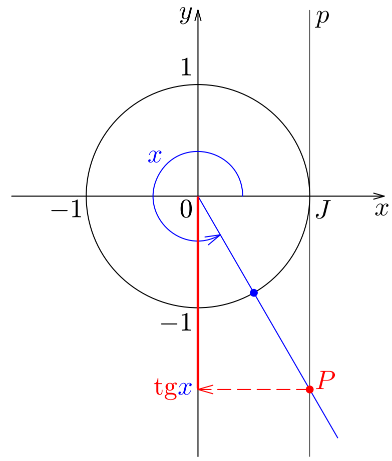
Grafy funkcií tangens a kotangens

RNDr. Marián Macko

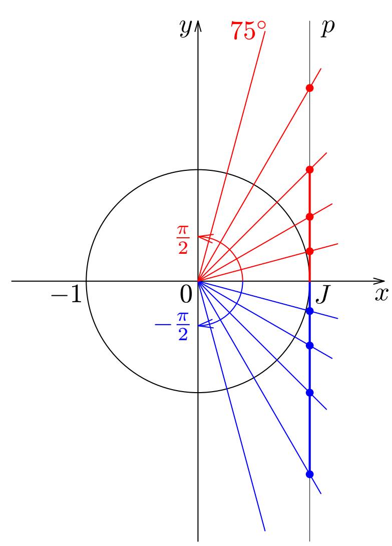
U: Dobrú predstavu o ***grafe funkcie*** $f: y = \mathrm{tg}x$ získame z jednotkovej kružnice prenesením hodnôt funkcie tangens pre niekoľko zvolených hodnôt argumentu. Ako vieme, ***funkčné hodnoty pre tangens sú určené y-ovou súradnicou priesečníka*** priamky OM a dotyčnice p ku kružnici v bode $J[1;0]$. Bod M na jednotkovej kružnici je priradený známym spôsobom reálnemu číslu x.



U: Opäť nebude nutné hľadať graf na celom definičnom obore, ale iba jeho minimálnej časti. Spomínaš si, ktorá vlastnosť funkcie tangens to dovoľuje?

Ž: *Funkcia je periodická s najmenšou periódou* π*. Keďže sme jej vlastnosti skúmali na* **intervale** $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$*, predpokladám, že aj graf nájdeme najskôr iba na tomto intervale.*

U: Máš pravdu. Interval zodpovedá bodom na jednotkovej kružnici vo IV. a v I. kvadrante. Hodnoty argumentu pre body vo IV. kvadrante berieme ako záporné. Ak rozdelíme túto polkružnicu na 12 rovnakých častí, mal by to byť dostatočný počet hodnôt pre výsledný graf. Sleduj obrázok.

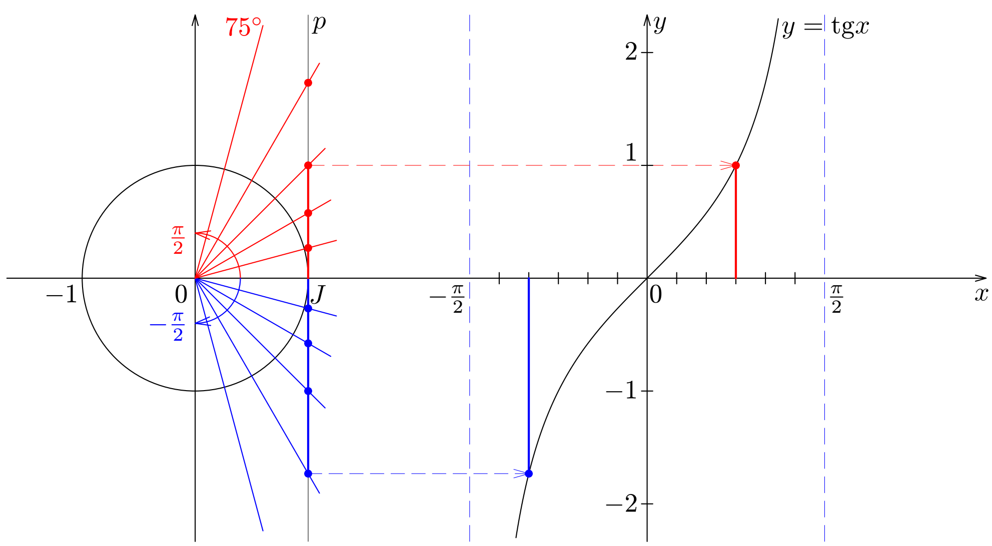


Ž: *Pre niektoré hodnoty delenia nedostaneme na dotyčnici bod.*

U: ***y-ová súradnica*** bodu na dotyčnici, ktorá prislúcha napríklad uhlu $75°$ ***je veľká***. Presahuje možnosti nášho zobrazovania. Na druhej strane dáva informáciu o tom, že funkčné hodnoty narastajú neobmedzene do nekonečna, ak sa argument blíži k hodnote $\frac{\pi}{2}$.

Ž: *Rozumiem. Podobný problém je aj pri hodnote uhla $-75°$. V tomto prípade je funkčná hodnota záporná.*

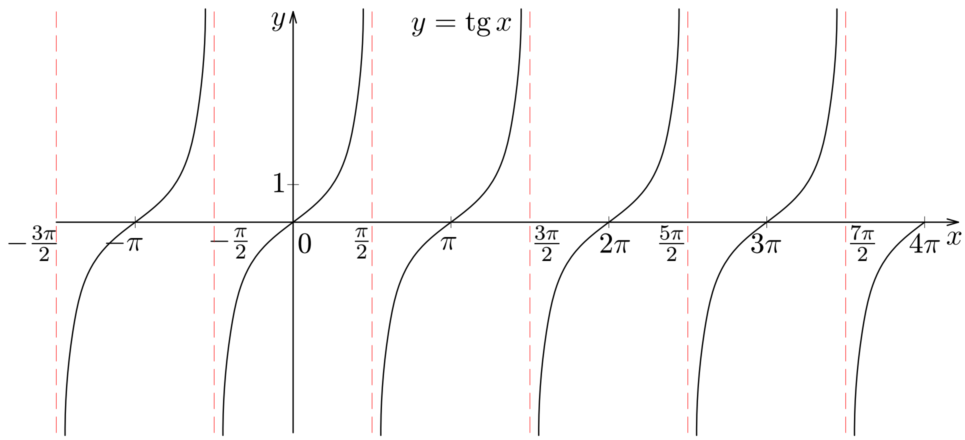
U: Máš pravdu. Nie pre všetky zvolené hodnoty uhlov vieme nájsť hodnotu funkcie tangens. Tých niekoľko bodov, ktoré sme vedeli zostrojiť, spojíme. Získame tak časť grafu funkcie tangens na základnom intervale.



Ž: *Podobá sa na graf funkcie $y = x^3$.*

U: Iba podobá. Sú to rozdielne funkcie, a teda aj grafy. Pre funkciu $y = x^3$ sú hodnoty na grafe priradené všetkým reálnym číslam, ale pre funkciu tangens zatiaľ iba pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. ***Výsledný graf pre funkciu tangens*** dostaneme, ak ***získanú časť zopakujeme na každom intervale*** $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ pre všetky celé čísla k.

Ž: *Posunieme interval $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ o celočíselné násobky π doprava a doľava.*



U: Určite si si v obrázku všimol priamky vyznačené čiarkovane červenou farbou.

Ž: *Pri niektorých iných funkciách to zvykli byť* **asymptoty**.

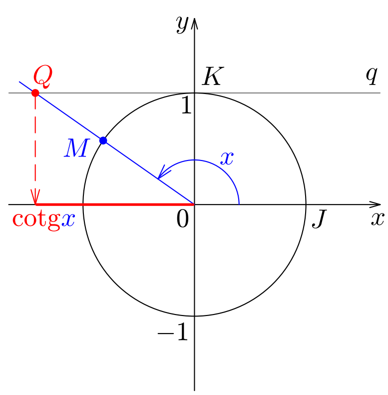
U: Máš pravdu. Priamky vyznačené čiarkovane červenou farbou sú ***asymptoty*** grafu funkcie tangens a ***sú nutnou súčasťou grafu***. Vieš, aký majú predpis?

Ž: *Majú predpis* $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, *kde* k *je celé číslo, lebo funkcia tangens nie je pre tieto hodnoty* x *definovaná. Ako sa nazýva graf?*

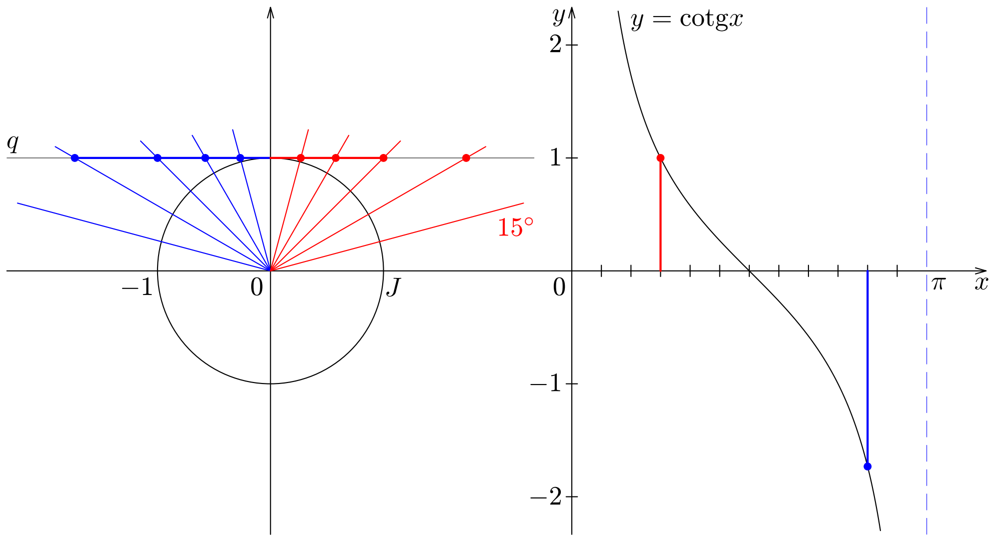
U: Graf funkcie tangens nazývame ***tangentoida***. Pomenovania grafov sú pre goniometrické funkcie odvodené od ich názvu.

U: Podobným spôsobom sa môžeme dopracovať ku grafu funkcie kotangens. Pripomeň, ako na základe jednotkovej kružnice odčítame hodnotu kotangensu.

Ž: *Sú to* x*-ové súradnice bodov, ktoré získame ako priesečníky dotyčnice ku kružnici v bode* $K\,[0;1]$ *a koncového ramena uhla, ktorý odpovedá hodnote* x.

