

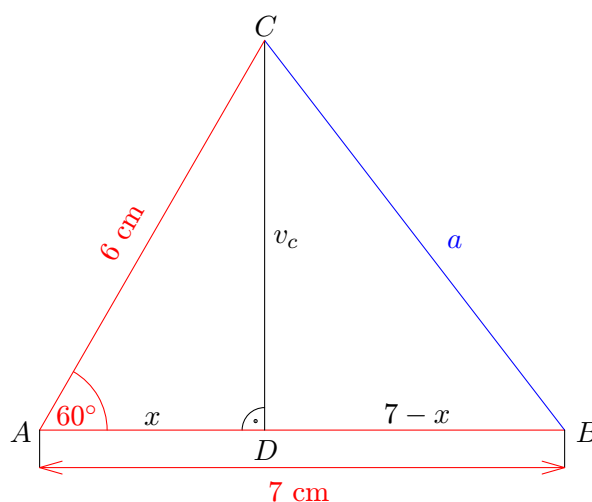
Kosínusová veta

RNDr. Marián Macko

U: Máme vypočítať dĺžku strany a , ak sú dané dĺžky strán $b = 6$ cm a $c = 7$ cm. Uhol α , ktorý zadané strany zvierajú má veľkosť 60 stupňov.

Ž: So *sínusovou vetou* si pri riešení tejto úlohy nepomôžem. Na jej využitie by som potreboval uhol oproti jednej zadanej strane.

U: Načrtnime si obrázok. Päťu výšky na stranu c označíme ako bod D . Pre ďalšie úvahy označíme neznámou x dĺžku úsečky AD .



Ž: Vznikli pravouhlé trojuholníky ADC a BDC . V oboch trojuholníkoch je pravý uhol pri vrchole D .

U: Navyše, výška v_c na stranu c je ich spoločnou stranou. V oboch pravouhlých trojuholníkoch vyjadríme túto výšku. Využijeme *Pytagorovu vetu*.

Ž: V trojuholníku ADC je strana b *preponou*, preto platí

$$v_c^2 = 6^2 - x^2.$$

Pre trojuholník BDC s preponou a sa dá zapísať Pytagorova veta v tvare

$$v_c^2 = a^2 - (7 - x)^2.$$

U: Správne si vyjadril dĺžku strany DB .

Ž: To je jednoduché. Celá úsečka AB má dĺžku 7 cm a pozostáva z dvoch úsečiek. Dĺžka jej časti AD je označená ako neznáma x . Potom druhá časť musí mať veľkosť, ktorá je daná rozdielom týchto hodnôt.

U: Pre oba pravouhlé trojuholníky si vyjadril druhú mocninu tej istej výšky na stranu c . Preto sa musia rovnať aj výrazy na pravých stranách týchto vyjadrení.

$$v_c^2 = 6^2 - x^2 = a^2 - (7 - x)^2.$$

Vyjadri odtiaľ druhú mocninu strany a .

Ž: Stačí k výrazom na oboch stranách červenej rovnice prirátať výraz $(7 - x)^2$ a dostávam

$$a^2 = 6^2 - x^2 + (7 - x)^2.$$

Ešte môžem umocniť dvojčlen $7 - x$ podľa známeho vzorca $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Potom

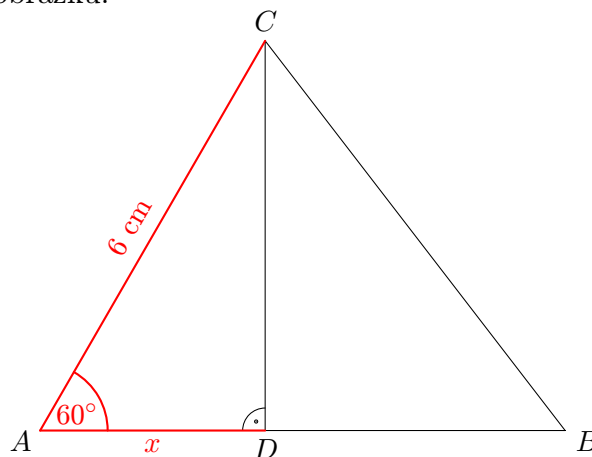
$$a^2 = 6^2 - x^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot x + x^2.$$

U: Druhé mocniny neznámej x sa odčítajú. Vyjadrenie pre dĺžku strany a bude mať tvar

$$a^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot x.$$

Ž: Ale nepoznáme hodnotu neznámej x .

U: Vráťme sa naspäť k obrázku.



U: Neznámou x sme označili dĺžku strany AD . Pozri sa na trojuholník ADC , ktorý je pravouhlý.

Ž: Jasné. Poznáme v ňom preponu a jeden ostrý uhol. Chceme vypočítať odvesnu priľahlú k známemu uhlu. Použijeme goniometrickú funkciu *kosínus*. Platí

$$\cos 60^\circ = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{x}{6}.$$

U: Po vynásobení šiestimi dostaneme vyjadrenie neznámej

$$x = 6 \cdot \cos 60^\circ,$$

ktoré dosadíme do vzťahu pre druhú mocninu strany a .

Ž: Po dosadení dostaneme

$$a^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 60^\circ.$$

Strana a má dĺžku $\sqrt{43}$ centimetrov, lebo *kosínus* 60 stupňov je jedna polovica.

U: Tento vzorec je vyjadrením **kosínusovej vety** pre konkrétne hodnoty. Ak nahradíme číselné hodnoty označením strán a uhla, dostaneme

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

lebo 6 predstavuje dĺžku strany b , číslo 7 stranu c a uhol α má veľkosť 60 stupňov.

