trojuholníka ABS bude $S_{\Delta ABS} = \frac{c\varrho}{2}$. Obsahy ostatných trojuholníkov vyjadrím analogicky. Pre obsah trojuholníka ABC potom platí*

$$S_{ABC} = \frac{c\varrho}{2} + \frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2}.$$

Zo všetkých sčítancov môžem vybrať pred zátvorku výraz $\frac{\varrho}{2}$. V zátvorke zostane súčet strán trojuholníka ABC.

$$S = \frac{\varrho}{2}(a + b + c).$$

U: Súčet dĺžok všetkých strán trojuholníka predstavuje jeho obvod o. Polovica obvodu sa označuje symbolom s. Preto sa zvykne daný vzorec uvádzať aj v tvare

$$S = s\varrho,$$

kde

$$s = \frac{o}{2} = \frac{a + b + c}{2}.$$

Ž: *Dá sa obsah trojuholníka vypočítať aj v prípade, že poznáme iba jeho strany a, b, c?*

U: Vzorec pre tento prípad odvodil Herón z Alexandrie, ktorý žil v I. storočí nášho letopočtu. Nazývame ho preto ***Herónov vzorec*** a má tvar

$$S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}.$$

Ž: *Symbol s má zrejme význam polovičného obvodu trojuholníka, tak ako v predchádzajúcom prípade.*

U: Áno. Platí

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Príklad 1: *Vypočítajte obsah trojuholníka ABC, ak sú dané dĺžky jeho strán $a = 37$ cm, $b = 45$ cm a veľkosť vnútorného uhla $\gamma = 60°$.*

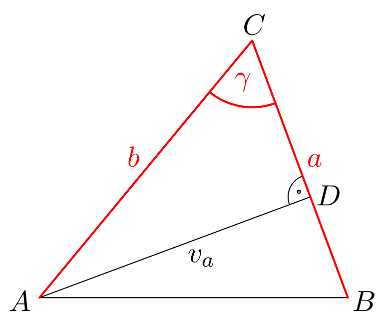
U: Čo potrebuješ poznať, aby si vypočítal obsah trojuholníka?

Ž: *Potrebujem dĺžku jednej jeho strany a výšku na túto stranu. Vzorec pre obsah trojuholníka je*

$$S = \frac{av_a}{2}.$$

Ale nepoznám výšku.

U: Pozri sa na obrázok. Výška v_a na stranu a súvisí so zadanými stranami a uhlom.



Ž: *Vznikol pravouhlý trojuholník ADC s pravým uhlom pri vrchole D. Poznám jeho preponu, čo je zadaná strana b a uhol γ. Chcem vypočítať stranu v_a, ktorá je oproti zadanému uhlu, preto použijem funkciu sínus. Je definovaná ako* **pomer protiľahlej odvesny a prepony**.

$$\sin\gamma = \frac{v_a}{b}.$$

U: Vynásobením rovnice premennou b dostaneme vyjadrenie výšky v_a na stranu a

$$v_a = b\sin\gamma.$$

Dosaď do vzorca pre obsah trojuholníka a dopočítaj.

Ž: *Ak výraz $b\sin\gamma$ dosadíme za výšku v_a do vzťahu $S = \frac{av_a}{2}$, tak dostaneme*

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2}.$$

Za premennú a dosadím hodnotu 37, $b = 45$ a uhol γ má veľkosť 60 stupňov. Dostávam

$$S = \frac{37\cdot 45\cdot \sin 60°}{2} = \frac{4665\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2},$$

lebo sínus 60 stupňov je $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

U: Obsah trojuholníka je $\frac{4665\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

Úloha : *Vypočítajte obsah trojuholníka* ABC, *ak sú dané dĺžky jeho strán* $a = 37$ cm, $b = 45$ cm *a veľkosť vnútorného uhla* $\gamma = 120°$.

Výsledok: $S = \dfrac{1665\sqrt{3}}{4}$ cm^2

Príklad 2: *Vypočítajte dĺžky strán trojuholníka ABC, ak je daný jeho obsah $S = 250$ cm^2 a veľkosti jeho vnútorných uhlov $\alpha = 48°$ a $\beta = 52°$.*

U: Na výpočet dĺžky strany a trojuholníka použijeme vzorec pre obsah trojuholníka v tvare

$$S = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}.$$

Vyjadri dĺžku strany a.