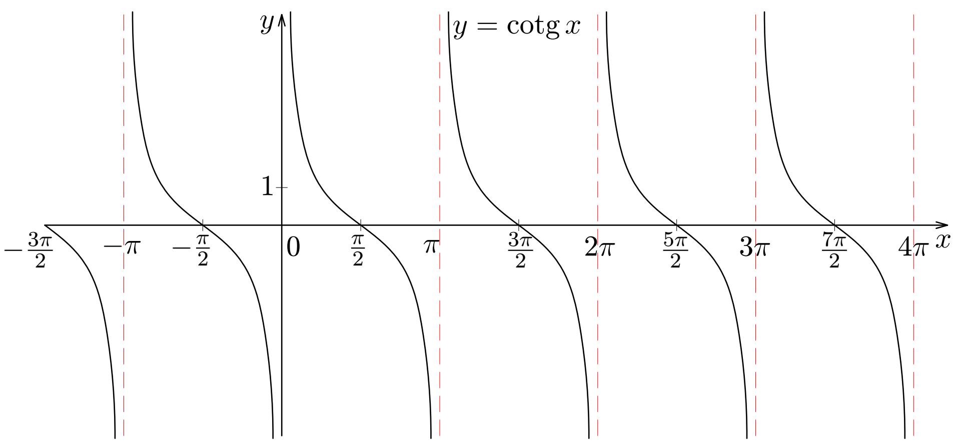


U: Teraz budeme prenášať ***x-ovú súradnicu***. Interval, na ktorom nájdeme základnú časť grafu funkcie kotangens, bude $(0;\pi)$. Delenie polkružnice ponecháme ako v prípade tangens na 12 častí.



Ž: *Potvrdilo sa, že kotangens je na tomto intervale neohraničená funkcia a klesajúca.*

U: Ak zostrojíme takú istú krivku na každom intervale $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, kde k je celé číslo, dostaneme výsledný graf funkcie kotangens, ktorý nazývame ***kotangentoida***.



U: Aj k tomu grafu patria ***asymptoty***, na obrázku vyznačené opäť čiarkovane červenou farbou. Pokus sa určiť ich predpis.

Ž: $x = k\pi$, *kde k je celé číslo, lebo reálne čísla $k\pi$ nepatria do definičného oboru funkcie kotangens.*

U: Základné grafy máme. Čo všetko sa s nimi dá v súradnicovej sústave urobiť?

Ž: *Dajú sa* **posúvať** *tak v smere osi x, ako aj y,* **preklápať podľa osi** *x, môže sa* **zmeniť perióda**. *Ale to posledné potrebujem vysvetliť.*

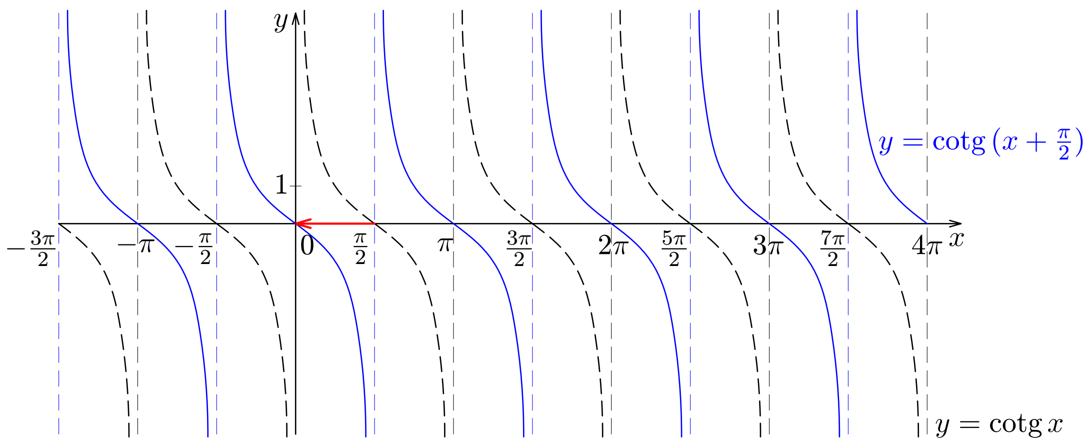
U: K tomu sa postupne dostaneme. Nespomenul si, že sa hodnoty na grafe môžu meniť rýchlejšie alebo pomalšie, že hodnoty môžu byť iba nezáporné, ak do výrazu v predpise funkcie pridáme absolútnu hodnotu atď. Toto všetko dosiahneme vytvorením zloženej funkcie. Napríklad: $f : y = \operatorname{cotg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Jej graf ***dostaneme posunutím grafu funkcie*** $f_1 : y = \operatorname{cotg} x$ ***pozdĺž osi*** x ***o*** $\frac{\pi}{2}$ ***doľava***.

Ž: *Nikdy si nie som celkom istý, či doľava alebo doprava.*

U: Situáciu, ktorá nastane na grafe základnej funkcie $y = \mathrm{cotg} x$ pre $x = 0$, dostaneš pre novú funkciu f vtedy, ak aj jej agrument bude nula.

Ž: *Teda* $x + \frac{\pi}{2} = 0$, *z čoho dostanem* $x = -\frac{\pi}{2}$.

U: To čo nastalo pre graf elementárnej funkcie $y = \mathrm{cotg} x$ v bode $x = 0$, nastane pre zloženú funkciu pre $x = -\frac{\pi}{2}$. Bod $[0; 0]$ sa posunie do bodu $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ a bod $\left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$ do bodu $[0; 0]$. Graf sa posunie doľava.

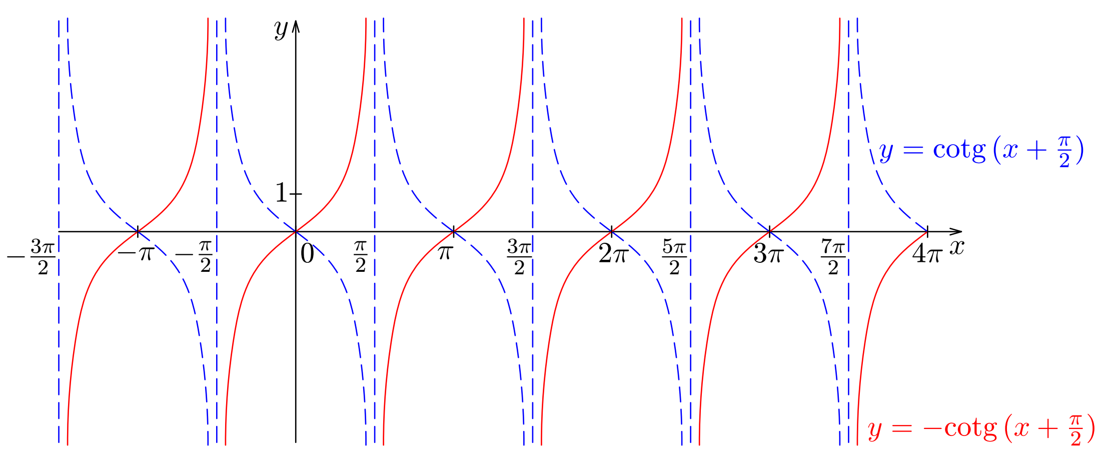


U: Pokračujme vo vytváraní zloženej funkcie. Pridajme jedno znamienko mínus, vytvorme (-1)-násobok funkcie f:

$$h : y = -\mathrm{cotg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ž: *Hodnoty funkcie sa zmenia na opačné.*

U: Grafy funkcií f ***a*** h ***sú osovo súmerné podľa osi*** x.
Graf funkcie f preklopíme podľa osi x.



Ž: *Zaujímavé. Dostali sme tangens.*

U: Pre prípustné hodnoty x platí: $\mathrm{tg} x = -\mathrm{cotg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
Niektoré zložené funkcie môžu vyjadrovať iné jednoduchšie funkcie. K tomuto zisteniu nám zatiaľ najlepšie poslúžia grafy.

Ž: *Potom musí platiť aj:* $\mathrm{cotg} x = -\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

U: Áno, je to symetrický vzťah. Funkcie tangens a kotangens sú navzájom dopĺňajúce sa funkcie.

U: Obe uvedené funkcie sú príkladom zloženej funkcie v tvare:

$$y = a \cdot \mathrm{tg}\,[b\,(x + c)] + d$$

$$y = a \cdot \mathrm{cotg}\,[b\,(x + c)] + d$$

kde $a;\ b;\ c;\ d \in R;\ a;\ b \neq 0$.
Zdôvodnenie, prečo $a;\ b \neq 0$ je analogické ako pri funkciách sínus a kosínus.
Každý z týchto koeficientov má svoj geometrický význam:
1. ***koeficient*** d ***posúva graf pozdĺž osi*** y nahor alebo nadol,
2. ***koeficient*** c ***posúva graf pozdĺž osi*** x doprava alebo doľava,
3. ***koeficient*** b ***mení periódu***,
4. ***koeficient*** a ***graf naťahuje alebo skracuje v smere osi*** y***, a naviac, ak je*** $a < 0$***, tak ten graf aj preklopí okolo osi*** x***.***

Ž: *Väčšina z týchto koeficientov je mi jasná, lebo sa objavuje aj pri iných funkciách. Čo je nové, to je b, ktoré mení periódu. Mohli by ste vysvetliť ako?*

U: Perióda sa zmení na $p = \frac{\pi}{|b|}$.

Ž: *Prečo?*

U: Ak si zoberieš funkciu $y = \mathrm{cotg} x$***, jej základná časť je na intervale*** $(0; \pi)$, čo je interval dĺžky najmenšej periódy. Znamená to, že argument x je väčší ako nula, ale zároveň menší ako π.
Aj pre funkciu $y = \mathrm{cotg}(bx)$ ***musí byť argument*** bx ***z toho istého intervalu***: $0 <$ $< |b|x < \pi$,
takže pre premennú x platí: $0 < x < \frac{\pi}{|b|}$. Interval pre základnú časť má teda dĺžku $\frac{\pi}{|b|}$ a to je teraz ***perióda funkcie*** $y = \mathrm{cotg}(bx)$.

Ž: *Prečo ste zobrali absolútnu hodnotu?*

U: Pre záporné b zohľadníme ešte nepárnosť funkcie, a mínus pred funkciou ovplyvní koeficient a. Sleduj na príklade:
Predpis funkcie $f : y = 2\mathrm{cotg}(-3x) = -2\mathrm{cotg} 3x$ sme upravili, lebo funkcia je nepárna. Zápornosť koeficienta b sa prenáša do koeficienta a. Periódu mení $|b|$.

Ž: *Mám ešte jednu otázku. Prečo ste ostatné koeficienty neuvažovali?*

U: Neovplyvňujú periódu. Neurčujú spôsob zmeny nezávislej premenenej x. Iba súčin bx hovorí, či sa táto premenná bude meniť rýchlejšie alebo pomalšie.