Ž: Čo v prípade, že by sme poznali iné dve strany a uhol?

U: Ak poznáš strany a a c , musíš poznať aj uhol, ktorý tieto strany zvierajú. To je uhol β . Môžeš vypočítať dĺžku strany b . Použiješ opäť kosínusovú vetu, ktorá bude mať tvar

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta.$$

Dôležité je, že vo výraze na pravej strane vystupujú **druhé mocniny dvoch zadaných strán** trojuholníka. V argumente **funkcie kosínus** v poslednom člene musí byť **uhol, ktorý je týmito stranami zovretý**.

Ž: Chápem. V prípade, že sú dané strany a a b , musí byť daný uhol γ , ktorý tieto strany zvierajú. Vtedy vypočítam dĺžku strany c podľa vzorca

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

U: Tomu, čo sme dvakrát urobili, sa v matematike hovorí **cyklická zámena premenných**.

Ž: Z toho, čo sme doteraz povedali, mi vyplýva, že **kosínusovú vetu** použijem v prípade, ak poznám **dve strany trojuholníka a uhol nimi zovretý**. Vtedy vypočítam **stranu oproti uhlu**. Dá sa kosínusová veta použiť aj v inom prípade?

U: Používa sa aj v prípade, ak poznáme **všetky strany v trojuholníku** a chceme vypočítať **veľkosť ktoréhokoľvek uhla**. Vyjadrí z posledného vzťahu **hodnotu funkcie kosínus** pre uhol γ .

Ž: Odčítam druhé mocniny strán a a b a mám

$$c^2 - a^2 - b^2 = -2ab \cos \gamma.$$

Rovnicu vydelím výrazom $-2ab$ a dostávam

$$\cos \gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}.$$

U: Výraz na pravej strane upravíme tak, aby sme znamienko mínus z menovateľa preniesli do čitateľa. Vtedy sa výraz v čitateli zlomku zmení na výraz opačný:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Z tohto vyjadrenia môžeme rozhodnúť, či je uhol γ ostrý, pravý alebo tupý.

Ž: Ako?

U: Vieme, že pre **ostré uhly** je hodnota funkcie kosínus **kladná**. Menovateľ $2ab$ zlomku $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, ktorý vyjadruje hodnotu funkcie kosínus, je kladný. To preto, lebo dĺžky strán a a b sú kladné čísla. Potom musí mať kladnú hodnotu aj čitateľ $a^2 + b^2 - c^2$. Teda, ak platí

$$a^2 + b^2 - c^2 > 0,$$

tak je uhol γ **ostrý**.

Ž: Ak bude **hodnota výrazu** $a^2 + b^2 - c^2$ **záporná**, bude uhol γ **tupý**. Pochopil som to správne?

U: Samozrejme. Vtedy hodnota funkcie kosínus bude záporná, lebo čitateľ bude záporné číslo a menovateľ je opäť kladné číslo. Ako vieme, kosínus nadobúda záporné hodnoty pre uhly väčšie ako 90 stupňov.

Ž: Zostal posledný prípad. Ak je **uhol** γ **pravý**, tak hodnota funkcie kosínus je rovná **nule**.

U: Potom pre výraz v čitateli zlomku platí

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0.$$

Ž: Ale, to sa dá upraviť na tvar Pytagorovej vety.

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

U: Áno. **Pytagorova veta** je **špeciálnym prípadom kosínusovej vety**. Pre uhol $\gamma = 90^\circ$ po dosadení do kosínusovej vety dostávame

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 90^\circ = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2.$$

Príklad 1: Vypočítajte veľkosť vnútorného uhla γ v trojuholníku ABC , ak pre dĺžky jeho strán platí: $c^2 = a^2 + b^2 + ab$.

U: Zadaný vzťah $c^2 = a^2 + b^2 + ab$ medzi dĺžkami strán trojuholníka ABC porovnáme so vzorcom

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Vzorec je zápisom **kosínusovej vety**.

Ž: Predpokladám, že obidve vyjadrenia by mali byť rovnaké.

U: Áno. Obidva vzťahy vyjadrujú druhú mocninu dĺžky strany c v trojuholníku.

Ž: Potom by sa mali rovnať aj výrazy na pravých stranách.

U: Samozrejme. Musí platiť

$$a^2 + b^2 + ab = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Všimni si, v ktorých členoch sa tieto výrazy líšia.

Ž: Aby platila rovnosť, členy zapísané červenou farbou musia byť rovnaké. To preto, lebo v ostatných členoch sa tieto výrazy zhodujú. Takýmto porovnaním dostanem

$$ab = -2ab \cos \gamma.$$

U: Dostali sme teda podmienku pre uhol γ , ktorú ešte upravíme. Premenné a a b označujú dĺžky strán trojuholníka. Ich hodnotami môžu byť iba **kladné reálne čísla**. Rovnicu $ab = -2ab \cos \gamma$ môžeme vydeliť výrazom $-2ab$. Dostávame **goniometrickú rovnicu**

$$\cos \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Ž: Uhol γ bude tupý.

U: Prečo?

Ž: Pretože **funkcia kosínus** nadobúda záporné hodnoty pre uhly, ktorých veľkosť patrí do intervalu $(90^\circ; 180^\circ)$.

U: Máš pravdu. Iné hodnoty nás nezaujímajú, lebo veľkosť vnútorného uhla v trojuholníku môže byť iba z otvoreného intervalu $(0^\circ; 180^\circ)$. Funkcia kosínus nadobúda hodnotu $\frac{1}{2}$ pre uhol veľkosti 60 stupňov.

