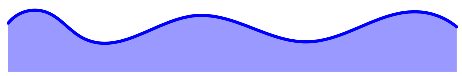
Grafy funkcií sínus a kosínus

RNDr. Marián Macko

U: Pozoroval si niekedy, ako sa správa vodná hladina na jazere, ak tam hodíš kameň?

Ž: *Vlní sa.*



U: Svojím tvarom v jednej vybranej línií pripomína graf funkcie sínus, respektíve kosínus.

Ž: *To isté by som dosiahol, keby som na jednom konci rozkmital gumenú hadicu.*

U: Takých príkladov, ktoré súvisia s krivkou podobného tvaru je v praktickom živote veľa – ***vlnenie, zvuk, závislosť striedavého prúdu a napätia na čase*** a podobne. Tieto ***závislosti na čase*** sa dajú zapísať vzťahmi, v ktorých sa vyskytuje najmä funkcia ***sínus***. Napríklad $u = u_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a všetky premenné majú svoj fyzikálny význam.

Ž: *V matematike je to o trochu ľahšie, lebo používame zvyčajne iba dve premenné: x a y.*

U: Ani vo fyzike to nie je náročné. Treba si len uvedomiť, že v uvedenom vzťahu symbol t vystupuje vo význame x a symbol u vo význame y. Ostatné symboly majú význam konštánt.

U: Aby sme dobre pochopili problematiku aj týchto prírodovedných predmetov a vedeli sa v nej orientovať, potrebujeme poznať grafy funkcií sínus a kosínus.

Ž: *Už ste naznačili, že sa podobajú vlneniu.*

U: Istá podobnosť tu je, ale medzi grafmi funkcií sínus a kosínus je rozdiel. Upresníme. Keďže funkcie ***sínus a kosínus sú periodické*** s najmenšou periódou 2π, stačí násť ***graf daných funkcií na intervale*** $\langle 0; 2\pi\rangle$.

Ž: *Potom ho zopakujeme na ďalších vhodných intervaloch dĺžky 2π.*

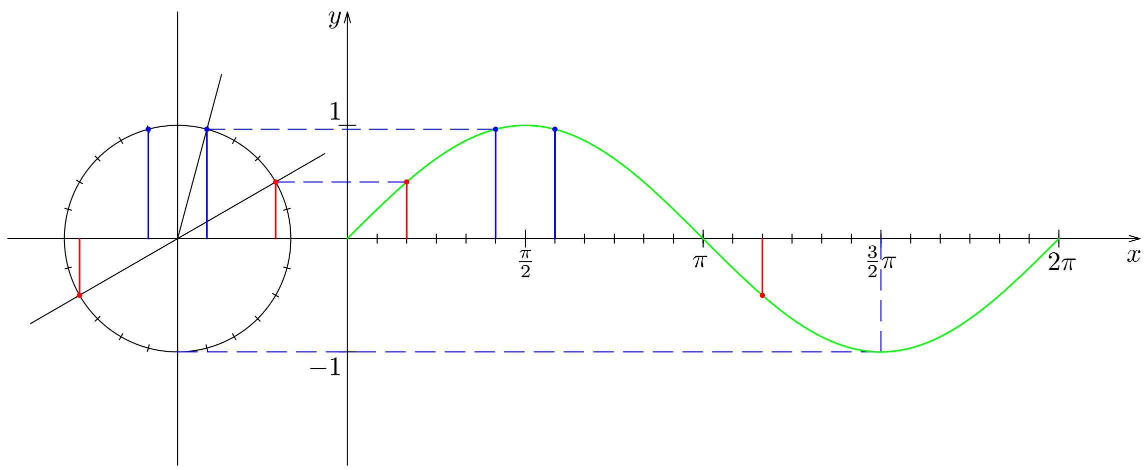
U: Začneme najskôr ***grafom funkcie sínus***. ***Funkčné hodnoty*** nebudeme počítať, ale ***získame ich graficky z jednotkovej kružnice*** pre dostatočný počet hodnôt argumentu x. Jednotkovú kružnicu rozdelíme na 24 rovnakých častí, ktorým bude odpovedať 24 hodnôt argumentu z intervalu $\langle 0; 2\pi\rangle$. Dokážeš určiť všeobecné vyjadrenie týchto čísel?

Ž: *Celá kružnica predstavuje oblúk dĺžky 2π. Rozdelením na 24 rovnakých častí získame oblúky, z ktorých každý má dĺžku $\frac{2\pi}{24}$. Z toho mi vychádza, že čísla x by mali mať tvar $\frac{k\pi}{12}$, pričom celé číslo k nadobúda hodnoty od 0 do 24 vrátane.*

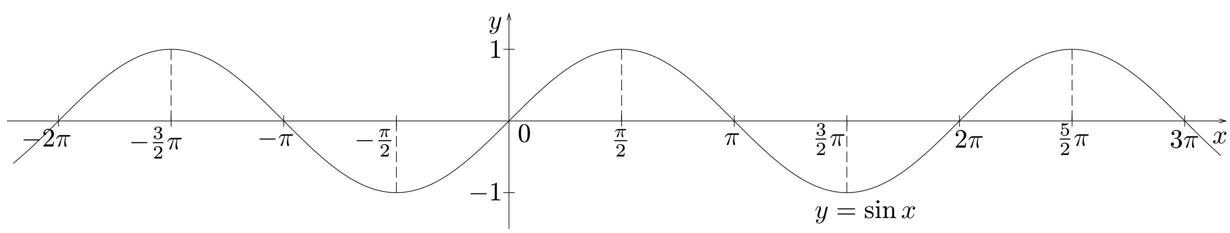
U: Výborne. Geometricky to znamená rozdeliť stredový uhol po $15°$. Ktorú súradnicu získaných bodov si budeme pre funkciu sínus všímať?

Ž: *y-ovú súradnicu.*

U: Hodnoty ***y-ových súradníc*** prenesieme do grafu k odpovedajúcim argumentom x.



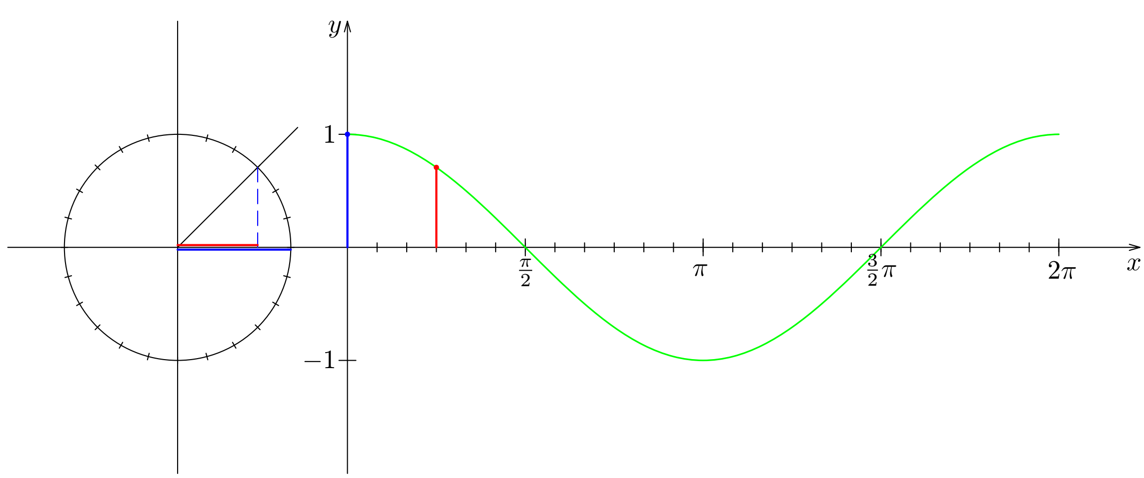
U: Tento základný graf stačí zopakovať na ďalších intervaloch: $\langle 2\pi; 4\pi\rangle$; $\langle 4\pi; 6\pi\rangle$; $\langle 6\pi; 8\pi\rangle$; ...
Ale aj: $\langle -2\pi; 0\rangle$; $\langle -4\pi; -2\pi\rangle$, ...



U: ***Graf funkcie sínus nazývame sínusoida***.

Ž: *Očakávam, že* **graf funkcie kosínus sa nazýva kosínusoida**.

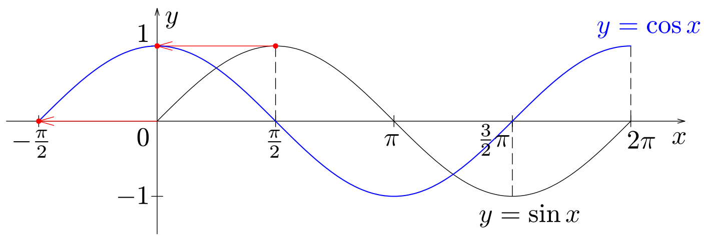
U: Máš pravdu. Získame ho podobným spôsobom, prenášať však budeme x-ové súradnice bodov, tak ako je to ukázané na obrázku.



Ž: *Nezdá sa vám, že* **kosínusoidu** *by sme mohli dostať* **posunutím sínusoidy pozdĺž osi** x*?*

U: Vieš, v ktorom smere a o koľko?

Ž: *Aby sa kopček sínusoidy v* $\frac{\pi}{2}$ *dostal na kopček kosínusoidy v bode nula, tak doľava práve o číslo* $\frac{\pi}{2}$.