Ž: *Vynásobím výrazom $2\sin\alpha$, potom*

$$2S\sin\alpha = a^2 \sin\beta\sin\gamma,$$

a vydelím súčinom hodnôt funkcie sínus pre uhly β a γ. Dostávam

$$a^2 = \frac{2S\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

U: Vyjadrenie dĺžky strany a bude mať po odmocnení tvar

$$a = \sqrt{\frac{2S\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}.$$

Ž: *Aby som mohol dosadiť všetky zadané hodnoty, potrebujem ešte vypočítať veľkosť uhla γ. Viem, že* **súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je 180 stupňov**. *Preto uhol γ vypočítam zo vzorca*

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 48° - 52° = 80°.$$

U: Dosadíme zadané a vypočítané hodnoty a dostávame

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 250 \sin 48°}{\sin 52° \sin 80°}}.$$

Na výpočet použijeme kalkulačku. Dĺžka strany a je približne $21,9$ cm.

Ž: *Na výpočet zvyšných strán by sa mal použiť analogický vzorec. Všimol som si, že vo výslednom vyjadrení $a = \sqrt{\frac{2S\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}$ pre stranu a je v čitateli zlomku pod odmocninou uhol k tejto strane protiľahlý. Teda α. Preto pre stranu b môžem písať vzorec*

$$b = \sqrt{\frac{2S\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}}.$$

U: Výborne. Zjednodušil si výpočty. Veľkosti zvyšných strán budeme počítať analogicky. Po dosadení dostávame

$$b = \sqrt{\frac{2S\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}} = \sqrt{\frac{500\sin 52^\circ}{\sin 48^\circ \sin 80^\circ}}.$$

Dĺžka strany b je približne $23,8$ cm. Výpočet strany c už zvládneš sám.

Ž: *Vzorec pre vyjadrenie strany c bude mať tvar*

$$c = \sqrt{\frac{2S\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}},$$

lebo oproti strane c je uhol γ. Dosadím číselné hodnoty a dostávam

$$c = \sqrt{\frac{500\sin 80^\circ}{\sin 48^\circ \sin 52^\circ}}.$$

U: Dĺžka strany c je približne 29 cm.

Príklad 3: *Vypočítajte dĺžky zvyšných strán ostrouhlého trojuholníka ABC, ak je daná dĺžka jeho strany $a = 5$ cm. Výšky na strany a a b trojuholníka majú dĺžky $v_a = 2$ cm, $v_b = 4$ cm.*

U: Dĺžku strany b trojuholníka ABC vypočítame na základe vyjadrenia jeho obsahu. To môžeme urobiť dvoma spôsobmi. Ak je základňou trojuholníka strana a, jeho obsah bude vyjadrený vzorcom

$$S = \frac{av_a}{2}.$$

To isté musíme dostať, ak obsah vyjadríme pomocou strany b.

Ž: *Musí teda platiť*

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2}.$$

U: Rovnicu vynásobíme dvomi, vydelíme premennou v_b a dostaneme vyjadrenie strany b v tvare

$$b = \frac{av_a}{v_b}.$$

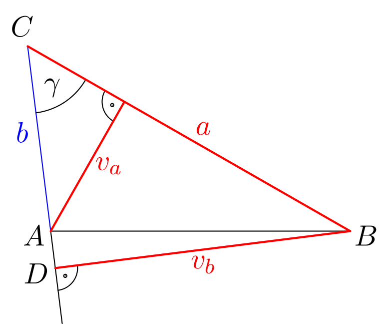
Ž: *Stačí dosadiť zadané číselné hodnoty. Pre dĺžku strany b trojuholníka dostávame*

$$b = \frac{5 \cdot 2}{4} = 2{,}5 \text{ cm}.$$

U: Jednou z metód, ako vypočítať dĺžku strany c, je použiť kosínusovú vetu.

Ž: *Ale to musíme poznať veľkosť uhla γ, ktorý strany a a b známej dĺžky zvierajú.*

U: To nebude problém. Pozri na obrázok.



Ž: *Jasné. Využijem pravouhlý trojuholník BCD s pravým uhlom pri vrchole D. Uhol γ vypočítam pomocou funkcie sínus. Je definovaná ako pomer protiľahlej odvesny a prepony.*

U: Protiľahlou odvesnou je v našom prípade výška na stranu b a preponou úsečka a. Preto platí

$$\sin\gamma = \frac{v_b}{a}.$$

U: Po dosadení číselných hodnôt máme

$$\sin\gamma = \frac{4}{5}.$$

Ž: *Uhol vypočítam použitím kalkulačky.*

U: V ďalších výpočtoch si poradíme aj bez určenia veľkosti uhla γ. Postačí nám vedomosť, že $\sin\gamma = \frac{4}{5}$. Poďme na vyjadrenie strany c pomocou kosínusovej vety.