Ž: Na určenie veľkosti uhla γ využijem vzorec

$$\cos(180^\circ - \omega) = -\cos \omega.$$

Preto uhol γ má veľkosť

$$\gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

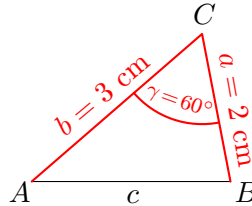
U: Výpočet si urobil veľmi pekne. Teda uhol γ má veľkosť 120 stupňov.

Úloha 1: *Vypočítajte veľkosť vnútorného uhla γ v trojuholníku ABC , ak pre dĺžky jeho strán platí: $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$.*

Výsledok: $\gamma = 45^\circ$

Príklad 2: Vypočítajte dĺžku strany c v trojuholníku ABC , ak sú dané dĺžky strán $a = 2$ cm a $b = 3$ cm. Uhol γ má veľkosť 60 stupňov.

U: Aký vzťah k zadaným stranám a a b má zadaný uhol γ ?



Ž: Je to uhol týmito stranami zovretý.

U: V takomto prípade môžeme priamo vypočítať dĺžku strany c . Použijeme **kosínusovú vetu** v tvare

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Všetky hodnoty premenných vo výraze na pravej strane sú zadané. Dosad' ich.

Ž: Za premennú a dosadím číslo 2, za b dosadím číslo 3 a uhol $\gamma = 60^\circ$. Pre druhú mocninu strany c dostávam

$$c^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ.$$

U: Hodnotu **funkcie kosínus** pre 60 stupňov ti prezradím. Platí

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Dopočítaj.

Ž: Za kosínus teda dosadím jednu polovicu. Ak navyše umocním čísla dva a tri a vynásobím čísla pri kosínuse, tak dostanem

$$c^2 = 4 + 9 - 12 \cdot \frac{1}{2}.$$

U: Po vykonaní početových operácií v číselnom výraze na pravej strane máme

$$4 + 9 - 6 = 7.$$

Takže druhá mocnina strany c bude rovná číslu 7:

$$c^2 = 7$$

Ž: **Dĺžka strany c** v trojuholníku bude **odmocnina z čísla sedem**. Teda

$$c = \sqrt{7} \text{ cm.}$$

Úloha 2: Vypočítajte dĺžku strany c v trojuholníku ABC , ak sú dané dĺžky strán $a = 1$ cm a $b = 4$ cm. Uhol γ má veľkosť 120 stupňov.

Výsledok: $c = \sqrt{21}$ cm

Príklad 3: Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC , ak sú dané dĺžky jeho strán $a = 6$ cm, $b = 11$ cm a $c = 7$ cm.

U: Keďže poznáme dĺžky všetkých strán v trojuholníku ABC , na výpočet veľkostí vnútorných uhlov použijeme **kosínusovú vetu**. Pre určenie uhla α použijeme jej vyjadrenie v tvare

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Vyjadri hodnotu **funkcie kosínus** pre uhol α .

Ž: Odčítam druhé mocniny strán b a c a mám

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos \alpha.$$

U: Vydelíme výrazom $-2bc$. Znamienko mínus zohľadníme vo výraze v čitateli. Tento výraz sa zmení na výraz k nemu opačný. Naznačenými úpravami dostávame

$$\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Ž: Dosadím zadané dĺžky strán, umocním, respektíve vynásobím čísla a dostávam

$$\cos \alpha = \frac{11^2 + 7^2 - 6^2}{2 \cdot 11 \cdot 7} = \frac{121 + 49 - 36}{154} = \frac{134}{154}.$$

U: Pre uhol α teda platí rovnosť $\cos \alpha = \frac{134}{154}$. Použitím kalkulačky určíme približnú hodnotu uhla α . Tá je

$$\alpha \approx 29,5^\circ.$$

Ž: Uhol β vypočítam rovnakým spôsobom.

U: Pozri sa ešte raz na vyjadrenie hodnoty **funkcie kosínus** pre uhol α , ktoré sme odvodili.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

V čitateli výrazu na pravej strane sa odčíta druhá mocnina strany, ktorá je oproti uhlu. Vo všetkých ostatných členoch figurujú strany vytvárajúce daný uhol.

Ž: To znamená, že premenné zamením. Pre uhol β dostávam

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

U: Po dosadení zadaných hodnôt budú výpočty analogické.

$$\cos \beta = \frac{6^2 + 7^2 - 11^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{36 + 49 - 121}{84}.$$

Ž: Pre kosínus uhla β dostaneme

$$\cos \beta = -\frac{36}{84}.$$

To znamená, že uhol β je tupý.

U: Jeho hodnotu určíme opäť použitím kalkulačky:

$$\beta = 115,4^\circ.$$

Ž: Zostáva nám ešte určiť podobným spôsobom uhol γ , pre ktorý platí

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

U: Máš pravdu. Dostali by sme pre uhol γ určitú hodnotu. Vtedy by sme správnosť počítania skontrolovali skúškou. Vieme, že **súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov** v trojuholníku je **180 stupňov**. My však túto vlastnosť využijeme na výpočet veľkosti uhla γ .

Ž: Pre uhol γ platí

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 29,5^\circ - 115,4^\circ = 35,1^\circ.$$

Uhol γ má veľkosť **35,1 stupňa**.

Príklad 4: V trojuholníku ABC poznáme pomer dĺžok jeho strán $a : b : c = 2 : 4 : 5$.
Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC .

U: Podľa zadaného pomeru strán $a : b : c = 2 : 4 : 5$ môžeme dĺžky strán trojuholníka ABC vyjadriť pomocou premennej x .

$$a = 2x, \quad b = 4x, \quad c = 5x,$$

kde x je kladné reálne číslo a predstavuje dĺžku jedného dielu.

Ž: Aha! Na stranu a pripadajú dva diely, na stranu b 4 diely a na stranu c 5 dielov. Ale nevieme, akú dĺžku má jeden diel, teda x .

U: S dĺžkami strán $2x$, $4x$, $5x$ pracuj tak, ako keby si mal ich konkrétne číselné hodnoty. Napríklad 6, 12, 15. Ako vypočítaš veľkosť uhla α , ak poznáš dĺžky všetkých strán trojuholníka?

Ž: Použijem **kosínusovú vetu**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

U: Pripočítame výraz $2bc \cos \alpha$ a odrátame druhú mocninu strany a , aby sme odtiaľ vyjadrili **kosínus** uhla α . Dostávame

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2.$$

Ž: Nakoniec vydelíme výrazom $2bc$. Uhol α vypočítame podľa vzorca

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

U: Teraz dosadíme tie pre teba problematické hodnoty strán. Sú vyjadrené pomocou premennej x .

Ž: Po dosadení dostávam

$$\cos \alpha = \frac{(4x)^2 + (5x)^2 - (2x)^2}{2 \cdot (4x) \cdot (5x)}.$$

V čitateli umocním a v menovateli vynásobím

$$\cos \alpha = \frac{16x^2 + 25x^2 - 4x^2}{40x^2}.$$

U: Rád by som ťa pochválil. Správne si použil pravidlo pre umocňovanie súčinu dvoch čísel

$$(ab)^2 = a^2 \cdot b^2.$$

Pokračujme však v úpravách číselného výrazu na pravej strane. Po sčítaní a odčítaní v čitateli zlomku dostaneme $37x^2$. Teda

$$\cos \alpha = \frac{37x^2}{40x^2}.$$

Ž: Zaujímavé. *Premenná x vypadne. Pre kosínus uhla α platí*

$$\cos \alpha = \frac{37}{40}.$$

Na určenie veľkosti uhla musím použiť kalkulačku.

U: Áno. **Uhol α má približnú veľkosť 22,3 stupňa.**

Ž: *To, že hodnota výrazu pre kosínus uhla α nezávisí od premennej x je iba náhoda? Alebo je to tak stále?*

U: Bude tak stále. Ten istý pomer strán ako v našom zadaní má nekonečne veľa trojuholníkov. Sú si podobné. A ako vieme, všetky navzájom **podobné trojuholníky** majú rovnako veľké zodpovedajúce si uhly.

Ž: *Takže ďalej môžem v riešení pokračovať aj tak, že za dĺžky strán zoberiem čísla 2, 4 a 5.*

U: Využi to na určenie veľkosti uhla β . Platí analogický vzorec ako pre výpočet uhla α .

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Dosaď číselné hodnoty.

Ž: *Po dosadení dostávam*

$$\cos \beta = \frac{2^2 + 5^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 5}.$$

Umocním a v menovateli vynásobím, takže

$$\cos \beta = \frac{4 + 25 - 16}{20}.$$

Keďže $\cos \beta = \frac{13}{20}$, veľkosť uhla β bude 49,5 stupňa.

U: Veľkosť uhla γ vypočítame zo vzťahu pre súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Ž: *Potom*

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 22,3^\circ - 49,5^\circ = 108,2^\circ.$$

U: **Uhol γ má veľkosť 108,2 stupňa.**

Príklad 5: Rozhodnite, či trojuholník s dĺžkami strán $7x$, $8x$ a $13x$, kde $x \in \mathbb{R}^+$, je tupouhlý.

Ž: Čo znamená, že trojuholník je tupouhlý?

U: Veľkosť jedného z jeho vnútorných uhlov je **väčšia ako 90 stupňov**. Tento uhol sa nazýva **tupý uhol**.

Ž: Takže musím vypočítať veľkosti všetkých vnútorných uhlov trojuholníka?

U: Stačí, ak vypočítame veľkosť jedného z nich. Vieme, že súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je 180° . Trojuholník môže mať najviac jeden tupý uhol.

Ž: Odkiaľ viem, ktorý z troch uhlov mám vypočítať?

U: Pre každý trojuholník platí vlastnosť: **oproti dlhšej strane leží väčší uhol**.

Ž: Čo všetko som pozabúdal. Teraz je mi to už jasné. Najväčší uhol v našom prípade bude oproti strane s dĺžkou $13x$, lebo je to najdlhšia zadaná strana. Iba tento uhol môže byť tupý.

U: Označme trojuholník ABC a jeho strany $a = 7x$, $b = 8x$ a $c = 13x$.

Ž: Takže budem počítat uhol γ . Na výpočet použijem **kosínusovú vetu** v tvare

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Vyjadrim odtiaľ $\cos \gamma$. Najskôr k výrazom na oboch stranách rovnice pripočítam výraz $2ab \cos \gamma$. Vtedy dostanem

$$c^2 + 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2.$$

U: Odčítame druhú mocninu strany c a nakoniec vydělíme výrazom $2ab$. Pre uhol γ platí

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Môžeš dosadiť zadané hodnoty.