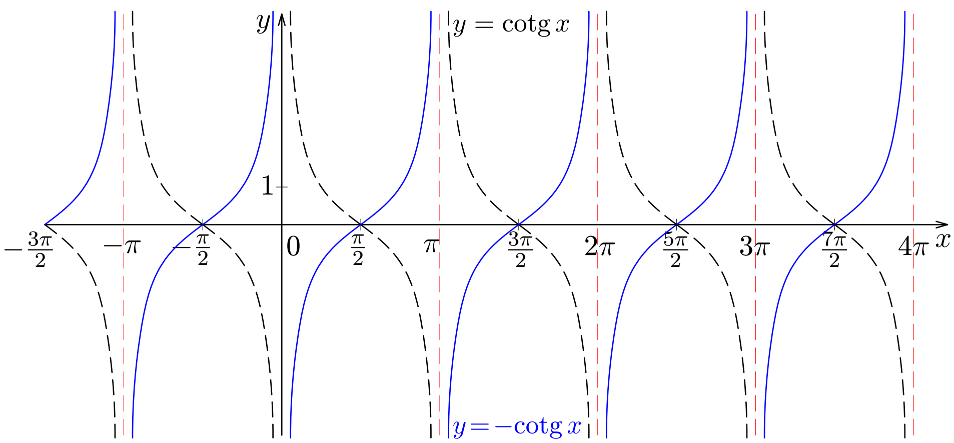
Ž: *Dobre, pochopil som. Vráťme sa k perióde. Kedy bude väčšia, kedy menšia?*

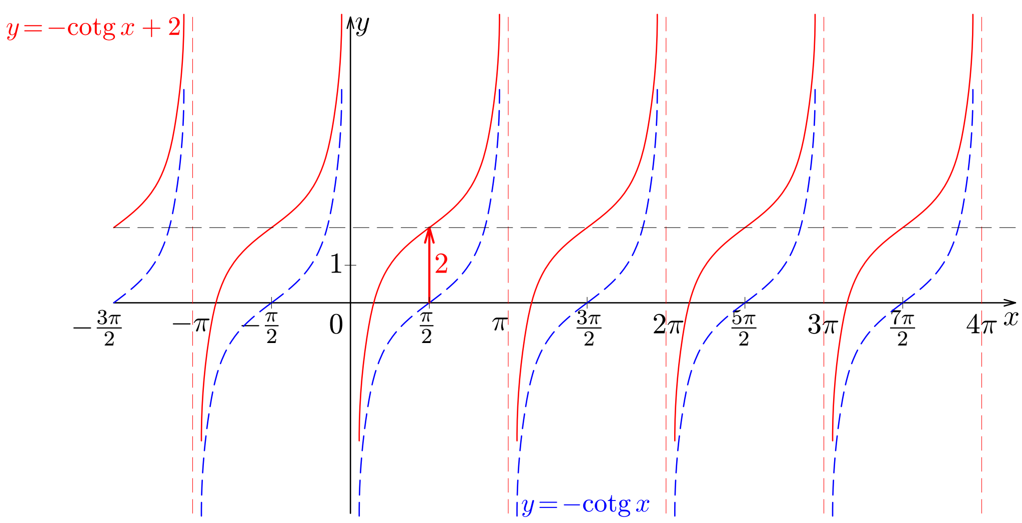
U: ***Ak*** $|b| > 1$***, perióda sa*** $|b|$***-krát zmenší***, graf danej funkcie sa v smere osi x zhustí,
ak $|b| < 1$***, perióda sa*** $\frac{1}{|b|}$***-krát zväčší***, graf danej funkcie sa v smere osi x zriedi, teda natiahne,
ak $|b| = 1$, perióda sa nezmení. Také boli aj dve funkcie, ktoré sme uviedli.

Príklad 1: *Načrtnite graf funkcie $f: y = -\mathrm{cotg}x + 2$. Určte periódu funkcie a priesečníky grafu so súradnicovými osami.*

U: Načrtnúť graf zadanej funkcie by pre teba nemal byť problém. To, aké zmeny základného grafu funkcie $y = \mathrm{cotg}x$ spôsobujú čísla na pravej strane predpisu funkcie, poznáš od iných funkcií.

Ž: *Úloha by nemala byť pre mňa až taká náročná. Graf funkcie $y = -\mathrm{cotg}x$ dostanem* **preklopením** *grafu funkcie $y = \mathrm{cotg}x$ okolo osi x, lebo všetky hodnoty pôvodného grafu treba zmeniť na opačné. Ak posuniem graf funkcie $y = -\mathrm{cotg}x$* **o 2 nahor** *pozdĺž osi y, dostanem graf zadanej funkcie $f: y = -\mathrm{cotg}x + 2$.*





U: Posunuli sa aj symptoty grafu funkcie $y = -\mathrm{cotg}x$?

Ž: *Posúvali sme nahor, takže asymptoty sa nezmenili.*

U: Zmenila sa perióda?

Ž: *Ani perióda sa nezmenila, lebo sme graf iba posúvali a preklápali. Najmenšia perióda funkcie $f: y = -\mathrm{cotg}x + 2$ je číslo π.*

U: Zostáva určiť priesečníky so súradnicovými osami. Čím sa vyznačuje priesečník grafu funkcie s osou y?

Ž: *Jeho x-ová súradnica je nulová. Dosadím nulu za x do predpisu funkcie f. Keďže* $\mathrm{cotg}x$ *pre* $x = 0$ *neexistuje, neexistuje ani hodnota funkcie f v bode* 0.

U: Graf funkcie ***nemá s osou y spoločný bod***. Iná situácia nastane pre priesečníky grafu funkcie f s osou x.

Ž: *V tomto prípade nulu dosadím za y.*

U: Budeš riešiť rovnicu $-\mathrm{cotg}x + 2 = 0$.

Ž: *Upravím ju na tvar* $\mathrm{cotg}x = 2$. *Ako ju vyriešim, keď hodnota* 2 *nepatrí medzi význačné, ktoré poznáme?*

U: Použiješ kalkulačku. Výsledok môžeš uviesť buď v stupňovej alebo oblúkovej miere. V každom prípade hodnota získaná na kalkulačke bude približná.

Ž: *Výsledok v radiánoch je* $x \approx 0{,}4636476$.

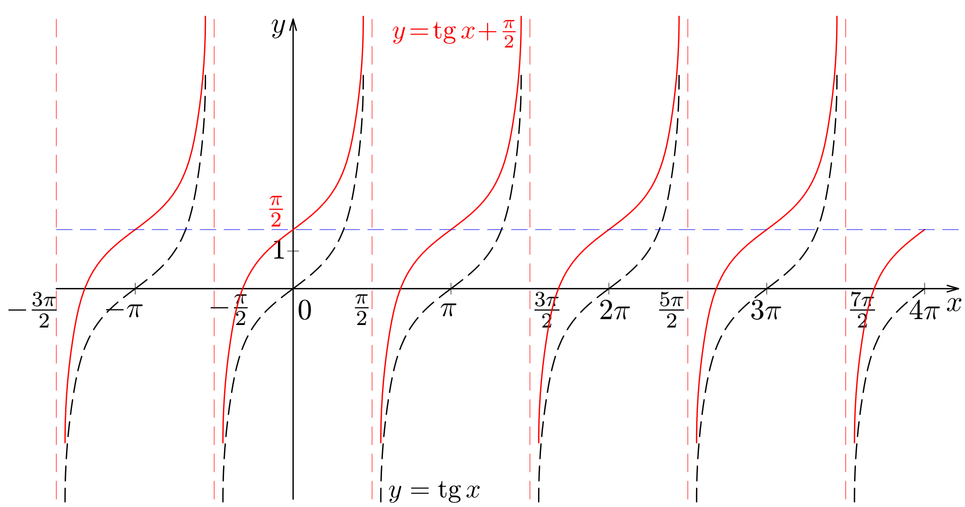
U: Lepšiu predstavu budeš mať, ak radiány premeníš na stupne.

Ž: *x je približne* 26 *stupňov,* 33 *minút a* $54{,}2$ *sekúnd.*

U: Všetky nulové body funkcie f získame, ak využijeme periodickosť funkcie kotangens s najmenšou periódou π. Priesečníky grafu funkcie s osou x budú body, ktorých súradnice sú $[0,4636476 + k\pi; 0]$, kde k je celé číslo.

Úloha : *Načrtnite graf funkcie* $f : y = \mathrm{tg}x + \dfrac{\pi}{2}$. *Určte periódu a priesečníky so súradnicovými osami.*

Výsledok:



Príklad 2: *Načrtnite graf funkcie $f: y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \frac{\pi}{3}$. Určte periódu funkcie a priesečníky grafu so súradnicovými osami.*

U: Vhodné je najskôr upraviť predpis funkcie v zadaní.

Ž: *Prečo?*

U: Znamienko ***mínus*** pred nezávislou premennou x má tiež svoj význam. Mohlo by sa stať, že by si naň zabudol. Pri úprave výrazu na pravej strane predpisu zadanej funkcie využi nepárnosť funkcie tangens.

Ž: *V argumente $\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ funkcie f vyberiem pred zátvorku znamienko mínus. Potom využijem nepárnosť, teda $\text{tg}(-x) = -\text{tg}x$.*

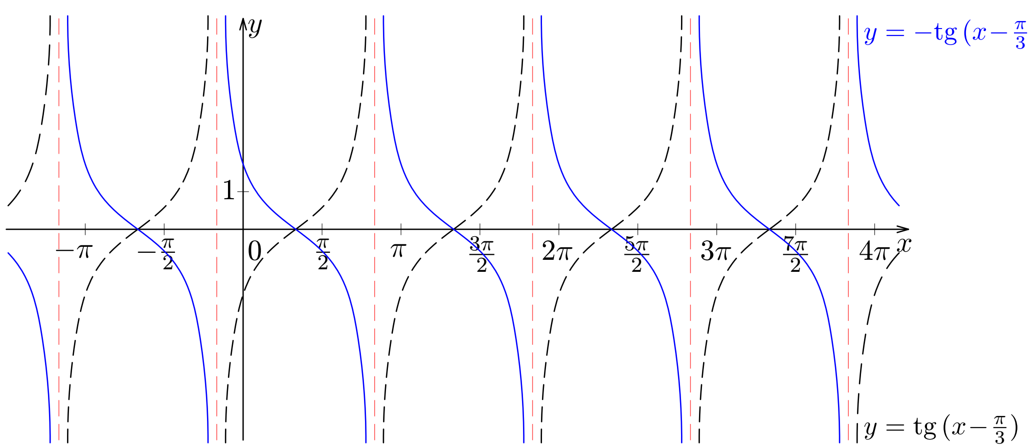
$$y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \frac{\pi}{3} = \text{tg}\left[-\left(-\frac{\pi}{3} + x\right)\right] + \frac{\pi}{3} = -\text{tg}\left(-\frac{\pi}{3} + x\right) + \frac{\pi}{3} =$$
$$= -\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}$$

U: Pozri sa ešte raz na výsledný tvar predpisu funkcie, ktorý si dostal po úpravách. Dáva jasnejší obraz o postupnosti krokov pri načrtávaní grafu funkcie ako zadaný predpis?

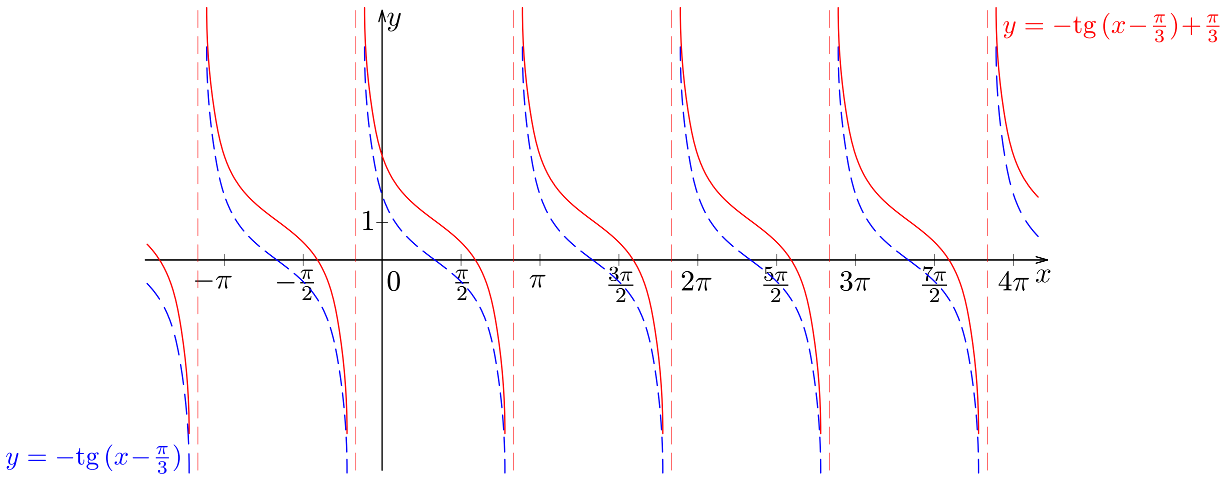
Ž: *Jasné. Pochopil som vašu poznámku na znamienko mínus pred premennou x. Okrem posunov grafu pozdĺž súradnicových osí budem musieť graf aj* **preklápať**.