U: Máš pravdu. ***Kosínusoida vznikla posunutím sínusoidy v smere zápornej poloси*** x ***o*** $\frac{\pi}{2}$. Potom, ale graf funkcie $y = \cos x$ môžeme chápať ako graf funkcie sínus. Argumentom však bude výraz premennej x. Ten zohľadní, že pri posunutí $y = \sin x$ nadobudne nová funkcia svoje hodnoty o $\frac{\pi}{2}$ skôr.

Ž: *Už to mám.* $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$*, lebo to musí byť rovnaké ako pri posúvaní paraboly.*

U: Tvoje schopnosti možno len oceniť. To, na čo si došiel sám, je dobré si zapamätať:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

U: Doterajšie naše úvahy naznačujú, že okrem grafov jednoduchých funkcií $y = \sin x$ a $y = \cos x$ potrebuješ vedieť zostrojiť aj grafy zložených goniometrických funkcií:

$$f : y = a \sin\left[b\,(x + c)\right] + d,$$

alebo

$$g : y = a \cos\left[b\,(x + c)\right] + d,$$

kde a, b, c, d sú reálne čísla, pričom $a \neq 0$ ***a*** $b \neq 0$.

Ž: *Fíha! Toľko koeficientov. Ale prečo* a *a* b *nemôžu byť nuly?*

U: Akú funkciu dostaneš, ak za a dosadíš 0?

Ž: $y = 0 \cdot \sin\left[b\,(x + c)\right] + d = 0 + d = d$*, a to je konštanta.*

U: So sínusoidou nesúvisí. Podobne by si dopadol, ak by si dosadil za $b = 0$:
$y = a \sin\left[0 \cdot (x + c)\right] + d = a \sin 0 + d = a \cdot 0 + d = d$.

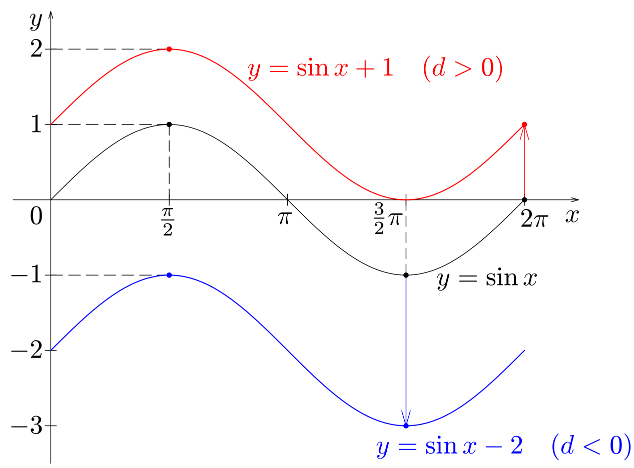
Ž: *Ako načrtnem graf takto zadanej zloženej funkcie?*

U: Potrebuješ iba vedieť, aký vplyv na základný graf majú jednotlivé koeficienty. Túto geometrickú interpretáciu koeficientov uplatníš v istej postupnosti grafov, od základného po výsledný.

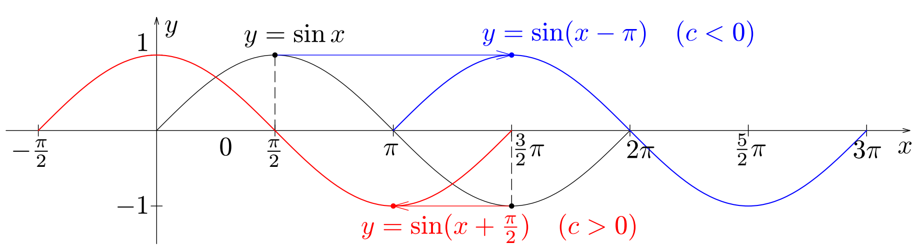
U: Vplyv koeficientov c, d na graf by si mohol poznať.

Ž: *Význam koeficientu d je najľahší. Posúva graf hore alebo dole, c posúva pozdĺž osi x.*

U: ***Ak je $d > 0$, graf sa posunie o d pozdĺž osi y nahor***,
ak je $d < 0$, graf sa posunie o $|d|$ pozdĺž osi y nadol.



U: ***Ak je $c > 0$, graf sa posunie o c pozdĺž osi x doľava***,
ak je $c < 0$, graf sa posunie o $|c|$ pozdĺž osi x doprava.

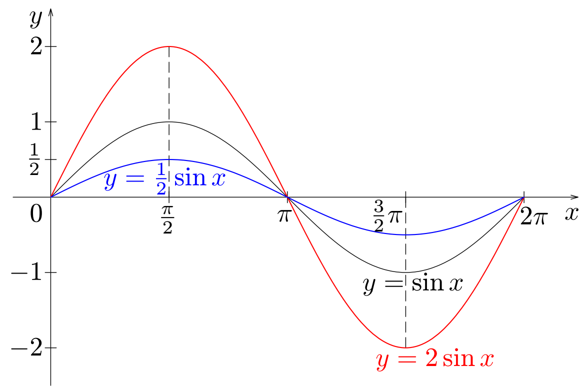


Ž: *Občas to s posúvaním po osi x dopletiem.*

U: Pozri sa na riešené úlohy, kde na konkrétnych grafoch je to podrobnejšie analyzované a je ukázaný aj iný spôsob ako dospieť k výslednému grafu.

Ž: *Dobre. Naznačte ešte, čo urobia s grafom koeficienty a a b.*

U: Koeficient a ***naťahuje sínusoidu v smere osi y $|a|$-krát*** a zároveň ju ***osovo súmerne zobrazí podľa osi x, ak $a < 0$***.

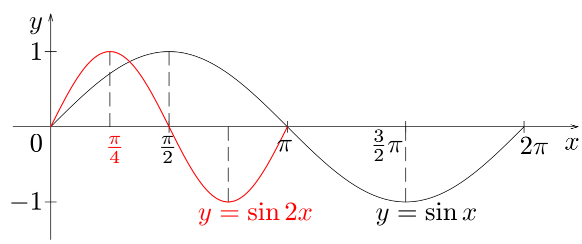


U: ***Koeficient** b* robí to isté, ako a, ale v smere osi x. Stláča, alebo rozťahuje graf danej funkcie v smere osi x.

Ž: *Podobne ako to môžeme robiť s pružinou vo vodorovnej polohe. To sa* **zmení perióda***?*

U: Je to presnejšie pomenovanie významu koeficienta b. ***Perióda sa zmení na*** $p = \dfrac{2\pi}{|b|}$. Ak napríklad $b = 2$, tak perióda $p = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$. To znamená, že základnú časť sínusoidy treba zostrojiť na intervale $\langle 0; \pi \rangle$.

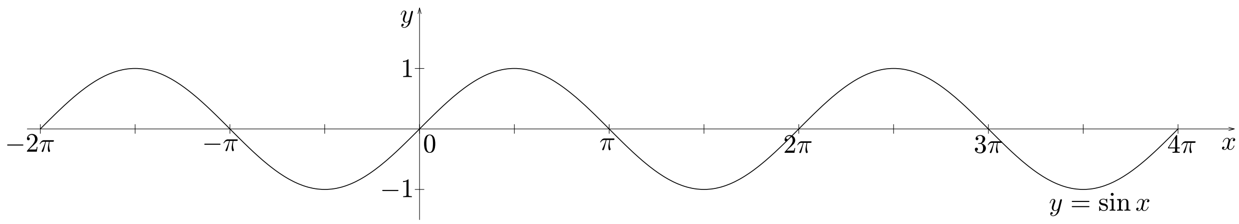
Ž: *Sínusoida sa zhustí.*



U: Pre zmenu periódy platí:
***ak** $|b| > 1$**, tak perióda** 2π **sa** $|b|$**-krát zmenší**,*
ak $|b| < 1$, tak perióda 2π sa $\dfrac{1}{|b|}$-krát zväčší.

Príklad 1: *Načrtnite graf funkcie pre $x \in \langle -2\pi; 4\pi \rangle$, určte periódu, priesečníky so súradnicovými osami a obor funkčných hodnôt, ak:*
$f : y = -\sin x + 2$.

U: Východiskom je graf funkcie $y = \sin x$ pre $x \in \langle -2\pi; 4\pi \rangle$, ktorý predpokladám poznáš.



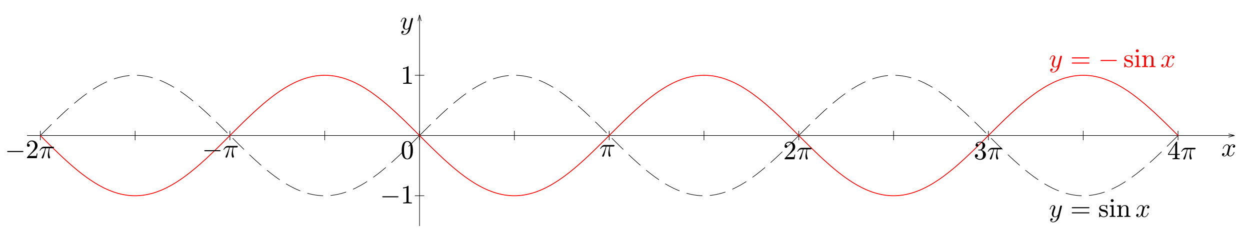
U: V zadanej funkcii $y = -\sin x + 2$ máš dva koeficienty $a = -1$ a $d = 2$. Ktorý z nich má prioritu vzhľadom na operácie v predpise zadanej funkcie?