Ž: Strana a je výraz $7x$, $b = 8x$ a $c = 13x$. Po dosadení dostávam

$$\cos \gamma = \frac{(7x)^2 + (8x)^2 - (13x)^2}{2 \cdot (7x) \cdot (8x)}.$$

V čitateli zlomku umocním, v menovateli vynásobím a mám

$$\cos \gamma = \frac{49x^2 + 64x^2 - 169x^2}{112x^2}.$$

U: Ak sčítame a odčítame členy vo výraze v čitateli zlomku, dostaneme výsledok

$$\cos \gamma = -\frac{56x^2}{112x^2} = -\frac{1}{2},$$

pretože predposledný zlomok môžeme krátiť výrazom $56x^2$.

Ž: Teraz už ani nemusím dopočítat veľkosť uhla γ .

U: Prečo?

Ž: Vyšiel záporný kosínus. *Hodnota funkcie kosínus je záporná iba pre tupé uhly.* Uhol γ je preto väčší ako 90 stupňov. Teda zadaný trojuholník **je tupouhlý**.

U: Správne. Pre úplnosť uvediem, že uhol γ má v tomto prípade 120 stupňov. Vtedy je hodnota funkcie kosínus rovná reálnemu číslu $-\frac{1}{2}$.

Úloha 5: Rozhodnite, či trojuholník s dĺžkami strán $5x$, $7x$ a $8x$, kde $x \in \mathbb{R}^+$, je tupouhlý.

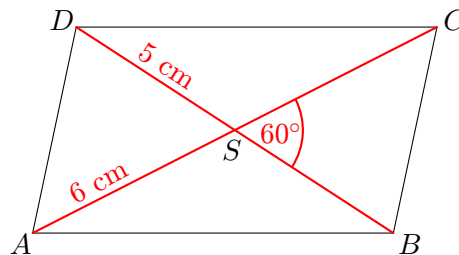
Výsledok: Trojuholník je ostrouhlý.

Príklad 6: Uhlopriečky rovnobežníka $ABCD$ majú dĺžku $|AC| = 6$ cm, $|BD| = 5$ cm a zvierajú uhol 60 stupňov. Vypočítajte dĺžky strán rovnobežníka.

U: Čo je rovnobežník?

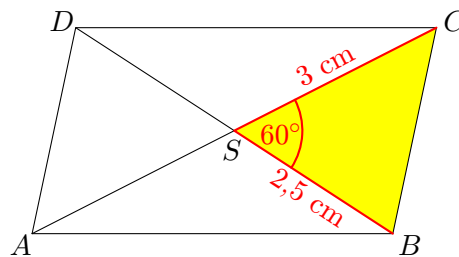
Ž: Rovnobežník je štvoruholník, ktorého protilahlé strany sú rovnobežné a majú rovnakú dĺžku.

U: Z toho vyplýva, že našou úlohou je vypočítať veľkosti dvoch susedných strán. Napríklad dĺžky strán AB a BC . Načrtneme obrázok.



Ž: Vypočítať dĺžku strany BC nebude ťažké. Využijem trojuholník BSC , v ktorom poznám dve strany a uhol nimi zovretý.

U: Máš pravdu. Uhlopriečky v rovnobežníku sa rozpoľujú. Preto dĺžka úsečky SC je **polovicou** uhlopriečky AC , teda $|SC| = 3$ cm. Analogicky platí $|BS| = \frac{|BD|}{2} = 2,5$ cm.



Ž: Stačí všetky tieto hodnoty dosadiť do **kosínusovej vety**

$$|BC|^2 = |SC|^2 + |SB|^2 - 2 \cdot |SC| \cdot |SB| \cdot \cos |\sphericalangle CSB|.$$

Po dosadení dostávam

$$|BC|^2 = 3^2 + 2,5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2,5 \cdot \cos 60^\circ.$$

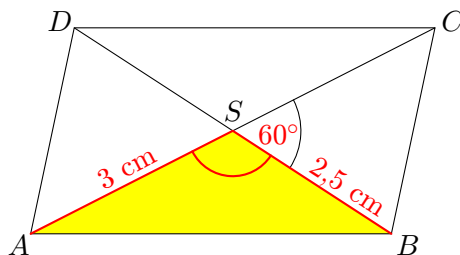
U: Vieme, že $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Zároveň umocníme a vynásobíme čísla na pravej strane rovnice. Dostávame

$$|BC|^2 = 9 + 6,25 - 15 \cdot \frac{1}{2}.$$

Ž: Dĺžka strany BC bude odmocnina z čísla 7,75.

$$|BC| = \sqrt{9 + 6,25 - 7,5} = \sqrt{7,75} \text{ cm.}$$

U: Ani výpočet dĺžky strany AB nebude náročný. Zoberieme trojuholník ASB , v ktorom poznáme dve strany AS a BS . Sú to polovice uhlopriečok. Poznáme aj uhol týmito stranami zovretý.



Ž: Uhly ASB a BSC tvoria dvojicu **susedných uhlov**. Súčet ich veľkostí je **180 stupňov**. Preto

$$|\sphericalangle ASB| = 180^\circ - |\sphericalangle BSC| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

U: Na výpočet strany AB použijeme opäť **kosínusovú vetu**. Bude mať tvar

$$|AB|^2 = |AS|^2 + |BS|^2 - 2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \cos |\sphericalangle ASB|.$$

Dosaď hodnoty a vypočítaj.

Ž: Bude to analogické ako pri výpočte strany BC . Zmenila sa iba veľkosť uhla. Po dosadení dostávam

$$|AB|^2 = 3^2 + 2,5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2,5 \cdot \cos 120^\circ = 9 + 6,25 - 15 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$

lebo **kosínus 120 stupňov je $-\frac{1}{2}$** .