Ž: *Pre stranu c platí*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Odkiaľ získame hodnotu výrazu $\cos\gamma$?

U: Poznáme hodnotu funkcie sínus, preto použijeme základný vzťah medzi hodnotami funkcií sínus a kosínus.

$$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1.$$

Ž: *Za hodnotu funkcie sínus dosadím číslo $\frac{4}{5}$ a dostávam*

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1.$$

Zlomok umocním a odčítam. Vyjadrenie druhej mocniny hodnoty funkcie kosínus bude mať tvar

$$\cos^2\gamma = 1 - \frac{16}{25}.$$

U: Trojuholník je podľa zadania ostrouhlý. Ako vieme, hodnota funkcie kosínus pre ostré uhly je kladná. Preto

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Ž: *Teraz už môžem vypočítať dĺžku strany c. Zadané a vypočítané hodnoty dosadím do kosínusovej vety*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 5^2 + 2{,}5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2{,}5 \cdot \frac{3}{5}.$$

Po umocnení a vynásobení čísel dostávam

$$c^2 = 25 + 6{,}25 - 15 = 16{,}25.$$

U: Strana c má dĺžku $\sqrt{16{,}25}$ cm.

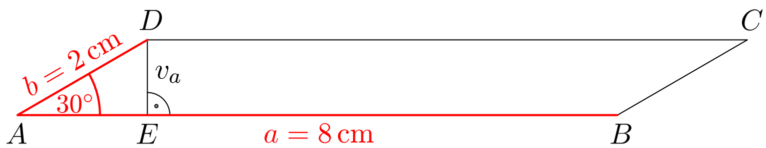
Príklad 4: *Vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$, ak sú dané dĺžky jeho strán $|AB| = 8$ cm, $|AD| = 2$ cm a veľkosť vnútorného uhla DAB je 30 stupňov. Potom vypočítajte výšku na stranu a.*

U: Ako vypočítame obsah rovnobežníka?

Ž: *Potrebujem poznať dĺžku jednej strany rovnobežníka a výšku na túto stranu. Obsah bude daný súčinom ich dĺžok.*

$$S = av_a.$$

U: Výšku v_a na stranu a rovnobežníka vyjadríme na základe zadaných strán a uhla rovnobežníka. Pozri na obrázok.



Ž: *Na jej výpočet využijem pravouhlý trojuholník AED s pravým uhlom pri vrchole E.*

U: V trojuholníku AED poznáš preponu $|AD| = 2$ cm a uhol oproti výške, ktorú chceš vypočítať.

Ž: *Do vzťahu ich dáva funkcia sínus. Je definovaná ako pomer protiľahlej odvesny k prepone, preto*

$$\sin |\sphericalangle DAB| = \frac{v_a}{|AD|}.$$

U: Ak rovnicu vynásobíme dĺžkou strany AD, dostaneme výšku na stranu a v tvare

$$v_a = |AD| \sin |\sphericalangle DAB|.$$

Dosaď toto vyjadrenie do vzorca pre obsah rovnobežníka.

Ž: *Po dosadení bude mať vzorec pre obsah rovnobežníka tvar*

$$S = av_a = a|AD| \sin |\sphericalangle DAB|.$$

U: Zostáva nám dosadiť číselné hodnoty. Zo zadania vieme, že $a = |AB| = 8$ cm, $|AD| = 2$ cm a uhol DAB má veľkosť 30 stupňov. Dosadíme

$$S = 8 \cdot 2 \cdot \sin 30°.$$

Ž: *Hodnota funkcie sínus pre 30 stupňov je 0,5. Po vynásobení všetkých čísel dostanem pre* **obsah rovnobežníka** *výsledok 8 cm^2.*

$$S = 8 \cdot 2 \cdot \sin 30° = 8 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 8.$$

U: Druhá časť úlohy spočíva vo výpočte výšky v_a na stranu a.

Ž: *Keďže poznáme obsah rovnobežníka a dĺžku strany a, môžeme využiť vzorec*

$$S = av_a.$$

Výška bude podielom obsahu a dĺžky strany a.

$$v_a = \frac{S}{a}$$

U: Máš pravdu. Po dosadení číselných hodnôt dostávame

$$v_a = \frac{S}{a} = \frac{8}{8} = 1.$$

Ž: *Výška v rovnobežníku bude mať veľkosť* **jeden centimeter**.

U: Výšku sme mohli vypočítať aj iným spôsobom. Nepotrebujeme obsah rovnobežníka. Stačí použiť dve zadané strany a uhol rovnobežníka.