Ž: -1, *lebo násobenie má prednosť pred sčítaním.*

U: Ako iste vieš, znamienko mínus má viacero významov:
symbolizuje znak odčítania, napr. $2 - 35$,
označuje záporné číslo (-2),
ale aj opačné číslo.
Tak ako $-a$ je opačné číslo k číslu a, tak je $-\sin x$ ***opačné číslo ku hodnote*** $\sin x$ pre každé reálne číslo x.

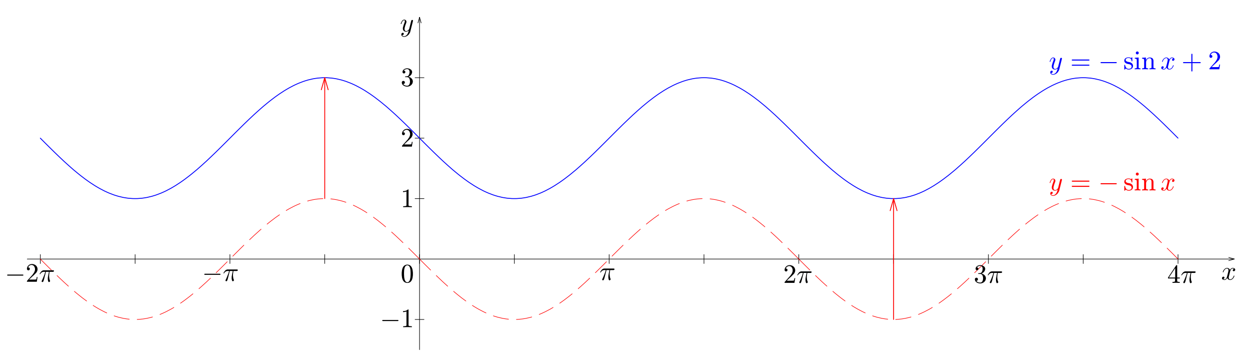
Ž: *Všetky hodnoty na pôvodnom grafe sa zmenia na opačné,* **graf preklopíme podľa osi** x.

U: Presnejšie povedané, využijeme osovú súmernosť podľa osi x.



Ž: *Pripočítať číslo 2 už nie je problém. To, čo som dostal,* **posuniem o 2 jednotky hore pozdĺž osi** y. *Podobne to bolo aj u iných funkcií.*

U: Všetky funkčné hodnoty funkcie f získame z hodnôt $y = -\sin x$ pripočítaním čísla 2.



U: Máme určiť ešte periódu, obor funkčných hodnôt a priesečníky so súradnicovými osami.

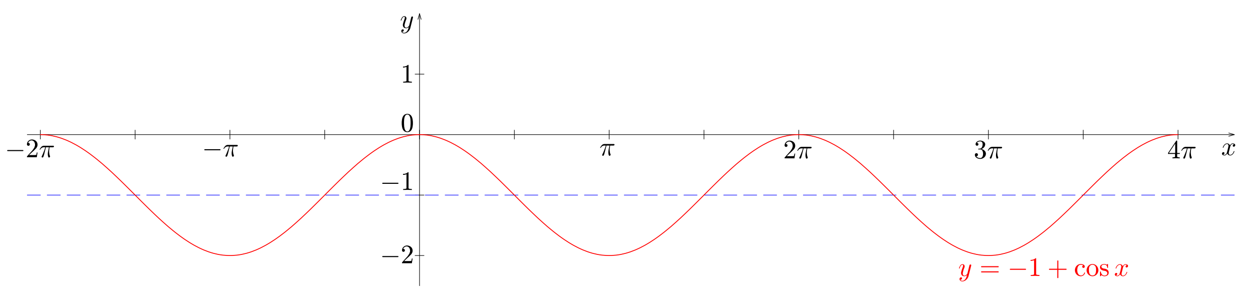
Ž: *Využijem graf: $H(f) = \langle 1; 3\rangle$, perióda je 2π, nemá priesečníky s osou x, lebo ju graf nepretína.*

U: Priesečník s osou y je na základnej sínusoide bod $[0; 0]$, a ten sa tiež posunul o 2 jednotky nahor v smere osi y.

$$f \cap o_y = \{[0; 2]\}\,.$$

Úloha : *Načrtnite graf funkcie pre $x \in \langle -2\pi; 4\pi\rangle$, určte periódu, priesečníky so súradnicovými osami a obor funkčných hodnôt, ak $g : y = -1 + \cos x$.*

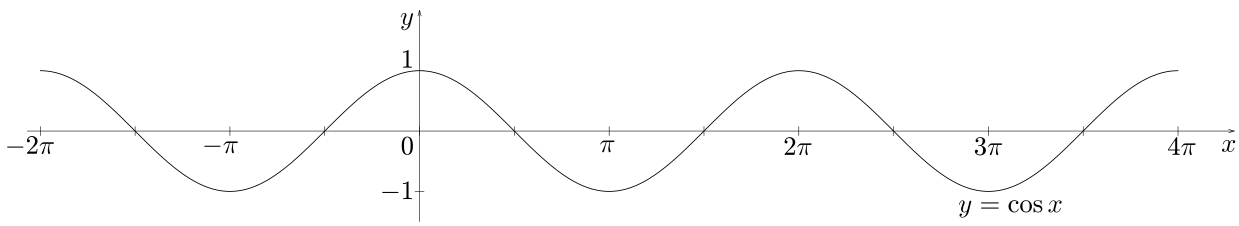
Výsledok: $p = 2\pi$; $H(g) = \langle -2; 0\rangle$; $g \cap o_x = \{2k\pi;\ k \in Z\}$



Príklad 2: *Načrtnite graf funkcie pre $x \in \langle -2\pi; 4\pi \rangle$, určte periódu, priesečníky so súradnicovými osami a obor funkčných hodnôt, ak*

$$f : y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ž: *Začnem grafom funkcie $y = \cos x$.*



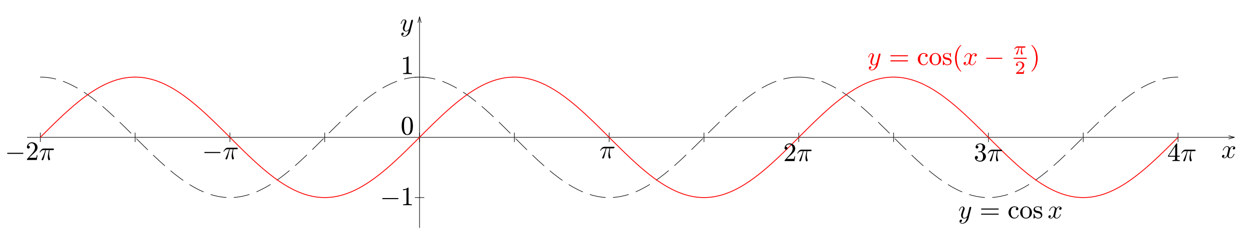
U: V tomto prípade je jedno, v akom poradí aplikuješ koeficienty.

Ž: *Najskôr posuniem o $\frac{\pi}{2}$ pozdĺž osi x. Nepamätám sa či doľava, alebo doprava.*

U: Pomôž si začiatočným bodom $A[0; 1]$ pôvodného grafu na základnom intervale. Hodnotu 1 si dostal, ak si za argument x dosadil 0. Túto úvahu urob aj pre funkciu $f_1 : y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Tu je argument výraz $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Čo musíš dosadiť za x, aby aj tento argument $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ bol nula? Aj táto funkcia bude mať potom hodnotu 1.

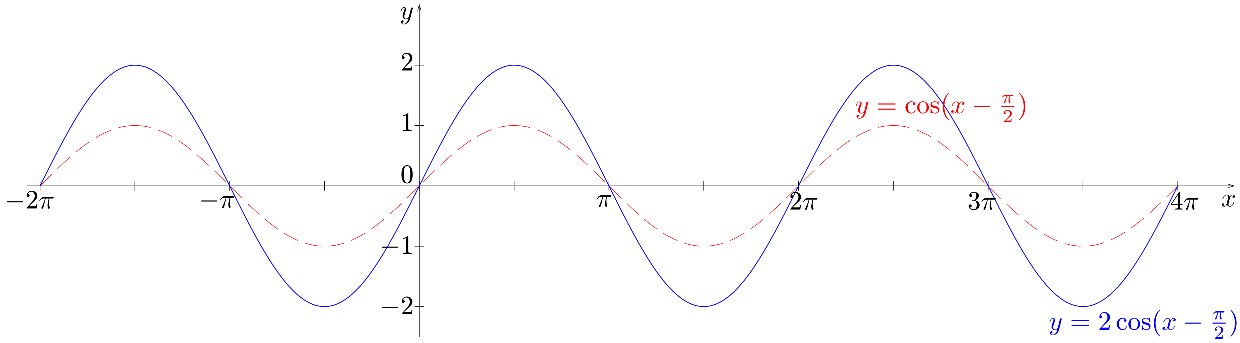
Ž: *To je jednoduché. Treba dosadiť $x = \frac{\pi}{2}$.*

U: A to je podstata. Ak ***za x dosadíš*** $\frac{\pi}{2}$, bude ***argument funkcie f_1 rovný nule*** a teda aj ***hodnota funkcie f_1 bude*** 1. Bod $A[0; 1]$ sa teda posunul do bodu $A'\left[\frac{\pi}{2}; 1\right]$, čiže ***o*** $\frac{\pi}{2}$ ***doprava***. Takto sa potom posunú všetky body grafu funkcie f_1.