U: Zapamätaj si, že aj číslo -1 pred argumentom x má svoj význam. Nemení síce periódu, ale spôsobí preklopenie grafu funkcie tangens podľa osi x. Predpis uprav vždy tak, aby x bolo ***osamotené***.

Ž: *Teraz úlohu zvládnem aj sám. Graf funkcie $y = \text{tg}x$ najskôr posuniem o číslo $\frac{\pi}{3}$ pozdĺž osi x* **doprava**. *Dostanem graf funkcie $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Získaný graf preklopím podľa osi x a získam graf funkcie $y = -\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.*



U: Áno, preklopením zmeníš hodnoty funkcie $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ na opačné čísla. Posledný graf nakoniec posunieš pozdĺž osi y nahor o číslo $\frac{\pi}{3}$. Táto číselná hodnota ťa mohla zaskočiť. Zvyčajne čísla v tomto tvare vzťahujeme k nezávislej premennej x. Hodnotami závislej premennej y sú však tiež reálne čísla a číslo $\frac{\pi}{3}$ je jedným z nich. Keďže ide o iracionálne číslo, jeho hodnotu vyznačíme v grafe iba približne.



Ž: *Perióda funkcie sa nezmenila. Je to číslo* π.

U: Nájdime ešte súradnice priesečníkov grafu funkcie so súradnicovými osami. Priesečník, s ktorou osou dostaneš, ak za x dosadíš nulu?

Ž: *Dostanem priesečník s osou* y. *Stačí využiť, že* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ *a dosadiť.*

$$\boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) + \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}}$$

Ž: *Dá sa s tou hodnotou niečo urobiť?*

U: Oba sčítance sú iracionálne čísla. Necháme to v tomto tvare. Pre graf odhadneme približnú hodnotu. Zaokrúhlené na stotiny to dáva hodnotu 2,78.

Ž: *Aby som určil priesečníky grafu funkcie* f *s* x*-ovou osou, potrebujem riešiť rovnicu* $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \frac{\pi}{3} = 0$. *Hľadané priesečníky majú* y*-ovú súradnicu rovnú nule, preto som do predpisu funkcie* f *za* y *dosadil nulu.*

U: Po odčítaní čísla $\frac{\pi}{3}$ od oboch strán rovnice dostaneme rovnicu v tvare $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\frac{\pi}{3}$. Zavedieme ***substitúciu argumentu*** $\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$. Tento výraz nahradíme novou premennou, napríklad u.

Ž: *Ďalej budeme riešiť rovnicu* $\operatorname{tg} u = -\frac{\pi}{3}$. *Ale to budem potrebovať kalkulačku.*

U: Hodnotu neznámej u dokážeme určiť iba pomocou kalkulačky. Dostaneme základné riešenie tejto rovnice v intervale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ž: *Dostal som hodnotu neznámej u približne $-0{,}808$.*

U: Všetky riešenia rovnice pre neznámu u budú v tvare $u = -0{,}808 + k\pi$, kde k je celé číslo. Využili sme, že funkcia tangens je periodická s najmenšou periódou π.

Ž: *Sú to už x-ové súradnice hľadaných priesečníkov?*

U: Nie. Od substitučnej neznámej u sa musíme vrátiť k neznámej x. Dosaď do substitučného vzťahu $u = \left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ za neznámu u hodnotu $u = -0{,}808 + k\pi$ a vypočítaj x.

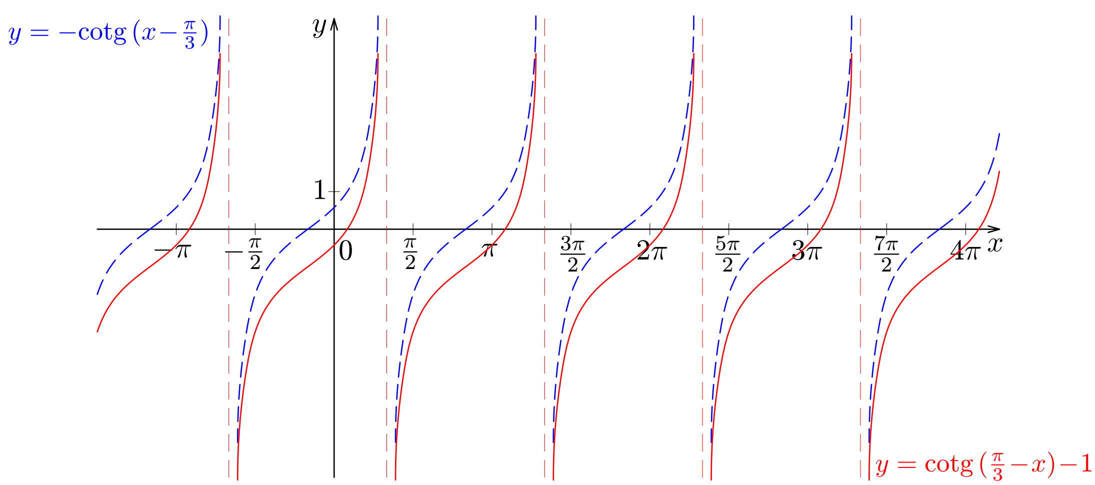
Ž: *Pripočítam x a odpočítam $-0{,}808 + k\pi$. Dostal som:*
$x = \frac{\pi}{3} + 0{,}808 - k\pi$*, kde k je celé číslo.*

U: Ak k je celé číslo, potom aj $-k$ je celé číslo. Parameter $-k$ možno nahradiť novým parametrom, napríklad l a výsledok pre x-ovú súradnicu prepísať do tvaru $x = \frac{\pi}{3} + 0{,}808 + l\pi$, kde l je celé číslo. Vyjadrujeme tým, že základná hodnota neznámej x sa bude opakovať s najmenšou periódou π.

Ž: *Súradnice priesečníkov grafu funkcie f s x-ovou osou budú $\left[\frac{\pi}{3} + 0{,}808 + l\pi; 0\right]$, kde l je celé číslo.*

Úloha : *Načrtnite graf funkcie $f : y = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 1$. Určte periódu a priesečníky so súradnicovými osami.*

Výsledok:



Príklad 3: *Načrtnite graf funkcie* $f: y = \operatorname{cotg}\frac{x}{\pi}$. *Určte periódu funkcie a priesečníky grafu so súradnicovými osami.*

U: Máš predstavu, ako sa zmení graf funkcie $y = \operatorname{cotg} x$, ak argumentom bude výraz $\frac{x}{\pi}$?

Ž: *Mala by sa* **zmeniť perióda** *funkcie.*

U: Ako?

Ž: *Vyskúšam si niekoľko hodnôt?*

U: Skús.

Ž: *Ak za x dosadím nulu, bude hodnota* $\operatorname{cotg}\frac{0}{\pi}$ *taká istá ako hodnota* $\operatorname{cotg} 0$. *To nie je definované. Ktoré ďalšie čísla mám dosadiť?*

U: Zamysli sa nad tým, čo si získal, ak si za x dosadil nulu? Získal si informáciu, že graf zadanej funkcie bude mať tú istú vlastnosť ako graf funkcie $y = \operatorname{cotg} x$. Získal si jednu asymptotu, respektíve jedno, ľavé obmedzenie základného motívu grafu funkcie. Potrebuješ ešte zistiť pravé obmedzenie. Ktorou hodnotou argumentu x je ono dané pre graf funkcie $y = \operatorname{cotg} x$?

Ž: *Za x treba dosadiť číslo π. Vtedy dostaneme opäť asymptotu grafu funkcie.*

U: Skúsme ho nájsť aj pre funkciu $f: y = \operatorname{cotg}\frac{x}{\pi}$. Pozor, teraz ***argument*** funkcie nie je x, ale výraz $\frac{x}{\pi}$.

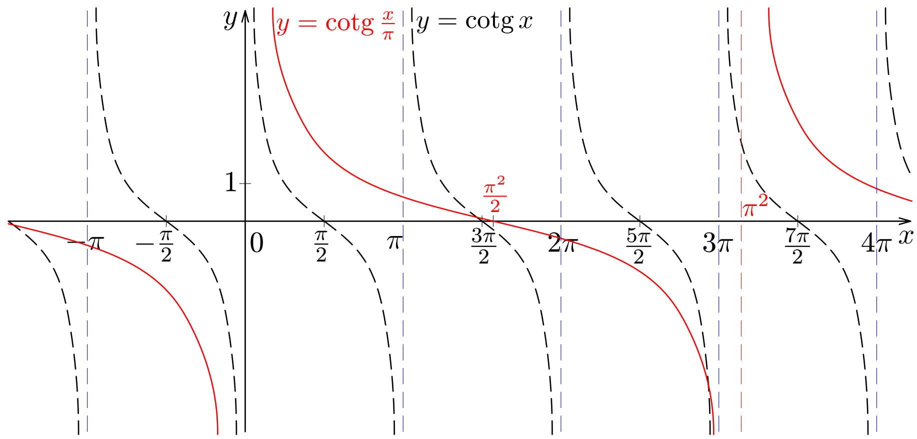
Ž: *Začínam chápať. Výraz $\frac{x}{\pi}$ musí mať hodnotu π. Teda x sa rovná π^2.*

U: To znamená, že základný motív funkcie $f: y = \operatorname{cotg}\frac{x}{\pi}$ načrtneme na otvorenom intervale $(0; \pi^2)$. Vieš teda určiť ako sa zmenila perióda?

Ž: *Najmenšia perióda bude číslo π^2, lebo je to dĺžka nami zisteného intervalu pre základný motív grafu funkcie.*

U: Neviem, či si uvedomuješ, ale nepoužili sme v riešení nič nové, čo by si nepoznal. Iba sme pospájali vhodným spôsobom poznatky, ktoré máš. Východiskom sú vždy základné poznatky. Potom sa aj na zložitejšie argumenty treba pozerať ako na jednoduché. Iba tých výpočtov bude niekedy viac.

Ž: *Načrtnúť graf už nebude problém.*



U: Periódu funkcie f sme už určili. Ak si dosadil za x nulu, zistil si, že hodnota neexistuje. Čo to znamená v súvislosti so súradnicovými osami?

Ž: *Graf* **nepretína os** y*, nemá priesečník s touto osou.*

U: Riešenie úlohy dokončíme určením priesečníkov s osou x.

Ž: *Dosadím za y nulu a vyriešim rovnicu* $\operatorname{cotg}\dfrac{x}{\pi} = 0$*. Kotangens je rovný nule, ak jeho argument je rovný číslu v tvare* $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$*. V našej rovnici je argument výraz* $\dfrac{x}{\pi}$*, preto* $\dfrac{x}{\pi} = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$.

U: Neznámu x získame jednoduchou úpravou. Obe strany rovnice vynásobíme číslom π. Dostaneme $x = (2k+1)\dfrac{\pi^2}{2}$. Priesečníky grafu funkcie $f : y = \operatorname{cotg}\dfrac{x}{\pi}$ s osou x sú body so súradnicami $\left[(2k+1)\dfrac{\pi^2}{2}; 0\right]$, kde k je celé číslo.

Príklad 4: *Porovnajte grafy funkcií:*

$f: y = |\mathrm{tg} x - 1|$
$g: y = |\mathrm{tg} x| - 1$
$h: y = \mathrm{tg}|x| - 1.$

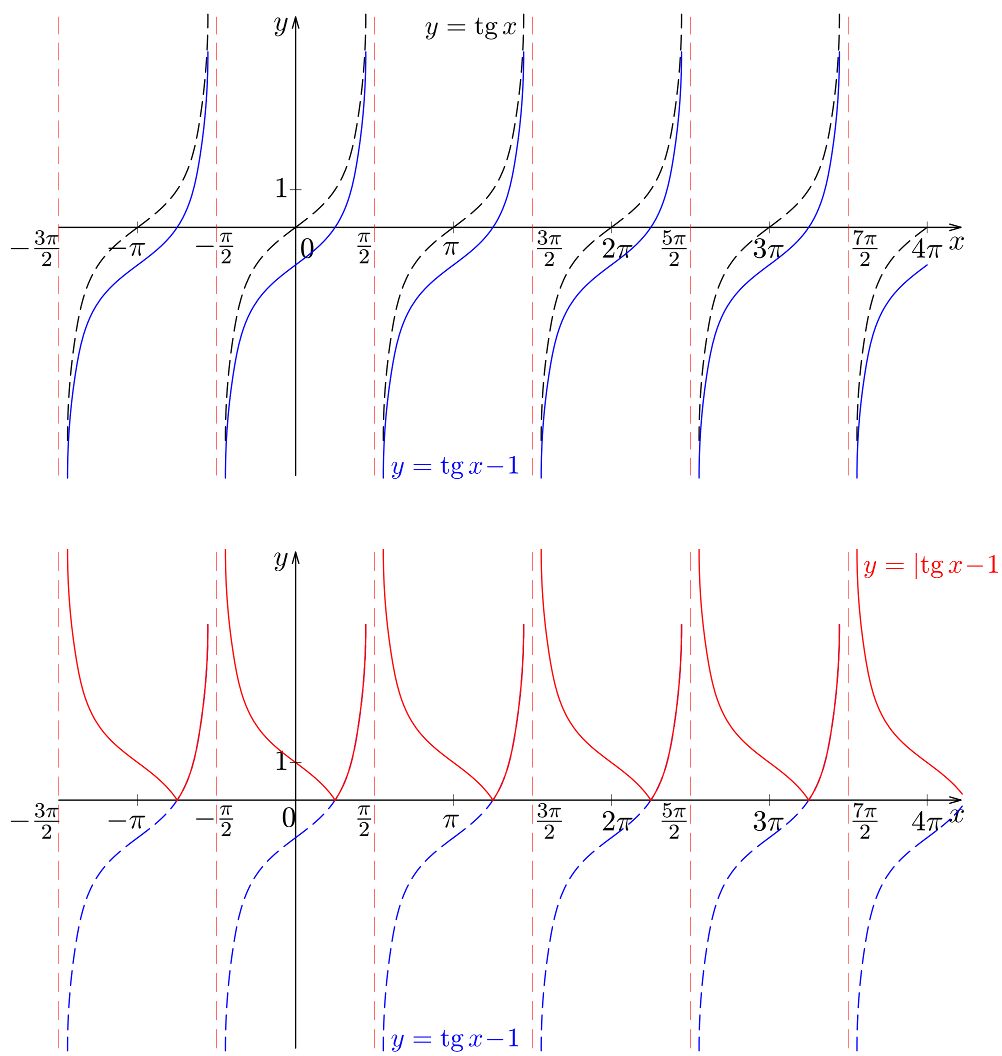
Ž: *Rozdiel v zostrojovaní grafov bude asi v tom, čo urobíme najskôr. V každom prípade si najskôr načrtnem graf funkcie $y = \mathrm{tg} x$.*

U: Z hľadiska priorít operácií v prípade funkcie f treba najskôr odčítať číslo 1 a potom vypočítať z celého výrazu absolútnu hodnotu. Skús tieto dva kroky interpretovať na grafe.

Ž: *Odčítať* 1 *od* tg$x$ *znamená* **posunúť graf o jednotku nadol**. *Absolútna hodnota spôsobí, že všetky hodnoty budú kladné.*

U: Presnejšie nezáporné. Tie časti grafu funkcie $y = \mathrm{tg} x - 1$, ktoré neboli pod osou x ***ponecháme*** aj do výsledného grafu a tie, ktoré boli pod osou x zobrazíme ***osovo súmerne*** podľa osi x.

Ž: *Preklopíme.*



U: Dôležité je si uvedomiť, že pre hodnoty výslednej funkcie platí: $f(x) \geqq 0$.

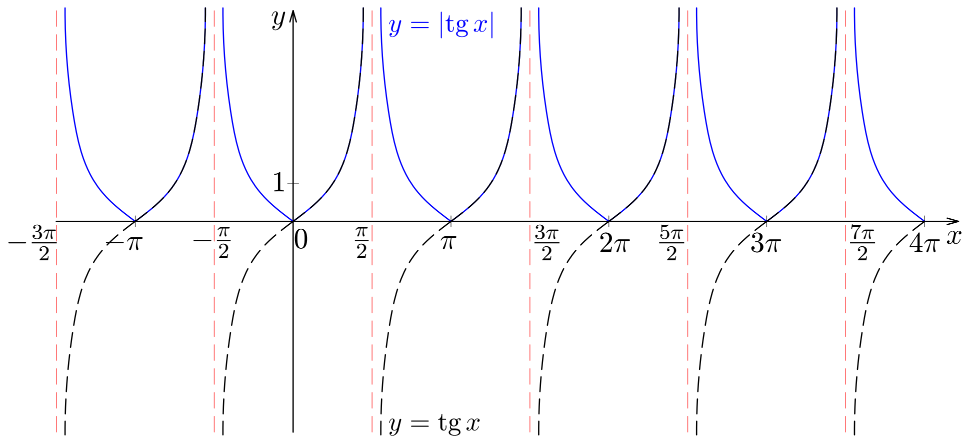
Ž: *V prípade funkcie g to treba urobiť v opačnom poradí.*

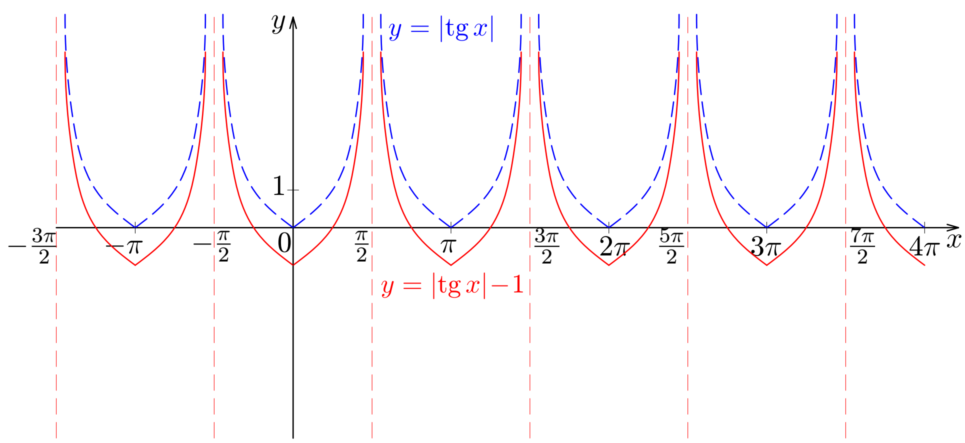
U: Áno. Keďže vychádzame z grafu $y = \mathrm{tg}x$, najskôr uplatníme absolútnu hodnotu.

Ž: *Časti* **pod osou x** *z grafu $y = \mathrm{tg}x$* **preklopíme**.

U: Potom potrebujeme odčítať číslo 1.

Ž: *Posunieme* **o 1 smerom nadol**.





U: Pre funkciu g existujú reálne čísla x, pre ktoré $g(x) < 0$.

U: Zostáva nám posledná funkcia $h : y = \mathrm{tg}|x| - 1$.

Ž: *S touto funkciou mi budete musieť pomôcť.*

U: Jedna z možnosti ako dôjsť k výsledku je ***odstrániť absolútnu hodnotu***. Rozober dva prípady podľa toho, aké je x vzhľadom k nule.

Ž: *To by som vedel. Ale myslel som si, že existuje nejaká finta bez odstraňovania absolútnej hodnoty.*

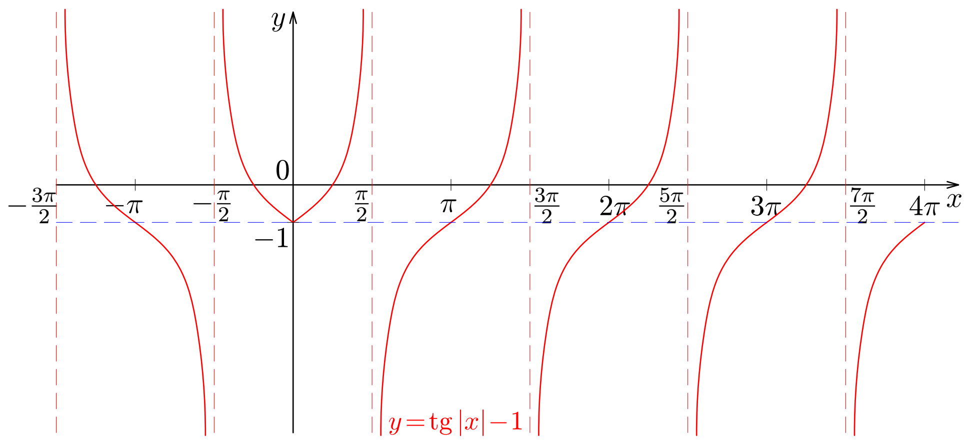
U: Prezradím ti ju na konci. Zostaň pri odstraňovaní absolútnej hodnoty. Čo platí, ak $x \geqq 0$?

Ž: *Vtedy platí:* $|x| = x$ *a funkcia* h *bude mať predpis* $y = \mathrm{tg}x - 1$. *Je to rovnaké ako v prípade prvej funkcie.*

U: S tým rozdielom, že tentokrát to platí iba pre nezáporné x.
Vyrieš ešte pre $x < 0$.

Ž: *Vtedy platí:* $|x| = -x$ *a funkcia* h *bude mať predpis* $y = \mathrm{tg}(-x) - 1 = -\mathrm{tg}x - 1$. *Graf* ***preklopím*** *podľa osi* x *a posuniem* **o 1 nadol**.

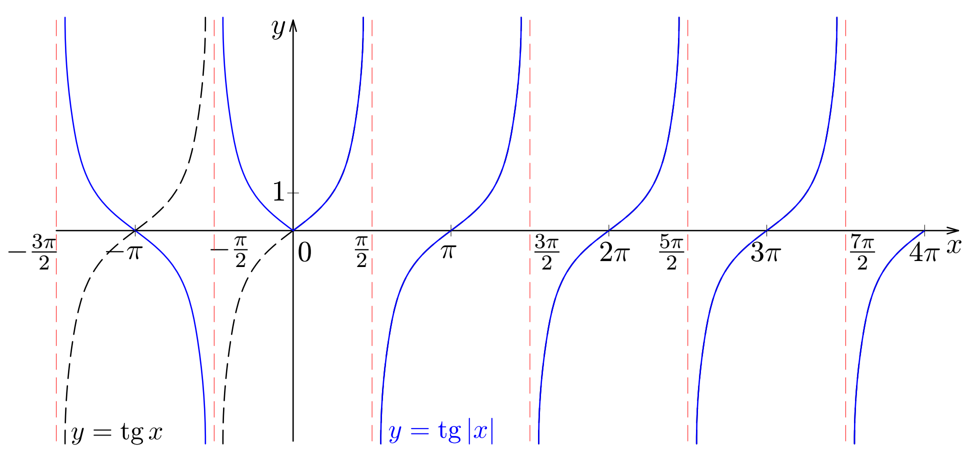
U: Toto uplatníme iba pre $x < 0$.

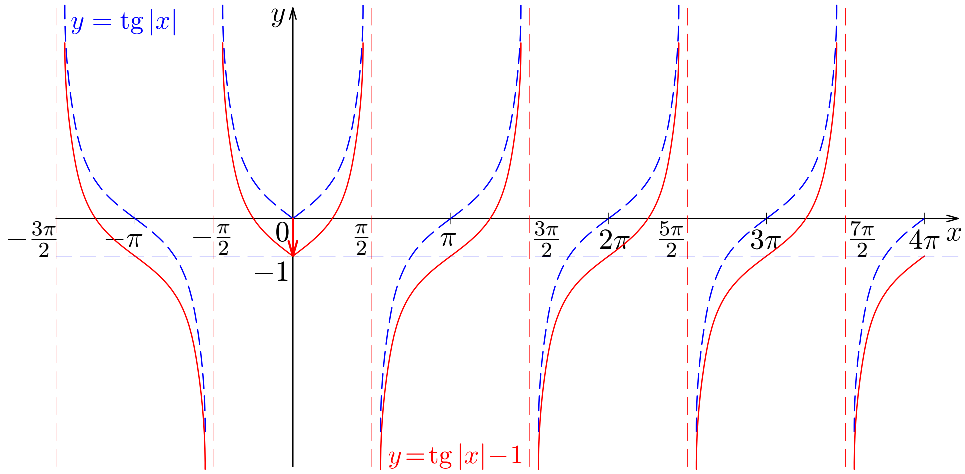


U: Aj funkcia h má pre niektoré reálne čísla x záporné hodnoty. Pozri sa ešte raz na obrázok. Vyznačuje sa graf tejto funkcie nejakou súmernosťou?

Ž: *Podľa osi* y.

U: Ak je osovo súmerný podľa osi y, tak je grafom ***párnej funkcie***. To je dôležité pri tejto funkcií. Dá sa to objaviť v zadaní. Absolútna hodnota z čísla x má rovnaký výsledok pre kladné, ako aj k nemu opačné (záporné) číslo. Preto aj tangens pre všetky dvojice navzájom opačných čísel má rovnakú hodnotu. $\mathrm{tg}|-x| = \mathrm{tg}|x|$. Najskôr, povedané tvojou terminológiou, by sme preklopili graf funkcie $y = \mathrm{tg}x$ zostrojený pre $x \geqq 0$ podľa osi y. Dostali by sme $y = \mathrm{tg}|x|$. Graf tejto funkcie by sme posunuli smerom nadol o 1.





U: Porovnaj ešte obory hodnôt týchto troch funkcií.

Ž: $H(f) = \langle 0; \infty)$
$H(g) = \langle -1; \infty)$
$H(h) = \mathbb{R}$

Príklad 5: *Načrtnite graf funkcie* $f : y = \dfrac{\sin x + |\sin x|}{\cos x}$ *na intervale* $\left(-2\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right)$.

U: Výraz na pravej strane predpisu funkcie je zlomok. To znamená, že do definičného oboru funkcie nemusia patriť všetky reálne čísla. Zapíš a vyrieš najskôr podmienku pre definičný obor funkcie f.

Ž: *V menovateli zlomku nesmie byť nula:* $\cos x \neq 0$. *To platí, keď* $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, *kde* k *je celé číslo. Nepárne násobky čísla* $\dfrac{\pi}{2}$ *nebudú patriť do definičného oboru.*

U: V absolútnej hodnote je iba časť výrazu na pravej strane predpisu funkcie. Nevyhneme sa riešeniu dvoch prípadov, podľa toho či výraz v absolútnej hodnote je nezáporný alebo záporný.

Ž: *V prípade, že* $\sin x \geqq 0$, *absolútna hodnota výraz nemení.*

U: $|\sin x| = \sin x$. Pokračuj.

Ž: *Dosadím:* $y = \dfrac{\sin x + |\sin x|}{\cos x} = \dfrac{\sin x + \sin x}{\cos x} = \dfrac{2\sin x}{\cos x}$.

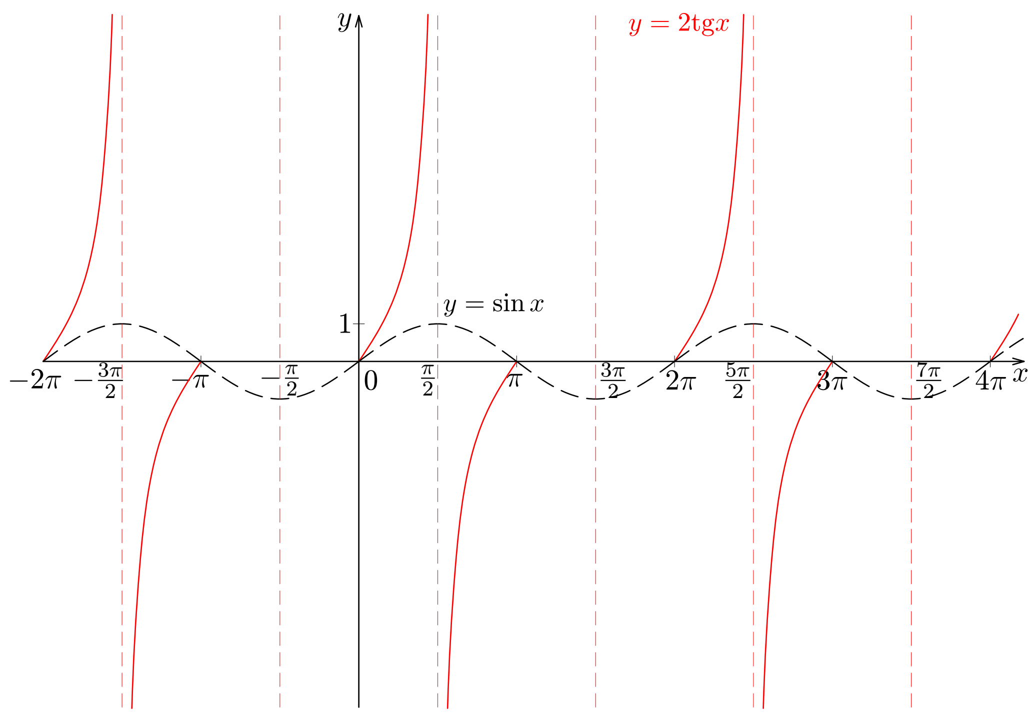
U: Podiel funkcií sínus a kosínus definuje funkciu tangens: $y = 2\mathrm{tg}x$.

Ž: *Ako vyriešim podmienku* $\sin x \geqq 0$*?*

U: To nie je nutné. Pomôžeme si grafom funkcie $y = \sin x$. Máš predstavu, čo táto podmienka znamená pre graf? Ktoré x tomu vyhovujú?

Ž: $\sin x$ *je funkčná hodnota a tá má byť kladná. Pozrieme sa iba na tie časti grafu, ktoré sú* **nad osou** x.

U: Preto graf funkcie $y = 2\mathrm{tg}x$ načrtneme pre tie reálne čísla x, pre ktoré je graf funkcie $y = \sin x$ nad osou x. Aby sme boli presní, aj na osi, pretože sínus má byť nezáporný.



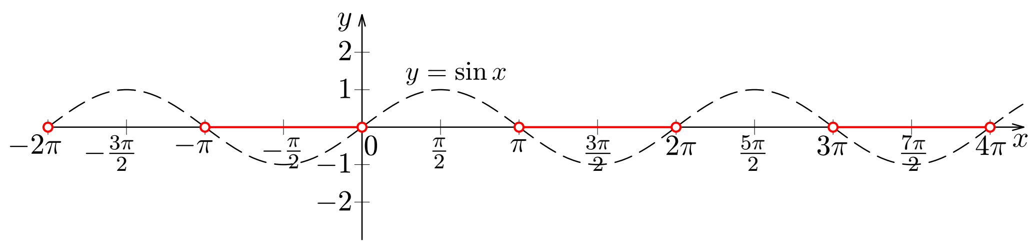
Ž: *Vyriešiť druhý prípad už nebude problém. Je to analogické, len dám mínus, keď odstránim absolútnu hodnotu.*

U: Máš pravdu, ak $\sin < 0$, tak $|\sin x| = -\sin x$.

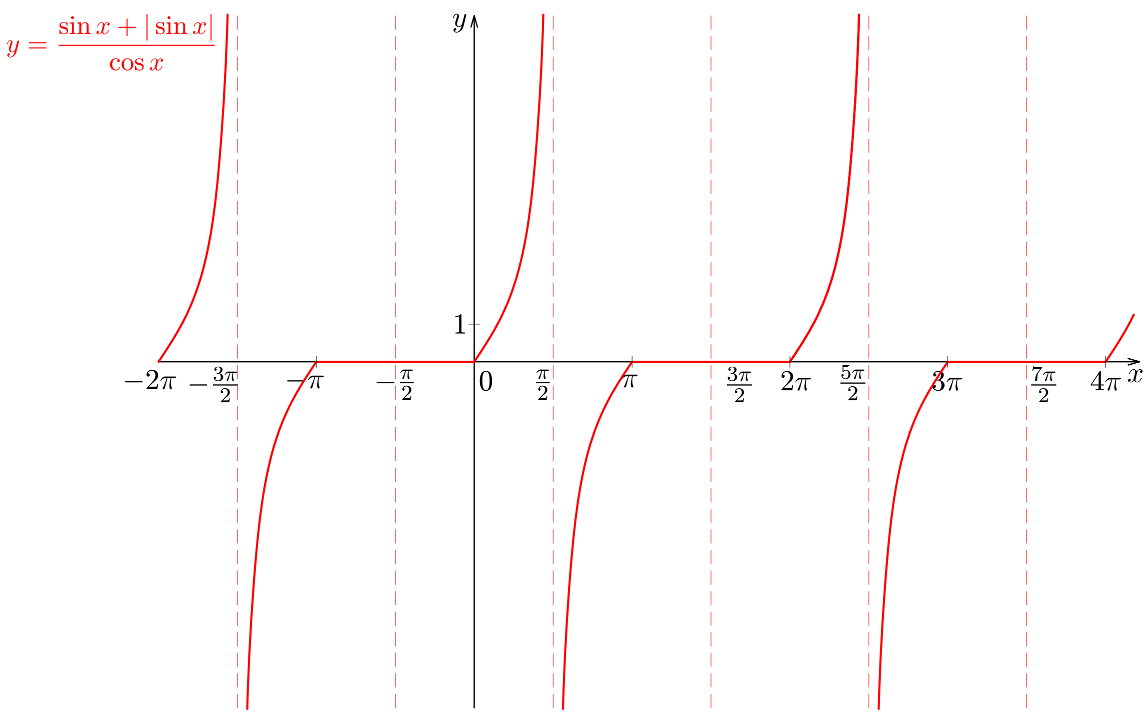
Ž: *Dosadím:* $y = \dfrac{\sin x + (-\sin x)}{\cos x} = \dfrac{\sin x - \sin x}{\cos x} = \dfrac{0}{\cos x} = 0.$

U: Pre tie x na grafe funkcie $y = \sin x$, pre ktoré je graf ***pod osou*** x načrtneme priamku, ktorá je grafom funkcie $y = 0$.

Ž: *Ale to je os* x.



U: Funkciu f chápeme ako ***zjednotenie dvoch funkcií*** $f = f_1 \bigcup f_2$, kde
$f_1 : y = 2\mathrm{tg}x$, ak $\sin x \geqq 0$ a
$f_2 : y = 0$, ak $\sin x < 0$
Spojením oboch prípadov do jedného obrázka dostaneme výsledný graf.



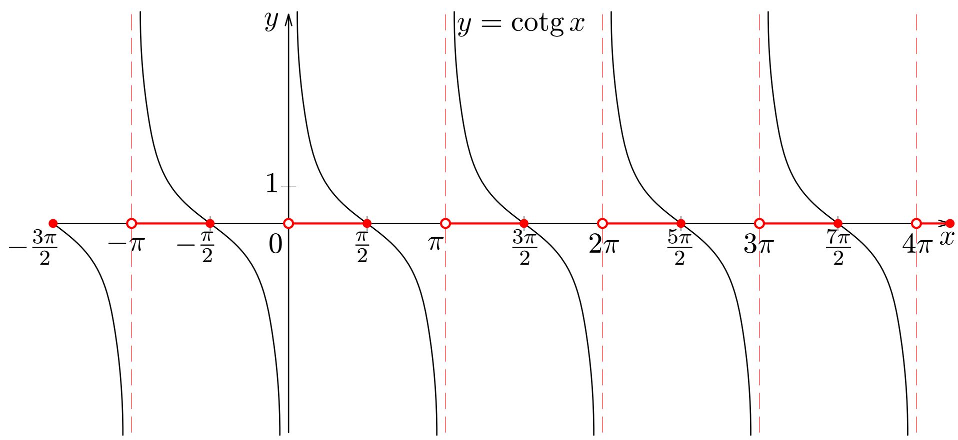
Príklad 6: *Načrtnite graf funkcie* $f: y = \mathrm{cotg}x - |\mathrm{cotg}x|$ *na intervale* $(-\pi; 2\pi)$.

Ž: *Odstránim absolútnu hodnotu. Rozoberiem dva prípady: keď výraz v absolútnej hodnote je kladný a keď je záporný.*

U: Ak $\mathrm{cotg}x \geqq 0$, tak $|\mathrm{cotg}x| = \mathrm{cotg}x$. Pokračuj.

Ž: *Dosadím do predpisu:* $y = \mathrm{cotg}x - |\mathrm{cotg}x| = \mathrm{cotg}x - \mathrm{cotg}x = 0$. *To je konštantná funkcia. Grafom je os* x.

U: Iba časť osi x. Funkciu $y = 0$ sme dostali za predpokladu, že $\mathrm{cotg}x \geqq 0$. Pomôžeme si grafom funkcie $y = \mathrm{cotg}x$. Zohľadniť podmienku $\mathrm{cotg}x \geqq 0$ znamená zostrojiť ***graf funkcie*** $y = 0$ iba pre tie reálne čísla x, pre ktoré je graf funkcie $y = \mathrm{cotg}x$ ***nad osou*** x. Ku kladným číslam priradíme aj nulu.



U: Vyrieš druhý prípad.

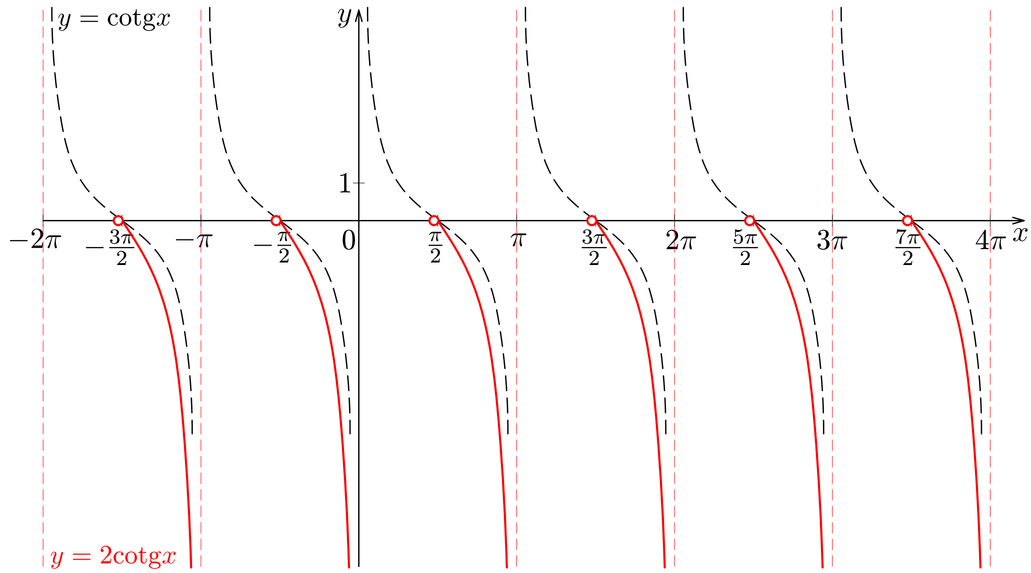
Ž: *Ak* $\mathrm{cotg}x < 0$, *tak* $|\mathrm{cotg}x| = -\mathrm{cotg}x$. *Dosadím do zadania:*

$y = \mathrm{cotg}x - (-\mathrm{cotg}x)$
$y = \mathrm{cotg}x + \mathrm{cotg}x$
$y = 2\mathrm{cotg}x.$

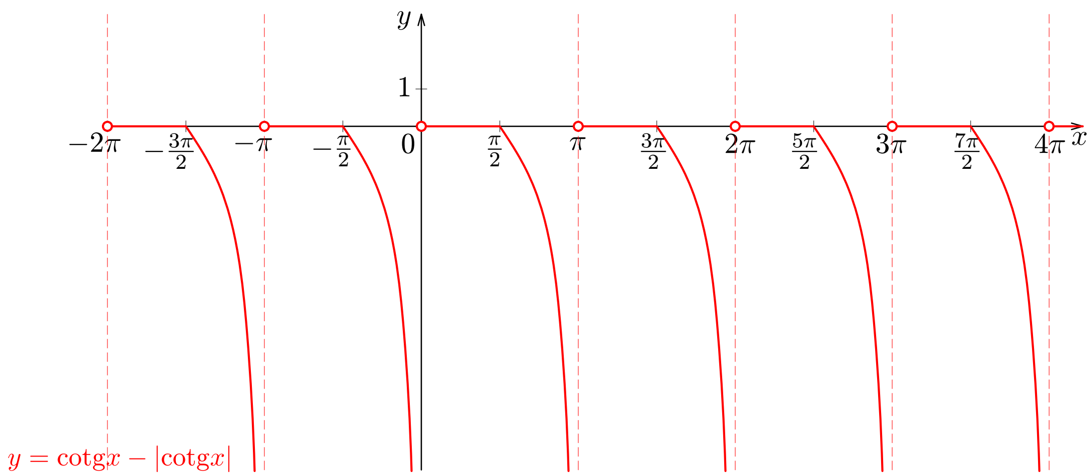
U: Pre tie reálne čísla x, pre ktoré $\mathrm{cotg}x < 0$, graf funkcie $y = \mathrm{cotg}x$ sa nachádza ***pod osou*** x. Vtedy podľa zadania zostrojíme graf funkcie $y = 2\mathrm{cotg}x$.

Ž: *Ako sa to prejaví?*

U: Hodnoty budú dvojnásobné v porovnaní s $y = \mathrm{cotg}x$. Ak bola hodnota (-1), bude (-2). Všeobecne, ak bola $f_1(x)$, bude $f(x) = 2f_1(x)$. Keďže $\mathrm{cotg}x < 0$ pre funkciu f budú ***dvakrát menšie***.



U: Výsledný graf dostaneme spojením oboch obrázkov do jedného. Výsledná funkcia sa chápe ako zjednotenie dvoch funkcií, ktoré sme dostali v oboch analyzovaných prípadoch.



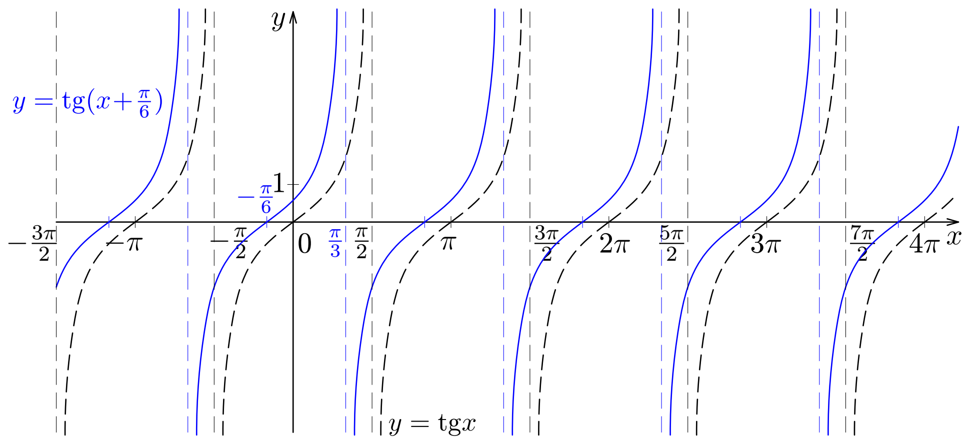
Príklad 7: *Načrtnite graf funkcie* $f : y = \mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \pi$ *a určte jej periódu.*

U: Každý koeficient má v predpise funkcie svoj geometrický význam vzhľadom na graf elementárnej funkcie $y = \mathrm{tg}x$, alebo treba predpis upraviť?

Ž: *Mali by sme upraviť výraz za tangensom. Vybrať pred zátvorku číslo* 2.

U: Po tejto úprave dostaneme: $f : y = \mathrm{tg}\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] - \pi$. Každý koeficient v tomto predpise má svoj význam. Začnime grafom funkcie $y = \mathrm{tg}x$ a postupne aplikujme zmeny určené jednotlivými číslami v predpise našej zloženej funkcie. Čím by si začal?

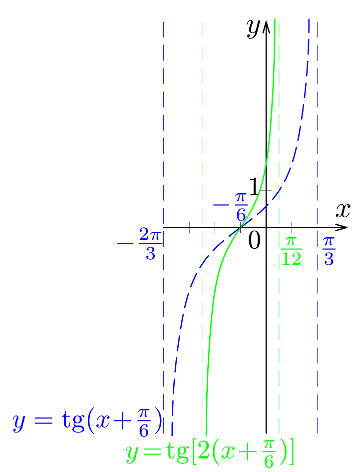
Ž: *Posunul by som graf pozdĺž osi x* **doľava** *o* $\frac{\pi}{6}$.



U: Ideš na to dobre. Treba si všímať postupnosť krokov, ktoré musíme urobiť, aby sme vypočítali hodnotu našej funkcie. Posunutie vlastne zodpovedá výpočtu funkčnej hodnoty pre $x + \frac{\pi}{6}$. V ďalšom kroku potrebuješ dvojnásobok tohto výrazu, teda $2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Musíš to ale vždy vnímať ako argument funkcie tangens. Čo to urobí s grafom, ak argument rastie dvakrát rýchlejšie?

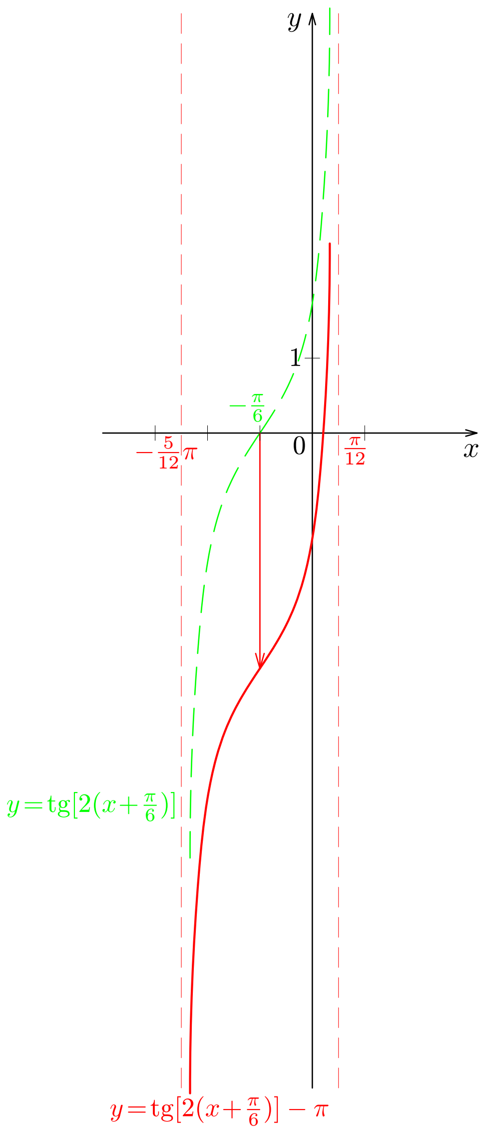
Ž: *Pochopil som. Zmení sa* **perióda**, *bude* **dvakrát menšia**.

U: Áno, perióda bude číslo $\frac{\pi}{2}$. Na každom intervale, kde máme základný motív tangentoidy, ho teraz musíme načrtnúť dvakrát.



U: V postupnosti výpočtov nám ostáva od toho, čo doteraz máme, odpočítať číslo π.

Ž: *S tým nemám problém. Každá hodnota sa zmenší o π. Preto posuniem posledný graf po osi y* **dole** *o číslo π.*



U: Správnosť výsledku si môžeme skontrolovať nasledovne:
Základným intervalom pre funkciu $y = \mathrm{tg} x$ je otvorený interval $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ale aj naša funkcia je tvaru $y = \mathrm{tg} u$, kde $u = 2x + \frac{\pi}{3}$. Teda aj pre argument u platí základný interval: $u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ak si zostavíme sústavu dvoch nerovníc, určíme aké bude x.
$-\frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$.
Nemal by byť problém pre teba ich vyriešiť. Pokús sa ich riešiť naraz.

Ž: *Odstránim zlomky?*

U: Správne. Vynásob všetky výrazy číslom 6.

Ž: *Vynásobím všetky výrazy číslom* 6*, odpočítam* π *a vydelím číslom* 12.

$$-3\pi < 12x + 2\pi < 3\pi$$

$$-5\pi < 12x < \pi$$

$$-\frac{5\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12}$$

U: To je jeden z intervalov, na ktorom sme načrtli základný motív tangentoidy. Aká je perióda zadanej funkcie?

Ž: *Dĺžka tohto intervalu, teda číslo* $\frac{\pi}{2}$.

Príklad 8: *Načrtnite graf funkcie* $f : y = \sqrt{\dfrac{\mathrm{tg}x}{|\mathrm{tg}x|}}$.

Ž: *Dosť komplikované zadanie. Odmocnina, zlomok a ešte aj absolútna hodnota.*

U: V komplikovaných zadaniach sa často skrývajú jednoduché poznatky, ktoré objavíme až po úpravách.
Odstráňme preto najskôr absolútnu hodnotu.

Ž: *V tom potrebujem poradiť.*

U: Podľa definície absolútnej hodnoty, jej výpočet závisí od toho, či ide o kladné alebo záporné číslo. Ak $a > 0$, tak $|a| = a$. V našom prípade: ak $\mathrm{tg}x > 0$, tak $|\mathrm{tg}x| = \mathrm{tg}x$.
Ak $a < 0$, tak $|a| = -a$. V našom prípade: ak $\mathrm{tg}x < 0$, tak $|\mathrm{tg}x| = -\mathrm{tg}x$.

Ž: *Prečo neuvažujeme rovné nule?*

U: Výraz $|\mathrm{tg}x|$ sa nachádza v menovateli zlomku, a ako vieme, v menovateli nemôže byť nula. Nulou nevieme deliť.
Vráťme sa k odstraňovaniu absolútnej hodnoty:
Prvý prípad je, ak $\mathrm{tg}x > 0$. Vtedy $|\mathrm{tg}x| = \mathrm{tg}x$. Dosaď do zadania a uprav predpis funkcie.

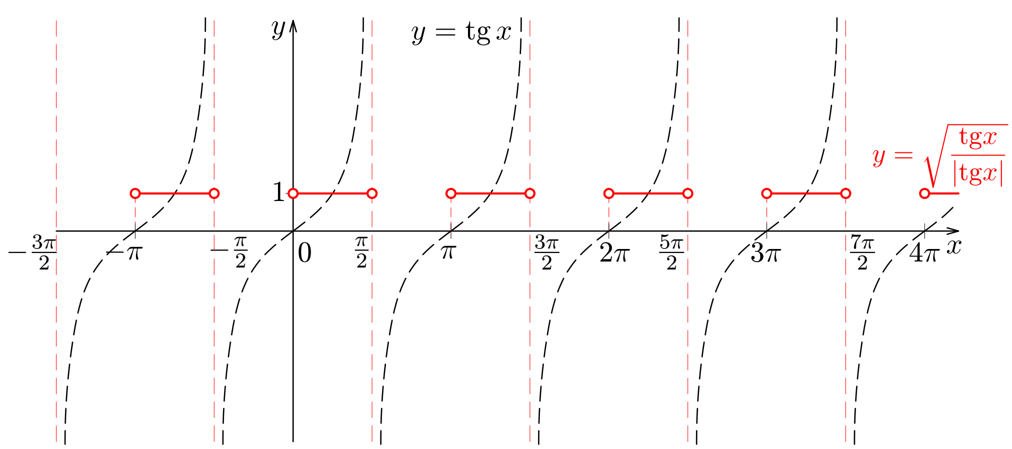
Ž: *Tangensy sa vykrátia a dostanem číslo* 1.

$$\boxed{f : y = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}x}{|\mathrm{tg}x|}} = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}x}} = 1}$$

U: V prípade, že $\mathrm{tg}x > 0$, zadaná funkcia predstavuje konštantnú funkciu $y = 1$. Dúfam, že vieš čo je jej grafom.

Ž: *Priamka rovnobežná s osou x, prechádzajúca na y-ovej osi cez bod* 1.

U: Podmienku $\mathrm{tg}x > 0$ nie je nutné vyriešiť. V obrázku si načrtneme aj graf funkcie $y = \mathrm{tg}x$ a graf funkcie $y = 1$ načrtneme iba pre tie reálne čísla x, pre ktoré je graf funkcie $y = \mathrm{tg}x$ nad osou x. Vtedy sú funkčné hodnoty kladné.



Ž: *Prečo ste použili* **prázdne krúžky***?*

U: Pre čísla $x \in \left\{\cdots;-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\cdots\right\}$ nie je funkcia tangens definovaná a pre $x \in \{\cdots;-\pi;0;\pi;2\pi;\cdots\}$ nadobúda funkcia tangens hodnotu nula.

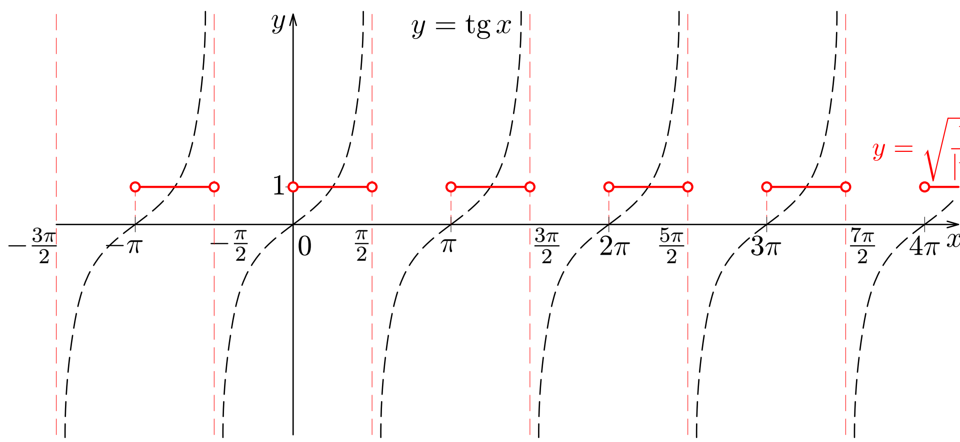
Ž: *Pokúsim sa vyriešiť druhý prípad: ak* $\mathrm{tg}x < 0$, *tak* $|\mathrm{tg}x| = -\mathrm{tg}x$. *Dosadím do zlomku* $\frac{\mathrm{tg}x}{|\mathrm{tg}x|} = \frac{\mathrm{tg}x}{-\mathrm{tg}x} = -1$. *Zlomok je pod druhou odmocninou. Hodnota zlomku je* -1 *a druhá odmocnina zo záporného čísla neexistuje.*

U: Áno, ***odmocnina zo záporného čísla*** v množine reálnych čísel neexistuje. Čo to znamená pre našu funkciu?

Ž: *Nepriradíme nič.*

U: Pre tie reálne čísla x, pre ktoré má platiť podmienka $\mathrm{tg}x < 0$, ***nepriradíme*** na grafe žiadnu hodnotu. Podmienke vyhovuje tá časť grafu funkcie $y = \mathrm{tg}x$, ktorá je pod osou x.

U: Výsledný graf je na poslednom obrázku:



U: Určite si si všimol, aký je definičný obor zadanej funkcie.

Ž: *Tvoria ho iba tie reálne čísla* x, *pre ktoré sa graf funkcie* $y = \mathrm{tg}x$ *nachádza nad osou* x.

U: Áno. Definičný obor funkcie $f : y = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}x}{|\mathrm{tg}x|}}$ sa dá zapísať v tvare, ktorý je uvedený v rámčeku.

$$\boxed{D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)}$$