Ž: *Máte na mysli pravouhlý trojuholník AED, ktorý sme využili na začiatku úlohy?*

U: Áno. Veď vtedy si pre výšku rovnobežníka odvodil vzorec

$$v_a = |AD| \sin |\sphericalangle DAB|.$$

Ž: *Jasné. Všetky členy, okrem strany a, vo vzťahu pre obsah $S = a \cdot |AD| \sin |\sphericalangle DAB|$, ktorý sme odvodili, vyjadrujú výšku. Je to teda výraz $|AD| \sin |\sphericalangle DAB|$.*

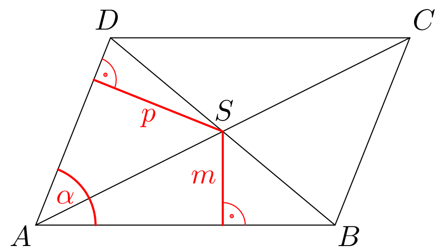
U: Aj z tohto vyjadrenia dostaneme po dosadení číselných hodnôt výsledok jeden centimeter.

$$v_a = |AD| \sin |\sphericalangle DAB| = 2 \cdot 0{,}5 = 1.$$

Príklad 5: *Vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$, ak je daný ostrý uhol $\alpha = |\sphericalangle DAB|$ a vzdialenosť priesečníka uhlopriečok S od nerovnakých strán AB a AD je m a p.*

U: Ako je určená vzdialenosť priesečníka S od strany AB rovnobežníka $ABCD$?

Ž: *Z bodu S treba zostrojiť kolmicu na stranu AB. Táto vzdialenosť, označená symbolom m, predstavuje výšku v trojuholníku ABS.*



U: Význam premennej p chápeme podobne. Je to výška v trojuholníku ASD.

Ž: *Ako pomocou týchto výšok a uhla α vyjadríme obsah rovnobežníka?*

U: Pomôžeme si aj stranami rovnobežníka. Stranu AB označíme symbolom a, stranu AD symbolom b. Uhlopriečky rozdelia rovnobežník na štyri trojuholníky, tak ako to je na obrázku. Keďže bod S je stredom uhlopriečok a strany AB a CD sú zhodné, musia byť ***trojuholníky ABS a CDS zhodné. Majú rovnaký obsah***. Vieš ho vyjadriť?

Ž: *Základňou v oboch trojuholníkoch je strana a a m je výškou na základňu. Preto platí*

$$S_{\Delta ABS} = S_{\Delta CDS} = \frac{am}{2}.$$

U: Aj trojuholníky ADS a CSB sú zhodné. Ich základňou je strana b a výškou p. Pre ich obsah platí

$$S_{\Delta ADS} = S_{\Delta CSB} = \frac{bp}{2}.$$

Aký bude celkový obsah rovnobežníka $ABCD$?

Ž: *Stačí spočítať obsahy týchto štyroch trojuholníkov. Dostávame*

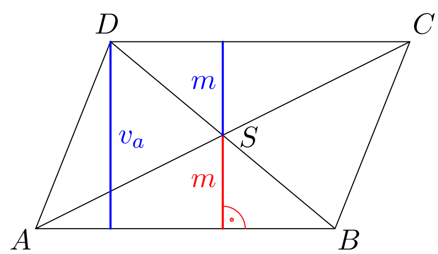
$$S = 2 \cdot S_{\Delta ABS} + 2 \cdot S_{\Delta ADS} = 2 \cdot \frac{am}{2} + 2 \cdot \frac{bp}{2}.$$

Po vynásobení zlomkov číslom dva bude obsah rovnobežníka vyjadrený vzorcom

$$S = am + bp.$$

Ale nepoznáme strany a a b.

U: Z toho dôvodu sa pokúsime vyjadriť obsah rovnobežníka aj iným spôsobom. Akú výšku na stranu a má rovnobežník $ABCD$?



Ž: *Stačí sčítať výšky v trojuholníkoch ABS a CDS. Obe výšky uvažujeme na stranu a. Preto výška v rovnobežníku $ABCD$ na stranu a má veľkosť $2m$.*

U: Potom obsah rovnobežníka $ABCD$ vieme vyjadriť aj v tvare

$$S = a \cdot 2m.$$

Ž: *Zatiaľ sme nikde nevyužili zadaný uhol α.*

U: Máš pravdu. Pomocou tohto uhla a strán rovnobežníka vyjadríme obsah rovnobežníka tretím spôsobom. Vieme, že rovnobežník sa skladá z dvoch zhodných trojuholníkov ABD a BCD, ktorých spoločná strana BD je uhlopriečkou rovnobežníka. Obsah trojuholníka ABD sa dá vyjadriť pomocou dvoch strán a, b a uhla α, ktorý je nimi zovretý.

Ž: *Spomínam si na vzorec*

$$S_{\Delta ABD} = \frac{ab \sin \alpha}{2}.$$

Preto obsah rovnobežníka musí byť jeho dvojnásobkom

$$S = 2 \cdot S_{\Delta ABD} = ab \sin \alpha.$$

U: Obsah rovnobežníka sme vyjadrili troma spôsobmi:

$$S = am + bp,$$

$$S = 2am,$$

$$S = ab \sin \alpha.$$

Výsledný vzorec získame úpravou týchto troch vzorcov tak, aby sme vylúčili nezadané strany a a b. Najskôr zo vzorca $S = 2am$ vyjadríme stranu a

$$a = \frac{S}{2m}$$

a dosadíme do posledného vzorca.

Ž: *Po dosadení dostávam*

$$S = ab\sin\alpha = \frac{S}{2m} \cdot b\sin\alpha.$$

Vykrátim obsah S a vyjadrím stranu b

$$b = \frac{2m}{\sin\alpha}.$$

U: Obe vyjadrenia za strany a a b dosadíme teraz do prvého vzorca a upravíme:

$$S = am + bp = \frac{S}{2m} \cdot m + \frac{2m}{\sin\alpha} \cdot p = \frac{S}{2} + \frac{2mp}{\sin\alpha}.$$

Vyjadri odtiaľ obsah S.

Ž: *Po odčítaní zlomku* $\frac{S}{2}$ *dostávam*

$$\frac{S}{2} = \frac{2mp}{\sin\alpha}.$$

Stačí rovnicu vynásobiť dvomi a obsah rovnobežníka bude vyjadrený v tvare

$$S = \frac{4mp}{\sin\alpha}.$$

U: A to je výsledok úlohy.

Príklad 6: *Vypočítajte obsah trojuholníka ABC a veľkosť vnútorného uhla β, ak sú dané dĺžky jeho strán $a = 4$ cm, $b = 3$ cm a $c = 3{,}5$ cm.*

U: Využijeme ***Herónov vzorec*** na výpočet obsahu trojuholníka

$$S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)},$$

kde

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Symbolom malé s je označený polovičný obvod trojuholníka.

Ž: *Poznám všetky strany, takže vypočítam najskôr polovičný obvod*

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+3+3{,}5}{2} = 5{,}25.$$

Polovičný obvod trojuholníka je 5,25 centimetra.

U: Túto hodnotu a dĺžky strán trojuholníka ABC dosadíme do Herónovho vzorca. Dostávame

$$S = \sqrt{5{,}25 \cdot (5{,}25-4) \cdot (5{,}25-3) \cdot (5{,}25-3{,}5)}.$$

Po odčítaní čísel v zátvorkách dostaneme pod odmocninou súčin čísel

$$S = \sqrt{5{,}25 \cdot 1{,}25 \cdot 2{,}25 \cdot 1{,}75}.$$

Ž: *Využijem kalkulačku. Po vynásobení a odmocnení dostanem približnú hodnotu obsahu trojuholníka.*

$$S \doteq 5{,}083 \text{ cm}^2.$$

U: Prejdeme k druhej časti úlohy. Ako vypočítame veľkosť uhla β, ak poznáme všetky strany trojuholníka?

Ž: *Použijeme kosínusovú vetu*

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

U: Vyjadri odtiaľ hodnotu funkcie kosínus.

Ž: *K rovnici pripočítam výraz $2ac\cos\beta$ a odrátam člen b^2. Dostávam*

$$2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2.$$

U: Hodnotu funkcie kosínus získame delením výrazom $2ac$. Výsledný vzorec na výpočet uhla β má tvar

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Ž: *Po dosadení zadaných hodnôt dostávam*

$$\cos\beta = \frac{4^2 + 3{,}5^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 3{,}5}.$$

V čitateli čísla umocním a v menovateli ich vynásobím.

$$\cos\beta = \frac{16 + 12{,}25 - 9}{28}.$$

U: Pre hodnotu funkcie kosínus dostaneme

$$\cos\beta = \frac{19{,}25}{28}.$$

Veľkosť uhla určíme pomocou ***kalkulačky***.

Ž: *Uhol β má veľkosť približne 46,6* **stupňa**.

$$\beta \approx 46{,}6^\circ.$$