Ž: *Číslo 2 pred funkciou kosínus znamená, že sa všetky* **hodnoty zdvojnásobia**.

U: Tam, kde boli maximálne (rovné 1), budú maximálne (rovné 2), minimálne hodnoty teraz budú -2. Tam kde funkcia f_1 nadobúdala nulové hodnoty, ostanú nezmenené, lebo $2 \cdot 0 = 0$.



U: Dokonči riešenie úlohy.

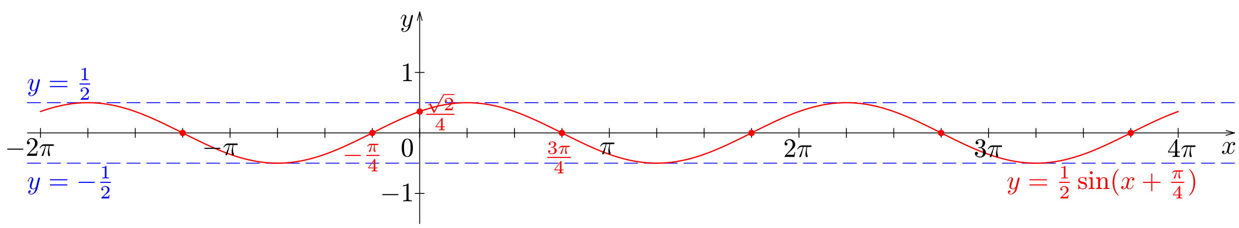
Ž: *Perióda sa nezmenila, $p = 2\pi$, $H(f) = \langle -2; 2\rangle$. Graf tejto funkcie je vlastne sínusoida.*

U: Priesečníky budú teda tie isté ako u funkcie sínus: $x = k\pi$; kde k je celé číslo.

Úloha : *Načrtnite graf funkcie pre $x \in \langle -2\pi; 4\pi\rangle$, určte periódu a obor funkčných hodnôt, ak*

$$g : y = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Výsledok: $p = 2\pi; \quad H(g) = \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle$



Príklad 3: *Načrtnite graf funkcie pre $x \in \langle -2\pi; 4\pi \rangle$, určte periódu, priesečníky so súradnicovými osami a obor funkčných hodnôt, ak*

$$f : y = 2\cos\frac{x}{2}.$$

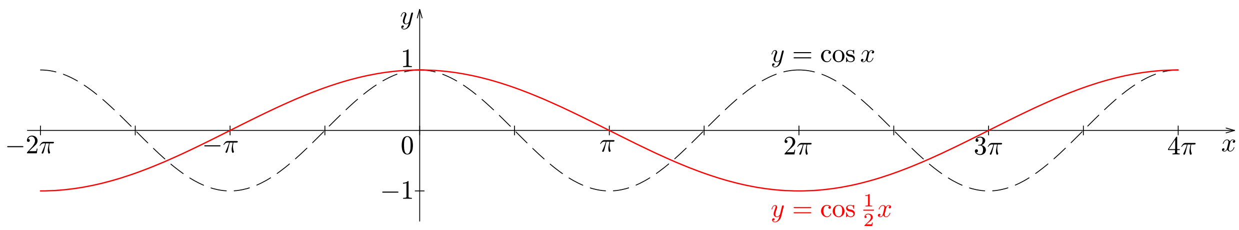
U: V argumente funkcie kosínus číslo $\frac{1}{2}$ násobí reálne číslo x, teda ho ovplyvňuje. $\frac{1}{2}x$ so zväčšujúcimi sa hodnotami x narastá dvakrát pomalšie ako samotné x.

Ž: *Teda aj* **hodnoty** $\cos\frac{x}{2}$ *budú narastať* **dvakrát pomalšie ako pri** $\cos x$*.*

U: Na niektorých intervaloch narastať, na niektorých klesať. V porovnaní s funkciou $y = \cos x$ budú však tieto intervaly pre funkciu $y = \cos\frac{x}{2}$ dvakrát dĺhšie.

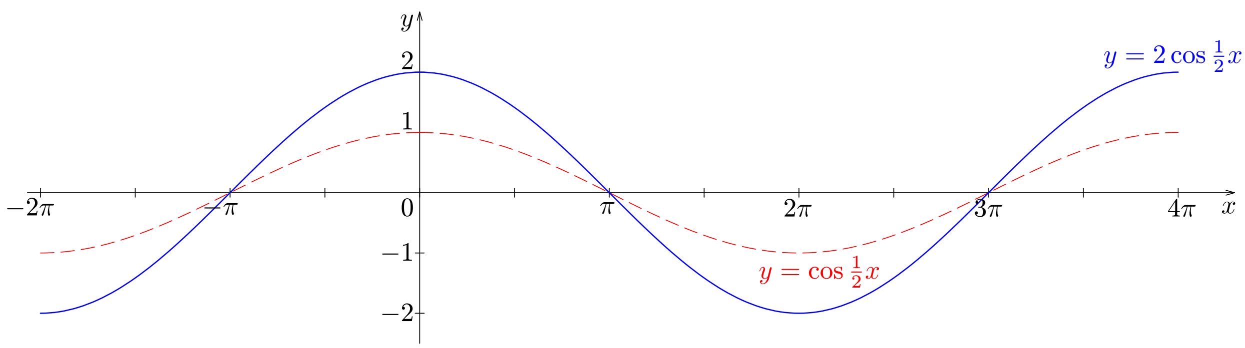
Ž: *Zmení sa perióda?*

U: Bude dvakrát väčšia, bude teda 4π, čo zodpovedá aj poznatku z teórie:
$p = \dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi.$



Ž: *Číslo 2 pred funkciou kosínus súčine znamená, že sa všetky* **hodnoty zdvojnásobia**.

U: Tam, kde boli maximálne (rovné 1) budú maximálne (rovné 2), minimálne hodnoty teraz budú -2. Body, v ktorých funkcia $f_1 : \ y = \cos\frac{x}{2}$ nadobúdala nulové hodnoty, ostanú nezmenené, lebo $2 \cdot 0 = 0$.



U: Vyrieš zvyšné časti úlohy.

Ž: *Periódu sme už určili, je to 4π. Obor funkčných hodnôt je uzavretý interval $\langle -2;\ 2 \rangle$ a priesečníky s osou x určím, ak za y dosadím 0.*

U: Budeš riešiť rovnicu: $\cos\frac{x}{2} = 0$. Použi substitúciu $u = \frac{x}{2}$ a získaš rovnicu:

$$\cos u = 0.$$

Ž: *Kosínus má nulové hodnoty pre argument rovný nepárnym celočíselným násobkom čísla* $\frac{\pi}{2}$.

U: To znamená:

$$u = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

a teda

$$\frac{x}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

z čoho

$$x = (2k+1)\pi.$$

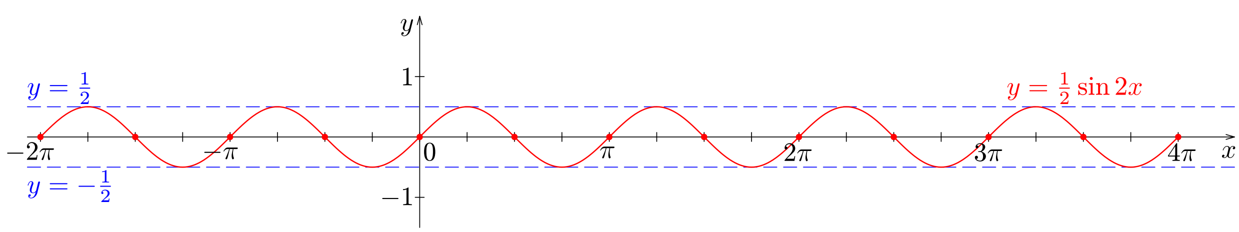
Ž: *Aj nulové body nadobúda táto funkcia dvakrát zriedkavejšie.*

U: Tieto výpočty ti niekedy pomôžu odkontrolovať predchádzajúce úvahy.

Úloha : *Načrtnite graf funkcie pre* $x \in \langle -2\pi; 4\pi \rangle$, *určte periódu, priesečníky so súradnicovými osami a obor funkčných hodnôt, ak*

$$g: y = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Výsledok: $p = \pi$; $\quad H(g) = \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$; $\quad g \cap o_x = \left\{ \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z} \right\}$



Príklad 4: *Načrtnite graf funkcie pre $x \in \langle -2\pi; 4\pi \rangle$, určte periódu a obor funkčných hodnôt, ak $f: y = \sin(\pi - 2x) - 0{,}5$.*

U: Číslo -2 v argumente funkcie $\sin(\pi - 2x)$ súvisí s dvoma zmenami na grafe. ***Zmení sa perióda a graf funkcie sa preklopí***.