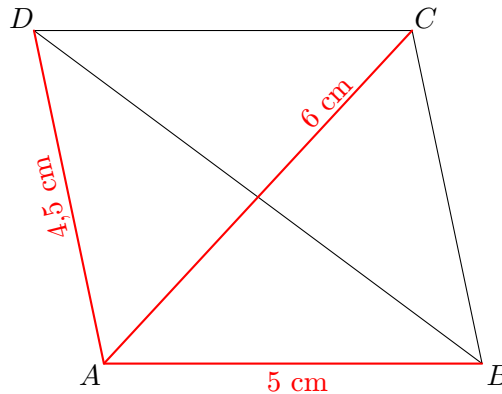
U: Výsledkom bude druhá odmocnina z čísla 22,75.

$$|AB| = \sqrt{9 + 6,25 + 7,5} = \sqrt{22,75} \text{ cm.}$$

Dĺžka strany AB rovnobežníka $ABCD$ je $\sqrt{22,75}$ cm.

Príklad 7: Dané sú dĺžky úsečiek $|AB| = 5 \text{ cm}$, $|AD| = 4,5 \text{ cm}$ a $|AC| = 6 \text{ cm}$ v rovnobežníku $ABCD$. Vypočítajte dĺžku uhlopriečky BD .

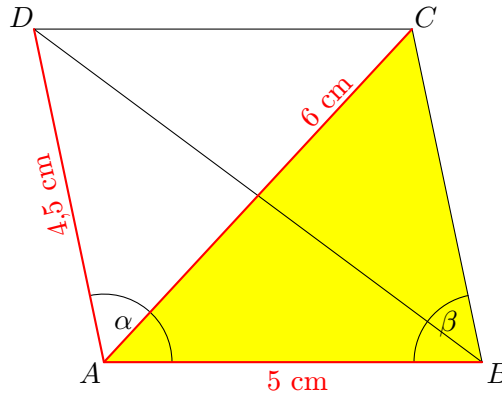
Ž: Urobím náčrt a vyznačím v ňom, čo je dané.



U: Dĺžku uhlopriečky BD vypočítame z trojuholníka ABD podľa **kosínusovej vety**. Musíme však poznať **uhol α zovretý stranami AB a AD známej dĺžky**.

Ž: Ako ho vypočítame, keď v tomto trojuholníku okrem dvoch strán nepoznáme žiaden uhol?

U: Máš pravdu. V trojuholníku ABD nepoznáme žiadny uhol. Ale uhol α vypočítame, ak budeme poznať uhol β v trojuholníku ABC .



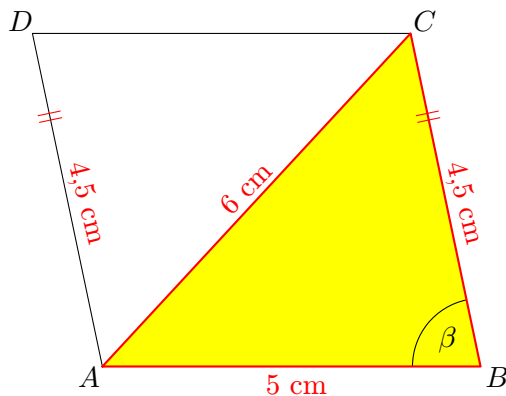
Ž: Ako tieto uhly spolu súvisia?

U: V každom rovnobežníku je súčet veľkostí dvoch vnútorných uhlov priliehajúcich k tej istej strane rovný **180 stupňom**. Platí

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Na výpočet veľkosti uhla β poznáme v trojuholníku ABC dĺžky všetkých strán.

Ž: Aha! Strana BC je rovnako dlhá ako strana AD . Každé dve **protiľahlé strany rovnobežníka** majú rovnakú dĺžku.



Ž: Podľa **kosínusovej vety** pre uhol β v trojuholníku ABC platí vzťah

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos \beta.$$

Vyjadri odtiaľ $\cos \beta$.

Ž: Najskôr pripočítam výraz $2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos \beta$ a odrátam druhú mocninu $|AC|^2$. Dostávam

$$2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos \beta = |AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2.$$

Nakoniec vydelím výrazom $2 \cdot |AB| \cdot |BC|$.

$$\cos \beta = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |BC|}.$$

Dosadím číselné hodnoty a vypočítam uhol β .

U: Nechajme vyjadrenie pre uhol β zatiaľ vo všeobecnom tvare. Číselné hodnoty budeme dosadzovať až do výsledného vzťahu pre dĺžku uhlopriečky BD . Poďme k jej vyjadreniu. Povedali sme, že využijeme trojuholník ABD a kosínusovú vetu:

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos \alpha.$$

Ž: Dobré, ale uhol α bez určenia veľkosti uhla β nebudeme poznať.

U: Už na začiatku riešenia úlohy sme uviedli, že súčet ich veľkostí je 180 stupňov. Teda

$$\alpha = 180^\circ - \beta.$$

Pre takéto uhly platí jedna z vlastností **funkcie kosínus**

$$\cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta.$$

Preto

$$\cos \alpha = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta.$$

Ž: To znamená, že do vzorca $|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos \alpha$ za kosínus uhla α dosadíme už nami odvodený vzorec $\cos \beta = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |BC|}$. Samozrejme so znamienkom mínus.

U: Povedal si v podstate celú pointu. Preto z vyjadrenia

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos \alpha$$

po dosadení dostávame

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \left(-\frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |BC|} \right).$$

Ž: Strany AD a BC majú rovnakú dĺžku. Teda výrazy $2 \cdot |AB| \cdot |AD|$ a $2 \cdot |AB| \cdot |BC|$ vykrátíme.

U: Pre uhlopriečku BD po krátení dostaneme vyjadrenie v tvare

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 + |AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2,$$

pričom $|AD| = |BC| = 4,5$ cm. Výsledný tvar bude

$$|BD|^2 = 2 \cdot |AB|^2 + 2 \cdot |AD|^2 - |AC|^2.$$

Ž: Teraz je to už ľahké. Stačí dosadiť číselné hodnoty zo zadania úlohy a dostanem

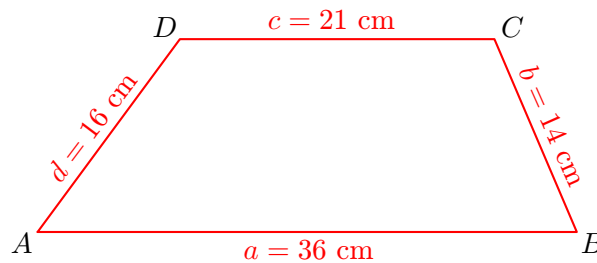
$$|BD|^2 = 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 4,5^2 - 6^2 = 50 + 40,5 - 36 = 53,5.$$

U: Uhlopriečka BD má dĺžku $\sqrt{53,5}$ centimetra.

Príklad 8: Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov lichobežníka $ABCD$, ak sú dané dĺžky jeho strán $a = 36$ cm, $b = 14$ cm, $c = 21$ cm a $d = 16$ cm.

U: Čím sa vyznačuje lichobežník?

Ž: Je to štvoruholník, ktorý má dve protilahlé strany navzájom rovnobežné. Nazývame ich základne lichobežníka. V našom prípade sú to strany a a c .



U: Okrem štyroch strán má lichobežník aj štyri vnútorné uhly. Stačí, ak vypočítame veľkosti uhlov α a β . Veľkosti zvyšných dvoch uhlov s nimi súvisia.

Ž: Ako?

U: Keďže základne a a c sú rovnobežné, uhly α a δ tvoria **dvojicu priľahlých uhlov** na priečke AD rovnobežných priamok. Ako vieme, **súčet ich veľkostí** je rovný **180 stupňom**. Platí

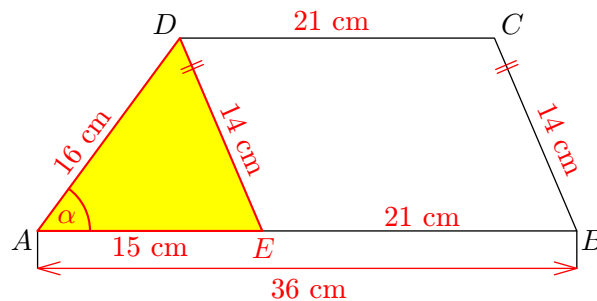
$$\alpha + \delta = 180^\circ.$$

Ž: Čiže, ak určíme veľkosť uhla α , uhol δ vypočítame zo vzťahu $\delta = 180^\circ - \alpha$. Podobný vzťah platí aj pre uhly β a γ , preto $\gamma = 180^\circ - \beta$.

U: Výpočet veľkostí uhlov môžeme urobiť na základe kosínusovej alebo sínusovej vety. Ale tie, ako vieme, platia iba v trojuholníku.

Ž: Tak si lichobežník rozdelím výškami z bodov C a D na dva trojuholníky a obdĺžnik.

U: Tento spôsob delenia je dobrý, ak lichobežník je rovnoramenný. To bohužiaľ v našom prípade neplatí. V trojuholníkoch by sme mali dve strany neznámej dĺžky. Vhodnejší je spôsob rozdelenia lichobežníka na **trojuholník a rovnobežník**.



Ž: Dobrá finta. Vďaka rovnobežnosti sa strana BC prenesie na stranu ED , preto sú ich dĺžky rovnaké:

$$|ED| = |BC| = 14 \text{ cm.}$$

To isté platí o dĺžkach strán EB a DC . Potom dĺžka strany AE v trojuholníku AED je rozdielom základní lichobežníka.

$$|AE| = |AB| - |DC| = 36 - 21 = 15.$$

U: V trojuholníku AED poznáme dĺžky všetkých jeho strán. Uhol α vypočítame na základe **kosínusovej vety**. Tá má pre tento trojuholník tvar

$$|DE|^2 = |AE|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AE| \cdot |AD| \cdot \cos \alpha.$$

Vyjadri odtiaľ **kosínus** uhla α .

Ž: Pripočítam výraz $2 \cdot |AE| \cdot |AD| \cdot \cos \alpha$ a odrátam druhú mocninu strany DE . Dostávam

$$2 \cdot |AE| \cdot |AD| \cdot \cos \alpha = |AE|^2 + |AD|^2 - |DE|^2.$$

Nakoniec vydelím výrazom $2 \cdot |AE| \cdot |AD|$ a mám

$$\cos \alpha = \frac{|AE|^2 + |AD|^2 - |DE|^2}{2 \cdot |AE| \cdot |AD|}.$$

U: Po dosadení číselných hodnôt dostávame

$$\cos \alpha = \frac{15^2 + 16^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 16} = \frac{225 + 256 - 196}{30 \cdot 16},$$

pričom sme vypočítali druhé mocniny.

Ž: V čitateli zlomku dostaneme číslo 285, v menovateli číslo 480. Zlomok $\frac{285}{480}$ sa dá krátiť číslom 15. Po krátení dostávame

$$\cos \alpha = \frac{19}{32}.$$

Veľkosť uhla určím na kalkulačke.

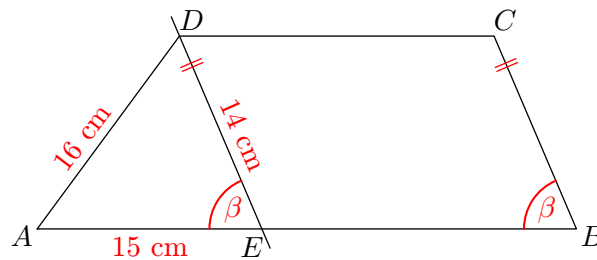
U: Približná hodnota veľkosti uhla α je $\alpha \approx 53,58^\circ$.

Ž: Uhol δ vypočítam odčítaním tejto hodnoty od hodnoty 180 stupňov.

$$\delta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 53,58^\circ = 126,42^\circ.$$

U: Veľkosť vnútorného uhla β v lichobežníku $ABCD$ určíme tiež z trojuholníka AED .

Ž: Máte pravdu. Uhly AED a ABC tvoria dvojicu **súhlasných uhlov**. Majú rovnakú veľkosť, lebo priamky BC a DE sú rovnobežné. Teda, v trojuholníku ADE je uhol beta pri vrchole E .



U: V trojuholníku ADE je protiľahlou stranou k uhlu β strana AD . Výpočet uhla β bude teda rovnaký ako v prípade uhla α . Tam bola protiľahlou k uhlu α strana DE . Preto platí

$$\cos \beta = \frac{|AE|^2 + |ED|^2 - |AD|^2}{2 \cdot |AE| \cdot |ED|}.$$

Číselné výpočty už urob sám.

Ž: Po dosadení číselných hodnôt dostávam

$$\cos \beta = \frac{15^2 + 14^2 - 16^2}{2 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{225 + 196 - 256}{30 \cdot 14} = \frac{165}{420}.$$

Po krátení posledného zlomku číslom 15 bude pre hodnotu funkcie kosínus uhla β platiť

$$\cos \beta = \frac{11}{28}.$$

U: Približná hodnota uhla β , určená pomocou kalkulačky, je $66,87^\circ$.

Ž: Potom pre uhol γ platí

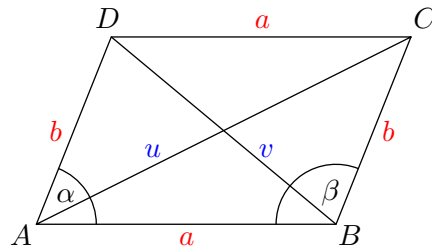
$$\gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 66,87^\circ = 113,13^\circ.$$

Príklad 9: Dokážte, že pre dĺžky strán a a b rovnobežníka $ABCD$ a jeho uhlopriečky $u = |AC|$ a $v = |BD|$ platí:

$$u^2 + v^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Ž: Načrtnem rovnobežník a farebne vyznačím jeho zadané strany a uhlopriečky.

U: V rovnobežníku $ABCD$ zároveň vyznačíme dva uhly. Uhol DAB označíme α a uhol ABC označíme ako uhol β .



U: Ako vieme, druhé mocniny dĺžok úsečiek sa vyskytujú v zápise Pytagorovej alebo kosínusovej vety. Tá prvá platí iba pre pravouhlý trojuholník, ale kosínusová veta platí pre ľubovoľný trojuholník. Keďže vo vzťahu, ktorý máme dokázať, takéto druhé mocniny konkrétnych úsečiek figurujú, budeme musieť niečo z toho využiť.

Ž: Keď sa pozriem na rovnobežník $ABCD$, vidím v ňom dva trojuholníky, ktoré so stranami a uhlopriečkami rovnobežníka súvisia. V každom z nich ste navyše vyznačili po jednom uhle. V trojuholníku DAB je to uhol α , a v trojuholníku ABC uhol β .

U: Je teda zrejmé, že použijeme **kosínusovú vetu**. Pre trojuholník DAB je uhlopriečka v rovnobežníka stranou oproti uhlu α . Preto platí

$$v^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

Ž: Oproti uhlu β v trojuholníku ABC je strana u . Strany a a b vytvárajú uhol β . Kosínusová veta pre tento trojuholník bude mať tvar

$$u^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta.$$

Ako to dáme dohromady?

U: V každom rovnobežníku je **súčet veľkostí uhlov priľahlých** k tej istej strane rovný 180 stupňom. Platí to aj pre uhly α a β v našom prípade. Teda

$$\beta = 180^\circ - \alpha.$$

Ž: To znamená, že kosínusovú vetu pre trojuholník ABC môžeme zapísať v tvare

$$u^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha).$$

To sa dá ešte ďalej upraviť. Spomínam si totiž, že platí vzťah

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

U: Môžem ňá iba pochváliť. Vyjadrenie kosínusovej vety pre trojuholník ABC bude mať teda tvar

$$u^2 = a^2 + b^2 - 2ab(-\cos \alpha).$$

Zároveň pripomeniem, čo platilo v trojuholníku DAB :

$$v^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

Ž: Aby sme dostali vzťah medzi stranami a uhlopriečkami, stačí sčítať obe rovnice. Dostaneme

$$u^2 + v^2 = a^2 + b^2 - 2ab(-\cos \alpha) + a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

Výrazy s **kosínusmi** sa odčítajú. Dajú nulu.

U: Zvyšné členy na pravej strane dajú požadovaný výsledok

$$u^2 + v^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Tým je dôkaz hotový.