Ž: *Prečo sa preklopí, veď sínus nie je násobený žiadnym záporným číslom.*

U: To záporné číslo je schované v argumente. Pretože funkcia ***sínus je nepárna***, po úprave argumentu a využití nepárnosti dostaneme:

$$y = \sin\left[-(2x - \pi)\right],$$

čo znamená, že

$$y = -\sin(2x - \pi).$$

Ž: *Ak som dobre porozumel, pre úvahy o grafe zloženej funkcie sínus je dobré, aby koeficient pri x bolo kladné reálne číslo.*

U: Áno, zápornosť tohto čísla v tomto prípade ovplyvňuje to, čo súvisí aj s koeficientom násobenia hodnoty sínus. Aby sme odhalili všetky zmeny týkajúce sa grafu, je nutné v argumente osamostatniť x.

Ž: *Vyberiem pred zátvorku 2:*

$$y = -\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

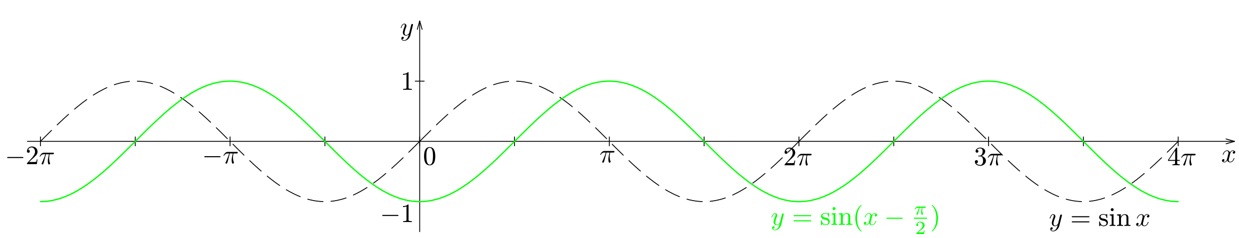
U: Predpis zadanej funkcie má teraz tvar:

$$f: y = -\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] - 0{,}5.$$

U: Budeme postupne aplikovať geometrický význam jednotlivých koeficientov. Začneme v takom poradí, v akom sa uplatňujú koeficienty z hľadiska priority operácií pri počítaní funkčnej hodnoty. Východiskovým grafom je $y = \sin x$.

Ž: *Potom ho posunieme v smere osi x* **doprava o $\frac{\pi}{2}$**.

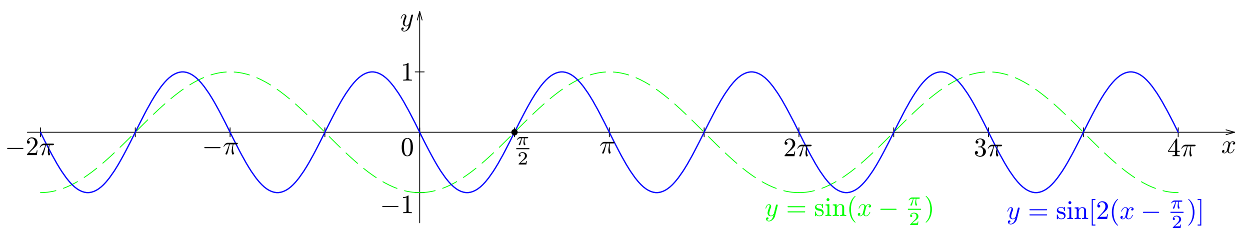
U: Získame graf funkcie $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$



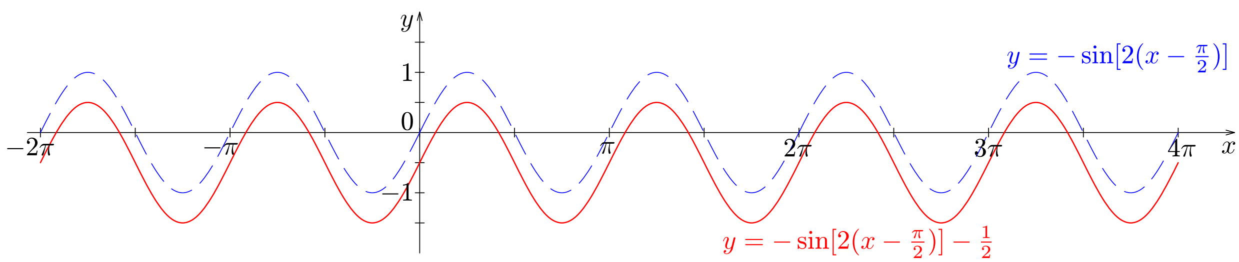
U: Čo zmení koeficient 2 v argumente funkcie?

Ž: **Perióda bude polovičná**.

U: Sínusoidu načrtneme dvakrát hustejšie od bodu $\left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$ napravo aj naľavo.



Ž: *Zvyšné koeficienty už mi nerobia problém. Najskôr* **preklopím** *posledný graf podľa osi x, lebo je tam -1 násobok sínusu, a nakoniec* **posuniem dole o** $0{,}5$.



U: O perióde sme už hovorili, bude polovičná v porovnaní s jednoduchou funkciou sínus, teda $p = \pi$.
Zostáva určiť obor funkčných hodnôt.

Ž: *Z obrázka sa dá vyčítať, že oborom funkčných hodnôt je uzavretý interval* $\langle -1{,}5; 0{,}5\rangle$.

U: Existujú aj iné metódy, ktoré nás dovedú k výslednému grafu.

Ž: *Môžete jednu, takú jednoduchšiu, prezradiť?*

U: Prečo nie? Pozri sa na výsledný graf, a pokús sa zistiť, čo je na ňom dôležité, ak nechceš prejsť tortúrou posúvania, zmeny periódy a podobne.

Ž: *Kopčeky, doliny? Netuším.*

U: V podstate áno. Stačí však jedno maximum a jedno minimum. Stačí nájsť ***základný motív***, ktorý budeme opakovať. On je jednoznačne určený odĺžnikom, ktorého jednou stranou je ***interval dĺžky periódy*** tejto funkcie a druhou stranou ***obor funkčných hodnôt***.

Ž: *Ako to určíme?*

U: Pre funkciu $y = \sin u$ je základným intervalom pre argument u interval $\langle 0; 2\pi)$. To isté musí platiť pre akýkoľvek argument. V našom prípade:

$$0 \leqq (2x - \pi) < 2\pi;$$

pripočítame π:

$$\pi \leqq 2x < 3\pi,$$

vydelíme 2:

$$\frac{\pi}{2} \leqq x < \frac{3\pi}{2}.$$

Základný motív načrtneme na intervale $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$.

Ž: *Zaujímavé. Je to interval dĺžky π, čo je perióda.*

U: Dokonca začína v bode do ktorého sme v predchádzajúcej metóde posunuli graf. Určíme ešte funkčné hodnoty. Opäť si pomôžem základným grafom. Sleduj úpravy v tabuľke. V prvom riadku je vyjadrená vlastnosť, že hodnoty funkcie $y = \sin x$ sú v rozmedzí od -1 do 1 vrátane týchto čísel. To isté platí pre akýkoľvek argument funkcie sínus, teda aj pre hodnoty $\sin(2x - \pi)$. Vynásobením číslom -1 získame také isté ohraničenie pre funkciu $y = -\sin(2x - \pi)$. Ak odpočítame číslo $0,5$ dostaneme rozmedzie pre hodnoty funkcie $y = -\sin(2x - \pi) - 0,5$.

$$-1 \leqq \sin x \leqq 1$$

$$-1 \leqq \sin(2x - \pi) \leqq 1$$

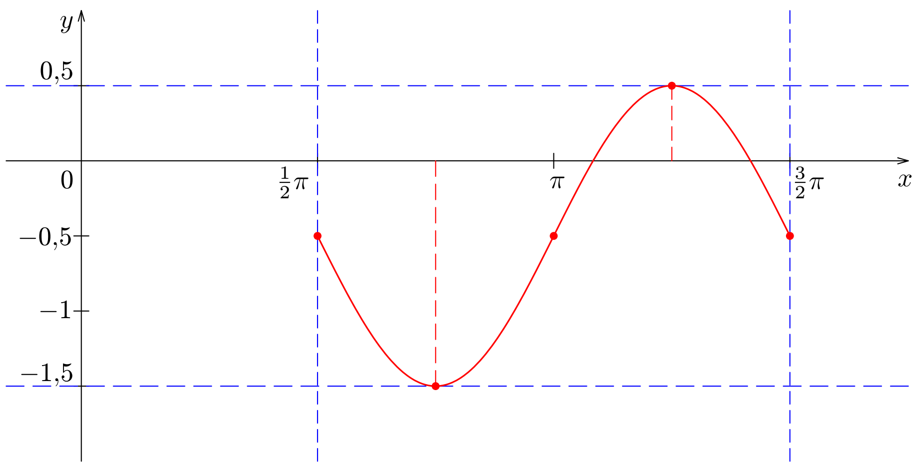
$$1 \geqq -\sin(2x - \pi) \geqq -1$$

$$1 - 0{,}5 \geqq -\sin(2x - \pi) - 0{,}5 \geqq -1 - 0.5$$

$$0,5 \geqq -\sin(2x - \pi) - 0{,}5 \geqq -1{,}5$$

Ž: *Hodnoty y budú v rozmedzí* **od $-1{,}5$ do $0{,}5$ vrátane**. *To sme dostali aj predtým.*

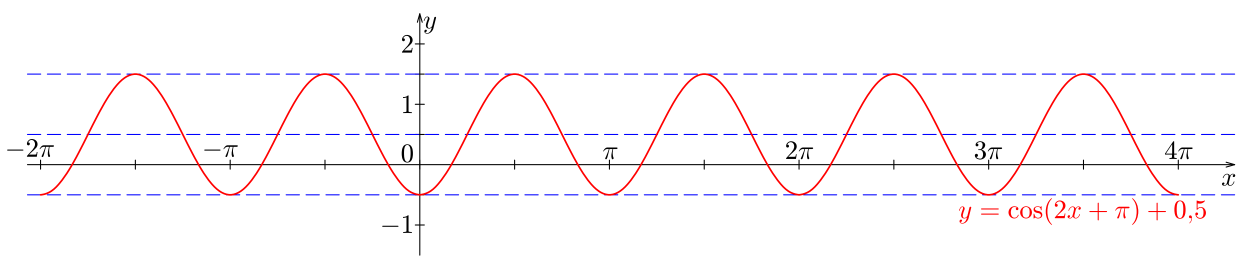
U: Samozrejme. Tu však načrtneme len jeden graf, a to výsledný do predtým vymedzeného obdĺžnika.



U: Vymedzíme stredné (predtým nulové hodnoty) a zohľadníme preklopenie vďaka koeficientu -1. Rozpočítame hodnoty pre x na danom intervale tak, aby sme začali strednou hodnotou, minimom, strednou hodnotou, maximom a ukončili strednou hodnotou.

Úloha : *Načrtnite graf funkcie pre* $x \in \langle -2\pi; 4\pi \rangle$*, určte periódu a obor funkčných hodnôt, ak:* $g : y = \cos(\pi + 2x) + 0,5$.

Výsledok: $p = \pi; \quad H(f) = \langle -0,5; 1,5 \rangle$



Príklad 5: *Načrtnite graf funkcie* $f : y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$.

U: Predpis funkcie upravíme na tvar

$$y = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] - 1,$$

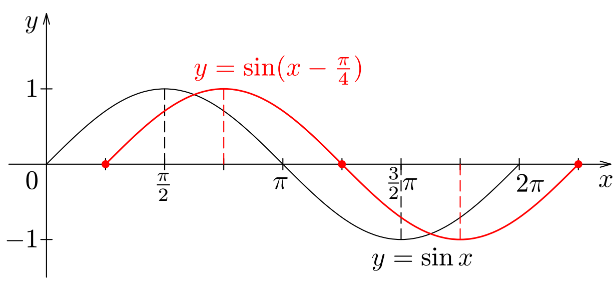
pretože posun pozdĺž osi x sa viaže na argument x, nie $2x$. Zohľadníme význam všetkých koeficientov od vnútra zápisu tak, ako sa zadaná zložená funkcia vytvára.

Ž: *Určite začneme grafom funkcie* $f_1 = \sin x$

U: Áno, potom postupne grafom funkcií
$f_2 : y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$, čo je posun grafu f_1 pozdĺž osi x o $\frac{\pi}{4}$ ***doprava***,
$f_3 : y = \sin 2(x - \frac{\pi}{4})$, má ***dvakrát menšiu periódu*** ako u funkcie f_2
Funkcia $f_4 : y = 2\sin 2(x - \frac{\pi}{4})$ má ***dvojnásobné hodnoty*** v porovnaní s funkciou f_3

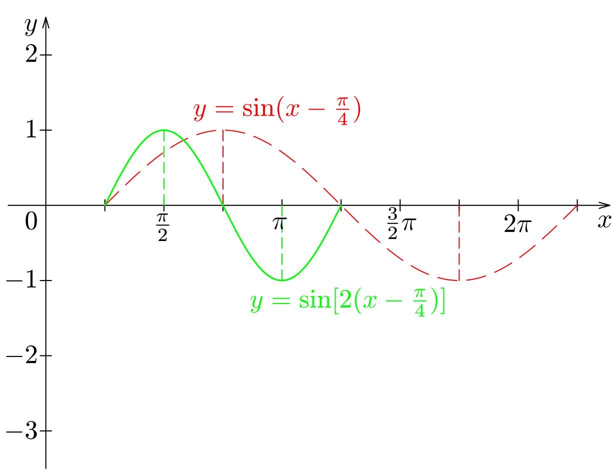
Ž: *Nakoniec posunieme o* 1 **nahor** *pozdĺž osi* y *a dostaneme graf zadanej funkcie* f. *To všetko do jedného obrázka? Bude to pri mojej šikovnosti dosť neprehľadné.*

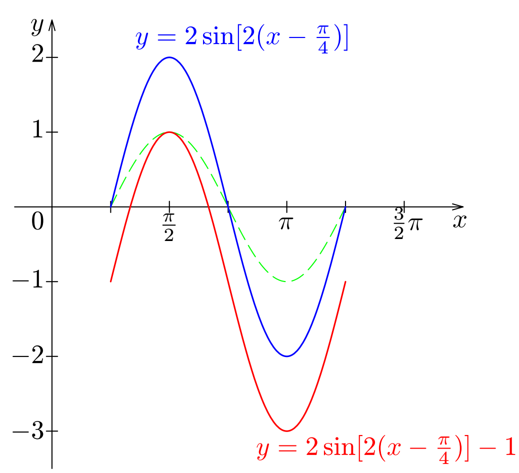
U: Urob radšej cyklus obrázkov. Ako film.



Ž: *S grafom funkcie* f_3 *potrebujem poradiť.*

U: Keďže perióda bude polovičná v porovnaní s funkciou f_2, tak tam, kde máš polovicu základného motívu sínusoidy pre f_2, musíš načrtnúť pre f_3 celý základný motív.

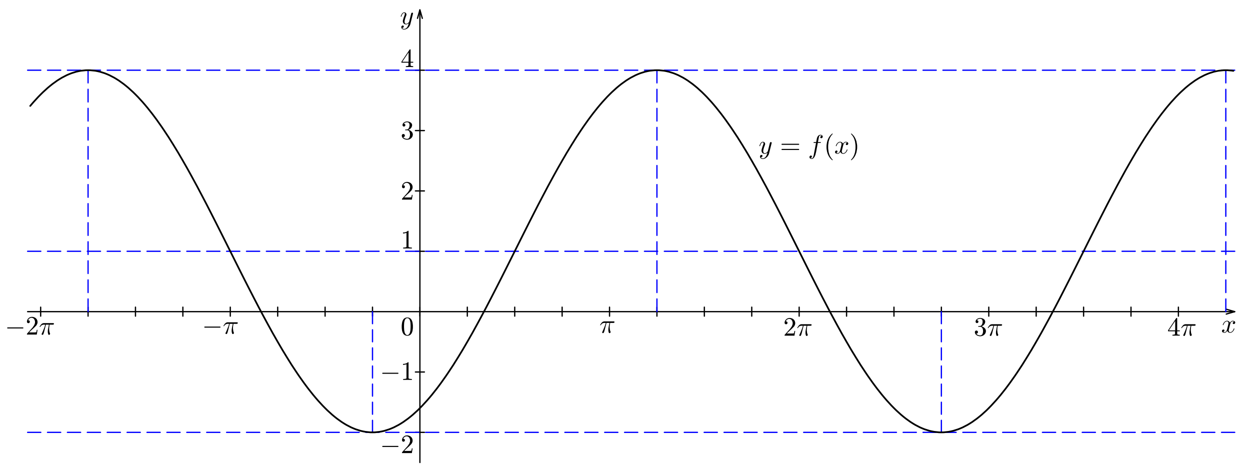




Ž: *Dosť náročné na čas, aj presnosť.*

U: To áno, ale na druhej strane je to veľmi potrebné napríklad pre fyziku. Aby si pochopil fázový posun, amplitúdu a iné veci so striedavým prúdom a napätím, potrebuješ poznať aj tieto komplikovanejšie veci.

Príklad 6: *Daný je graf funkcie podľa obrázka. Určte predpis funkcie.*



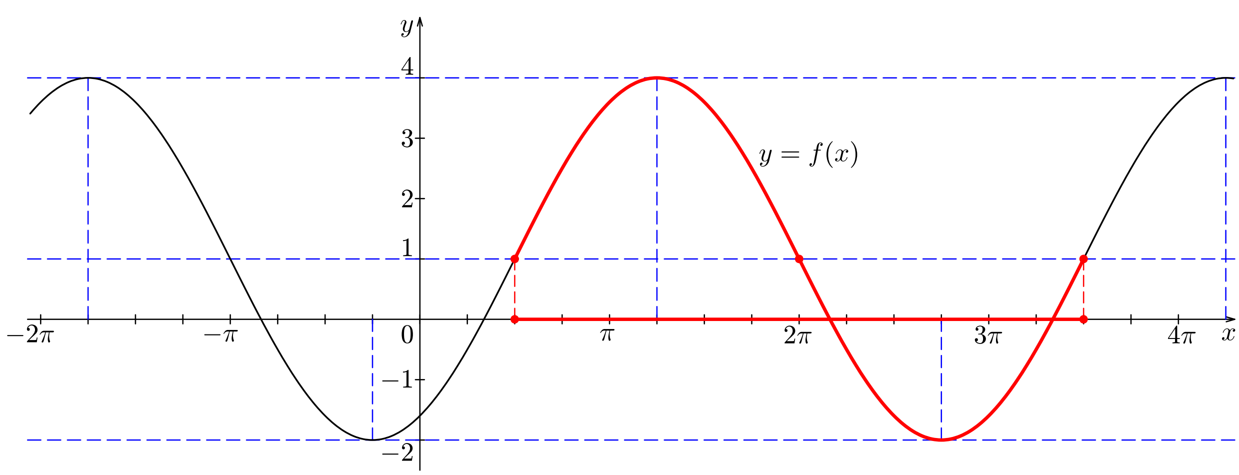
U: Máš predstavu, ktorá z funkcií sínus, respektíve kosínus by to mohla byť?

Ž: *Zdá sa mi, že aj sínus, aj kosínus.*

U: V tom je zadanie po prvýkrát nejednoznačné z hľadiska výsledku. Ukážeme si, že tento graf možno chápať aj ako graf funkcie sínus, aj ako graf funkcie kosínus. Čo určite nezávisí od toho, ktorá z týchto funkcií to je, je posunutie grafu pozdĺž osi y. Pomôže ti, ak si uvedomiš, že maximá, aj minimá pre neposunutý graf majú rovnakú absolútnu hodnotu.

Ž: *V zadanom grafe sú maximá* 4 *a minimá* -2. *Keďže* **stred** *tohto intervalu je v bode* 1*, tak posunutie bude o* 1 *nahor.*

U: Máme jeden koeficient v predpise zloženej funkcie, ktorú hľadáme: $d = 1$. Pre určenie ostatných musíme urobiť dve rozhodnutia:
1. predpis funkcie, ktorú budeme určovať,
2. ***na ktorom intervale*** zoberieme základný motív grafu.



Ž: *Skúsme s funkciou sínus na intervale* $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right\rangle$.

U: Vybral si jeden z možných intervalov. V tom je zadanie po druhýkrát nejednoznačné z hľadiska výsledku. Dĺžka základného intervalu určuje najmenšiu periódu, ktorá súvisí s ďalším koeficientom v predpise: $f : y = a \sin [b\,(x + c)] + d$.

Ž: *Dĺžka intervalu je* $\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{6\pi}{2} = 3\pi$ *a to je najmenšia* **periódа**. *Viem, že súvisí s koeficientom* b*, ale potrebujem vysvetliť ako.*

U: Zjednodušene povedané, ak je koeficient $b = 2$, hodnoty argumentu narastajú dvakrát rýchlejšie, perióda je polovičná. To nie je náš prípad, preto $b \in (-1; 1)$. Nová perióda 3π je $1,5$- krát väčšia ako základná perióda 2π. Koeficient b je preto $b = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$ Ani tento koeficient nezávisí od toho, či hľadáme predpis funkcie sínus alebo kosínus.

Ž: *Ako určíme zvyšné koeficienty?*

U: Cestu k ich určeniu si v podstate naznačil, aj keď si to neuvedomuješ. Povedal si, že maximá majú hodnotu 4 a minimá hodnotu -2. To je rozpätie 6. ***Naťahovanie spôsobuje koeficient*** a. Akú hodnotu by teda mal mať?

Ž: *Tri.*

U: Áno, ale to len preto, že na nami zvolenom intervale graf zadanej funkcie kopíruje graf funkcie $y = \sin x$.

Ž: *Ak by na tomto intervale boli dolina a kopec* **opačne**, *bolo by* $a = -3$*?*

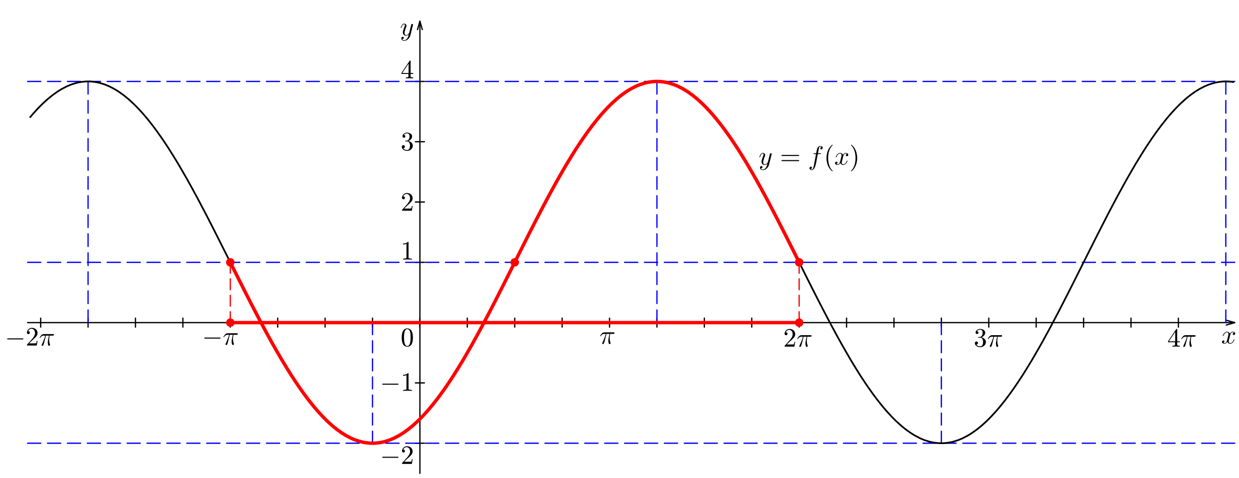
U: Pochopil si to správne. Mohol by zostať kladný, ale na zápornú hodnotu by si musel zmeniť koeficient b. Vtedy by si využil pre úpravu nepárnosť funkcie. Určením intervalu si zároveň popísal, o koľko došlo k posunutiu základného grafu v smere osi x.

Ž: *O* $\frac{\pi}{2}$ *doprava, teda* $c = -\frac{\pi}{2}$.

U: Predpis funkcie môže mať teda tvar:

$$f : y = 3 \sin \left[\frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 1$$

Teraz si ukážeme, že aj pre funkciu sínus to nie je jednoznačné z hľadiska výsledku. Za základný interval by sme si mohli zobrať $\langle -\pi; 2\pi \rangle$.



Ž: *Ale perióda a posunutie hore by sa nezmenili.*

U: Zmení sa iba posunutie v smere osi x a koeficient a, lebo tvar sínusoidy na tomto intervale je preklopený.

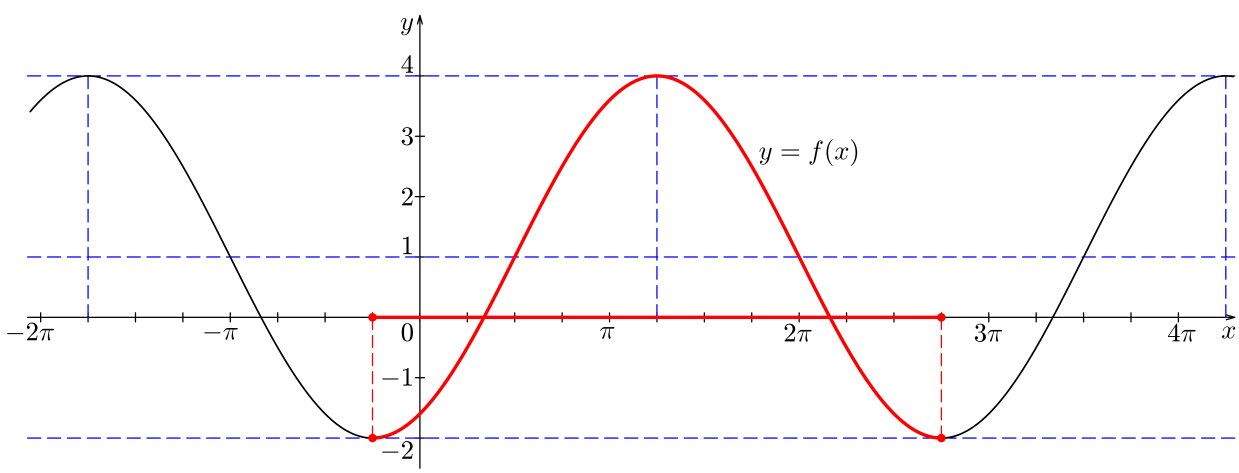
Ž: $a = -3$ a $c = \pi$.

U: Riešením úlohy je aj predpis:

$$f : y = -3 \sin \left[\frac{2}{3} (x + \pi) \right] + 1.$$

Ž: *Začínam chápať. Všetko je len otázka dobre čítať graf.*

U: Chválim ťa. Nájdime nakoniec aspoň jeden tvar predpisu pre funkciu ***kosínus***. Zoberme interval $\left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{4} \right\rangle$.



Ž: *Veľa vecí sa nezmení. Posunutie hore, perióda, natiahnutie pozdĺž osi y. Akurát sa preklopilo a posunulo naľavo o $\frac{\pi}{2}$. Koeficienty budú:*

$$a = -3; \qquad b = \frac{2}{3}; \qquad c = \frac{\pi}{4}; \qquad d = 1.$$

Úlohe vyhovuje aj predpis:

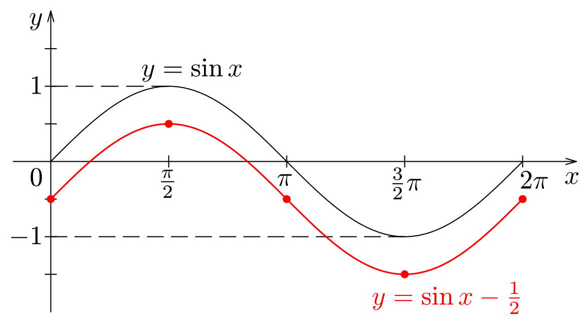
$$f : y = -3 \cos \left[\frac{2}{3} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right] + 1.$$

Príklad 7: *Načrtnite graf funkcie* $f : y = \left|\sin x - \dfrac{1}{2}\right|$.

Ž: *V úlohe rozoberiem dva prípady, aby som odstránil absolútnu hodnotu.*

U: Je to jeden z možných prístupov k riešeniu, ale nie je efektívny. Absolútna hodnota je vo vyjadrení funkcie z celého výrazu na pravej strane. Začni najskôr grafom funkcie $f_1 : y = \sin x - \dfrac{1}{2}$. Potom si vysvetlíme, čo spôsobí absolútna hodnota.

Ž: *To nebude problém. Načrtnem graf funkcie $y = \sin x$, a ten posuniem po osi y* **nadol o** $\dfrac{1}{2}$.



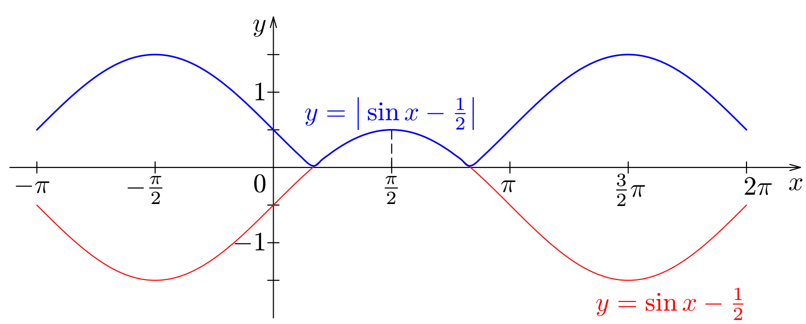
U: Funkcia $f_1 : y = \sin x - \dfrac{1}{2}$ má hodnoty, ktoré sú nezáporné, ale aj hodnoty záporné. Keďže absolútna hodnota sa podľa definície počíta dvojako, zohľadníme túto skutočnosť aj pri určení výsledného grafu. Ak je reálne číslo a nezáporné ($a \geqq 0$), tak jeho absolútna hodnota je to isté číslo: $|a| = a$. Pre graf to znamená, že tým častiam, ktoré sú ***nad osou x*** prislúchajú ***kladné hodnoty***, čiže absolútna hodnota ich ***nemení***. To čo je nad osou x na grafe funkcie $f_1 : y = \sin x - \dfrac{1}{2}$ patrí aj výslednému grafu.

Ž: *Už si spomínam. To isté sme robili aj u iných funkcií.*

U: Ak je reálne číslo záporné ($a < 0$), tak jeho absolútna hodnota je k nemu opačné číslo: $|a| = -a$. Pre graf to znamená, že tým jeho častiam, ktoré sú ***pod osou x*** prislúchajú záporné hodnoty.

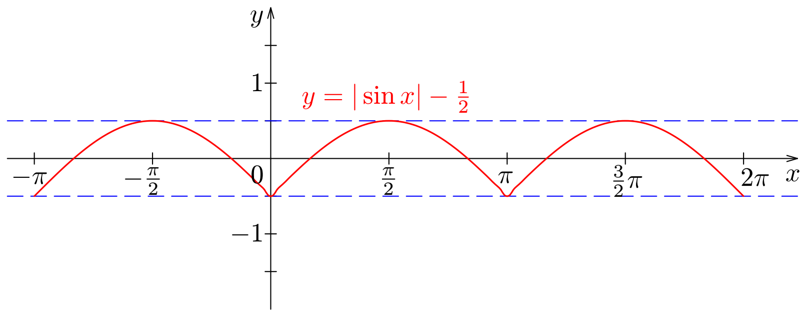
Ž: *Treba ich zmeniť na kladné, pretože si to vyžaduje absolútna hodnota. Tak to jednoducho* **preklopíme podľa osi** x.

U: Časti grafu funkcie pod osou x zobrazíme osovo súmerne podľa osi x.



Úloha : *Načrtnite graf funkcie* $g : y = |\sin x| - \dfrac{1}{2}$.

Výsledok:

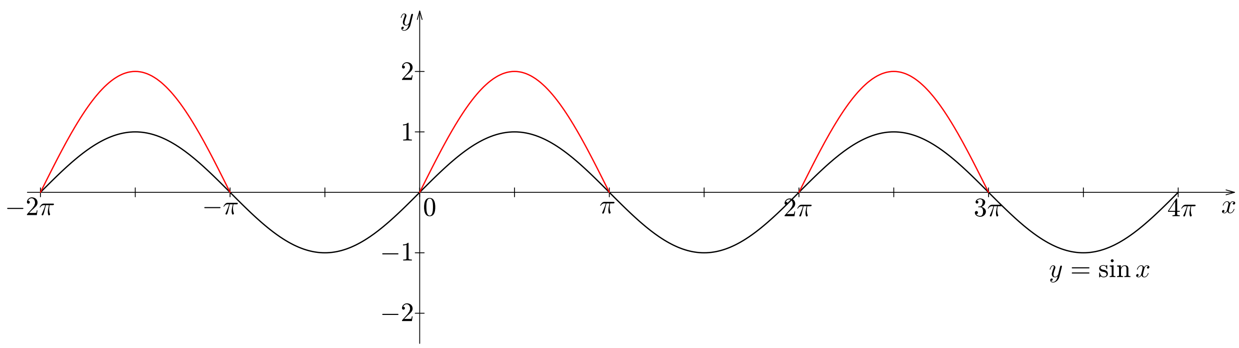


Príklad 8: *Načrtnite graf funkcie* $f: y = \sin x + |\sin x|$.

U: V predpise funkcie je v absolútnej hodnote iba časť výrazu na pravej strane, preto rozoberieme ***dva prípady***, aby sme absolútnu hodnotu odstránili. Ak je $\sin x \geqq 0$, tak $|\sin x| = \sin x$. Ako bude v tomto prípade vyzerať predpis funkcie f?

Ž: *Namiesto absolútnej hodnoty zo sínusu dosadím sínus:*
$f_1: y = \sin x + \sin x$
$f_1: y = 2\sin x$.
Vyriešime aj podmienku $\sin x \geqq 0$, *pre ktorú sme získali upravený predpis funkcie?*

U: Môžeme, ale nie je to vždy nutné. Zohľadníme ju vo výslednom grafe, v ktorom načrtneme aj graf funkcie $y = \sin x$. Graf funkcie $y = 2\sin x$ načrtneme iba na tých intervaloch, kde je graf funkcie $y = \sin x$ nad osou x.



U: Hodnoty funkcie $y = 2\sin x$ sú dvojnásobkami hodnôt funkcie $y = \sin x$. Druhý prípad, keď $\sin x < 0$ sa pokús vyriešiť analogicky.

Ž: *Ak je* $\sin x < 0$, *tak* $|\sin x| = -\sin x$, *lebo absolútna hodnota zo záporného čísla je k nemu opačné číslo. Dosadím:*
$f_2: y = \sin x + (-\sin x)$
$f_2: y = 0$.
To už nie je goniometrická funkcia.

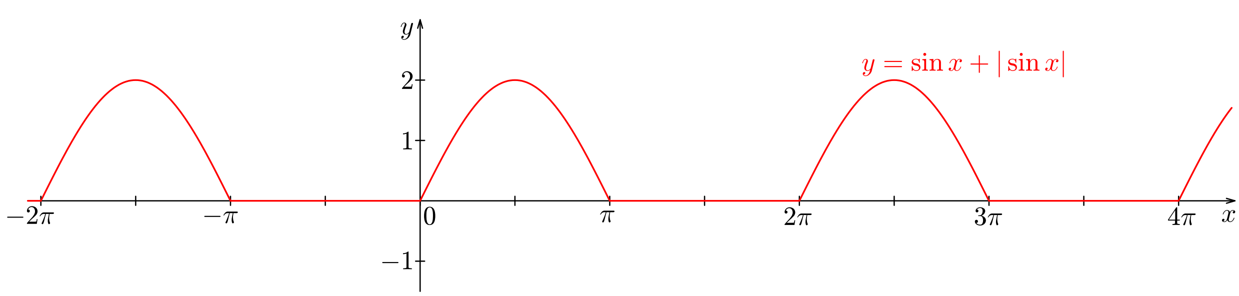
U: Je to konštantná funkcia, lebo bez ohľadu na to aké je reálne číslo x, jemu prislúchajúca hodnota je vždy 0. Čo je grafom tejto konštantnej funkcie?

Ž: *Priamka.*

U: Presnejšie os x. Našej úlohe však vyhovujú iba časti tejto priamky. Vyznačíme ich vo výslednom grafe tam, kde je sínusoida pôvodného grafu pod osou x.

Ž: *Pretože sínus bol záporný.*

U: Áno. Spojením oboch prípadov dostaneme výsledný graf.



Úloha : *Načrtnite graf funkcie* $g : y = \cos x - |\cos x|$.

Výsledok: