Goniometrické nerovnice

RNDr. Marián Macko

U: Problematiku, ktorej sa budeme venovať, začneme úlohou.

Máme určiť definičný obor funkcie f zadanej predpisom $y = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}$. Máš predstavu, s čím táto úloha súvisí?

Ž: *Výraz pod odmocninou musí nadobúdať nezáporné hodnoty. Mali by sme vyriešiť podmienku* $\sin x - \frac{1}{2} \geqq 0$.

U: Ide o ***goniometrickú nerovnicu***. Môžeme ju upraviť na základný tvar $\sin x \geqq \frac{1}{2}$. Ukážeme si dve metódy jej riešenia. Prvá metóda je založená na grafoch funkcií, druhá využíva definíciu funkcie sínus.

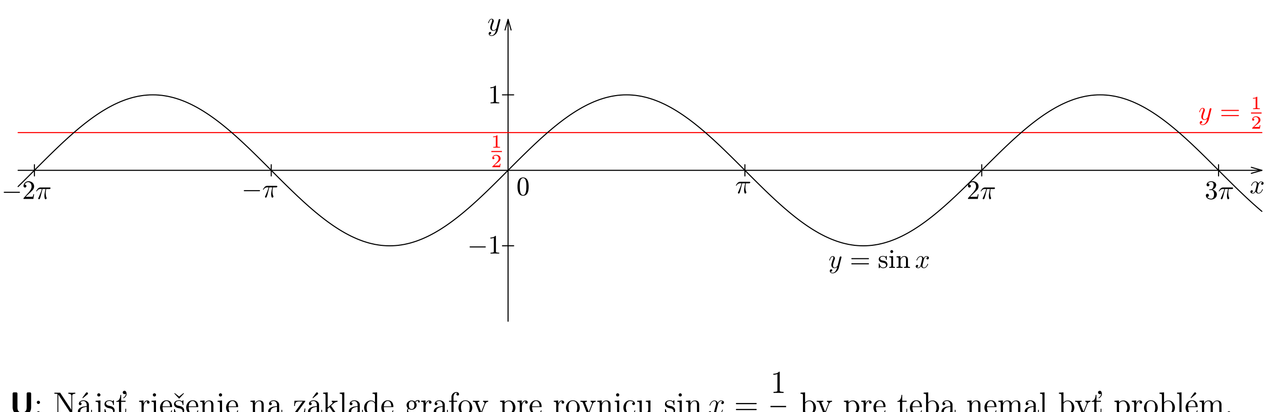
Ž: *Pri prvej metóde riešenia určite využijeme graf funkcie sínus. Netuším, ktoré ďalšie funkcie máte na mysli.*

U: Samotný ***zápis nerovnice je porovnaním funkčných hodnôt dvoch funkcií***. Výraz $\sin x$ na ľavej strane určuje hodnoty funkcie $g : y = \sin x$. Hodnoty druhej funkcie sú určené výrazom na pravej strane.

Ž: *Myslíte konštantnú funkciu* $h : y = \frac{1}{2}$*?*

U: Áno. Dúfam, že vieš ako vyzerajú grafy oboch funkcií.

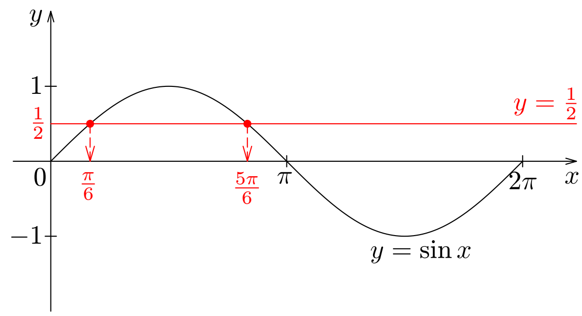
Ž: *Grafom funkcie sínus je sínusoida. Konštantná funkcia má graf* **priamku rovnobežnú s x-ovou osou**. *Priamka pretína y-ovú os v bode* $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.



U: Nájsť riešenie na základe grafov pre rovnicu $\sin x = \frac{1}{2}$ by pre teba nemal byť problém.

Ž: *V prípade rovnice sa funkčné hodnoty oboch funkcií majú rovnať. Preto určíme priesečníky grafov oboch funkcií g a h.*

U: Samotné riešenie rovnice je potom určené ***x-ovými súradnicami*** týchto ***priesečníkov***. Urči tieto riešenia pre náš prípad. Stačí ak zoberieš základný interval $\langle 0; 2\pi)$.



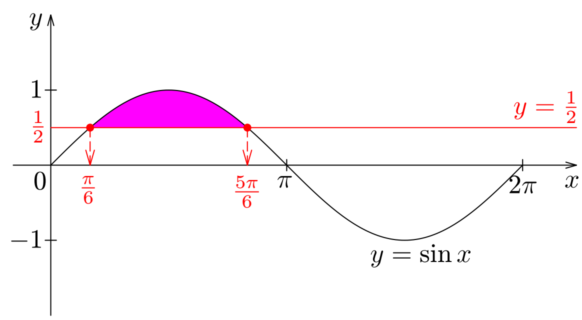
Ž: *Funkcia sínus nadobúda hodnotu* $\dfrac{1}{2}$ *v tomto intervale dvakrát. Raz pre známu hodnotu argumentu, rovnú číslu* $\dfrac{\pi}{6}$. *Druhú hodnotu* $\dfrac{5\pi}{6}$ *dostanem, ak číslo* $\dfrac{\pi}{6}$ *odčítam od čísla* π.

$$\boxed{\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}}$$

U: Pri riešení ***rovnice*** nás zaujímajú x-ové súradnice priesečníkov grafov dvoch funkcií. To preto, že ***hodnoty funkcií sa majú rovnať***. Ako sa to zmení pre nerovnicu $\sin x \geqq \dfrac{1}{2}$? Aký má byť vzťah medzi hodnotami funkcií g a h?

Ž: *Hodnoty ľavej strany majú byť väčšie alebo rovné hodnotám pravej strany. Hodnoty funkcie sínus majú byť* **väščie alebo rovné číslu** $\dfrac{1}{2}$.

U: Preto okrem x-ových súradníc priesečníkov grafov týchto dvoch funkcií zoberieme za riešenie aj intervaly, kde sínusoida sa nachádza ***nad priamkou***. Vtedy každý bod na sínusoide má väčšiu y-ovú súradnicu ako bod s rovnakou x-ovou súradnicou na priamke.



Ž: *Takže riešením nerovnice budú všetky reálne čísla medzi hodnotami, ktoré sme určili pri rovnici* $\sin x = \dfrac{1}{2}$?

U: Áno. Základným riešením nerovnice $\sin x \geqq \dfrac{1}{2}$ bude uzavretý interval $\left\langle \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6} \right\rangle$. Funkcia sínus je však periodická s najmenšou periódou 2π. Preto riešením bude aj každý interval získaný posunutím ***základného intervalu o celočíselné násobky čísla*** 2π. Pozri sa na číselnú os. Znázorňuje základné riešenie a intervaly, ktoré sme dostali jeho posunuím o číslo 2π doprava a doľava. Takýchto intervalov je nekonečne veľa.

Ž: *Ako zapíšeme výsledok riešenia?*

U: Použiješ zápis obsahujúci symbol zjednotenia nekonečného počtu intervalov. ***Ľavú hranicu intervalu*** zapíšeš pomocou súčtu čísla $\frac{\pi}{6}$ a celočíselných násobkov periódy funkcie sínus. Pravú hranicu analogicky, ale s číslom $\frac{5\pi}{6}$. Riešenie nerovnice je zároveň určením definičného oboru zadanej funkcie f. Pozri výsledok v rámčeku.

$$\boxed{\mathcal{D}(f) = \mathcal{K} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle}$$

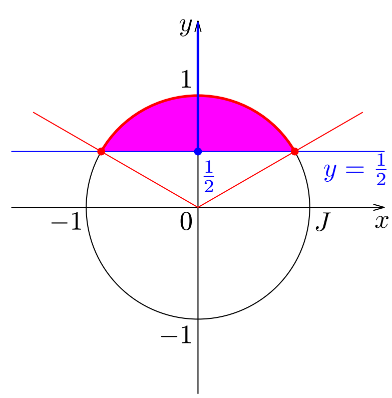
Ž: *Spomínali ste možnosť riešenia zadanej nerovnice na základe definície funkcie sínus.*

U: Pri tejto metóde celú situáciu zadanú nerovnicou znázorníš pomocou jednotkovej kružnice. Východiskom je definícia funkcie sínus a jej interpretácia na jednotkovej kružnici.

Ž: *Funkcia* **sínus priraďuje reálnemu číslu** x y**-ovú súradnicu** *bodov na jednotkovej kružnici, ktoré sú istým spôsobom priradené tomuto reálnemu číslu* x.

U: Čo hovorí zápis nerovnice $\sin x \geqq \frac{1}{2}$ v zmysle tejto interpretácie?

Ž: *Pre rovnicu by som vedel. Na jednotkovej kružnici treba nájsť všetky body, ktorých y-ová súradnica je rovná číslu* $\frac{1}{2}$. *Také body sú dva, v I. a v II. kvadrante. Odpovedajú im reálne čísla* $x_1 = \frac{\pi}{6}$ *a* $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. *Určili sme ich aj pri grafoch.*

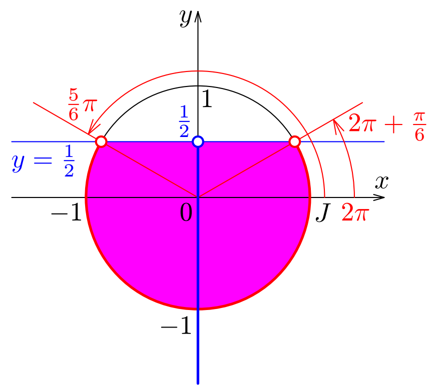


U: Zostáva vyriešiť problém, ako geometricky interpretovať zápis $\sin x > \frac{1}{2}$. Ale to je jednoduché. Hľadané body na jednotkovej kružnici majú mať ***y-ovú súradnicu väčšiu ako číslo*** $\frac{1}{2}$. Preto patria menšiemu kružnicovému oblúku, ktorého koncové body zodpovedajú riešeniu rovnice. Preto sa hodnoty premennej x nachádzajú medzi hodnotami prislúchajúcimi koncovým bodom kružnicového blúka. Základným riešením je uzavretý interval $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$.

Ž: *Ako vidím, v oboch metódach sú dôležité obrázky. Samotné riešenie stačí nájsť na intervale dĺžky periódy funkcie a potom zohľadniť periodičnosť.*

U: To, ako si pochopil problematiku riešenia goniometrických rovníc, overíme pri riešení druhej nerovnice: $\sin x < \frac{1}{2}$.

Ž: *To nebude náročné. Zmenili ste iba znak nerovnosti. Namiesto väčšie alebo rovné ste dali znak menší. Preto zoberiem zvyšok základného intervalu. Ale zostali dve časti. Otvorené intervaly* $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ *a* $\left(\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right)$.



U: Z toho dôvodu je vhodnejší taký ***zápis***, ktorý ***spojí*** tieto ***dve časti do celku***. Sleduj na jednotkovej kružnici. Začiatkom intervalu nech je číslo $\frac{5\pi}{6}$. Čísla od 0 do $\frac{\pi}{6}$ prevedieme na hodnoty väčšie o jednu periódu funkcie sínus. Koniec intervalu bude preto vyjadrený číslom $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$.

Ž: *Základným riešením nerovnice bude otvorený interval* $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right)$.

U: Konečné riešenie nerovnice zapíšeme v tvare zjednotenia nekonečného počtu intervalov. Získame ich zo základného riešenia pripočítaním násobkov periódy funkcie sínus k hraniciam základného intervalu.

$$\boxed{\mathcal{K} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{13\pi}{6} + 2k\pi\right)}$$

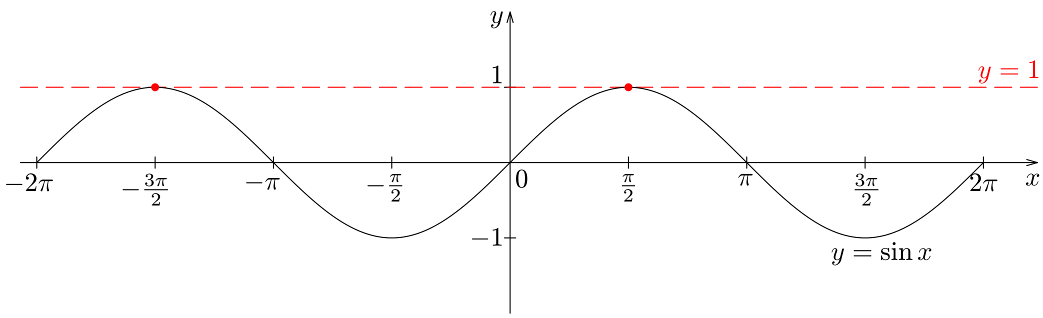
U: Dané dve úlohy sú ukážkou ***základných goniometrických nerovníc***. Vyriešili sme dve zo štyroch možných pre funkciu sínus a dané číslo a na pravej strane. Majú tvar $\sin x < a$; $\sin x \leqq a$; $\sin x > a$; $\sin x \geqq a$.

Ž: *Presvedčili ste ma, že riešenia nerovníc s opačnými znakmi nerovnosti nemusia až tak jednoducho súvisieť. Ešte mi prezraďte, či riešením týchto nerovníc je vždy neprázdna množina.*

U: Riešenie závisí od viacerých faktorov. V prvom rade od hodnoty parametra a. Napríklad nerovnica $\sin x \geqq -8$. Jej riešením bude ***množina všetkých reálnych čísel***, lebo funkcia sínus nadobúda iba hodnoty od -1 do 1 vrátane. To znamená, že pre všetky reálne čísla x platí nerovnosť $\sin x \geqq -8$.

Ž: *Začínam chápať súvislosti. Ak by som zmenil znak nerovnosti, riešením nerovnice $\sin x \leqq -8$ by bola prázdna množina.*

U: Áno. ***Riešenie závisí*** tak ***od hodnoty parametra*** a, ako aj ***znaku nerovnosti***. Aj malá zmena spôsobí veľké rozdiely vo výsledkoch. Porovnajme riešenia nerovníc $\sin x > 1$ a $\sin x \geqq 1$.



Ž: *Riešením nerovnice $\sin x > 1$ je* **prázdna množina**. *Oborom funkčných hodnôt funkcie sínus je uzavretý interval $\langle -1; 1\rangle$. Preto neexistuje reálne číslo x, pre ktoré by sínus bol väčší ako číslo 1.*

U: Naproti tomu, množina koreňov nerovnice $\sin x \geqq 1$ obsahuje nekonečne veľa čísel. Sú to všetky reálne čísla, pre ktoré je hodnota sínus rovná číslu 1. Také čísla sa dajú vyjadriť v tvare $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$***, kde k je celé číslo***. Táto nerovnica ukazuje, že jej riešením nemusí byť zjednotenie intervalov.

Aby sme vystriedali všetky prípady, vyriešme ešte nerovnice $\sin x < 1$ a $\sin x \leqq 1$. Ako sa teraz zmení výsledok?

Ž: *Zaujímavá úloha. Čo všetko sa dá v jednom zápise zmeniť. Začnem tou poslednou nerovnicou $\sin x \leqq 1$. Toto platí vždy. Jej riešením teda bude* **množina všetkých reálnych čísel**.

U: Nerovnica $\sin x < 1$ sa líši od tebou vyriešenej nerovnice iba vo vynechaní rovnosti. Teda jej riešením budú všetky reálne čísla, okrem čísel v tvare $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde k je celé číslo. To z toho dôvodu, že vtedy je hodnota funkcie sínus rovná číslu 1.

$$\sin x > 1;\ \ \mathcal{K} = \emptyset,$$

$$\sin x \geqq 1;\ \ \mathcal{K} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\sin x < 1;\ \ \mathcal{K} = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\sin x \leqq 1;\ \ \mathcal{K} = \mathbb{R}.$$

U: Analýza riešenia goniometrických nerovníc, ktoré obsahujú inú goniometrickú funkciu ako sínus, je podobná tomu, čo sme v tejto téme urobili. So samotnými nerovnicami sa stretneš aj pri iných úlohách. Pri zostrojovaní grafov funkcií, určovaní definičných oboroch funkcií, úprave výrazov a podobne.

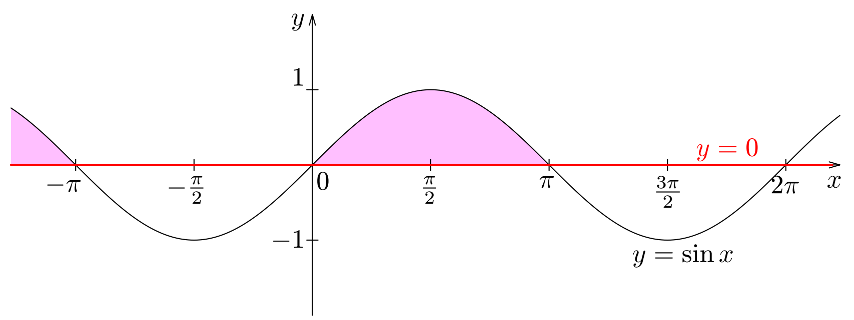
Príklad 1: *Vyriešte v uzavretom intervale* $\langle 0; 2\pi\rangle$ *nerovnicu:*

a) $\sin x > 0$,

b) $\cos x \leqq \dfrac{1}{2}$.

U: Použijeme ***grafickú metódu***. Ľavá strana nerovnice určuje hodnoty funkcie $f: y = \sin x$ a pravá strana konštantnú funkciu $g: y = 0$. Dúfam, že nemáš problém s tým, ako vyzerajú grafy týchto funkcií.

Ž: *Sínusoida je grafom pre funkciu sínus a x-ová os pre funkciu* $y = 0$.



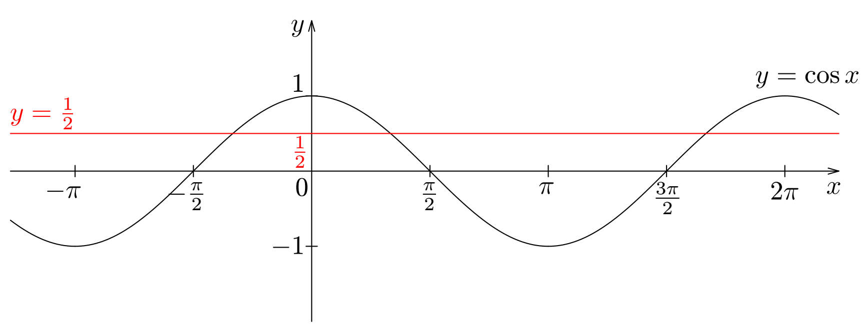
U: Zápis nerovnice znamená, že pre hľadané reálne čísla x má byť ***graf funkcie sínus nad*** x***-ovou osou***. Hodnoty funkcie sínus majú byť väčšie ako nula. Urči, ktorý interval tomu vyhovuje.

Ž: *Riešením sú všetky reálne čísla z otvoreného intervalu* $(0; \pi)$.

U: Tou istou metódou vyriešme nerovnicu $\cos x \leqq \dfrac{1}{2}$. Grafy ktorých funkcií budeme teraz zobrazovať?

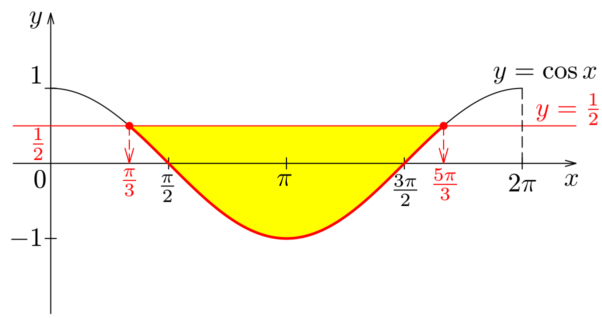
Ž: *Znázorníme graf funkcie kosínus a konštantnej funkcie, ktorá má predpis* $y = \dfrac{1}{2}$.

U: Aj teraz bude v obrázku priamka. Bude rovnobežná s x-ovou osou. y-ovú os pretne v bode $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$. Určiť z grafu reálne čísla x vyhovujúce nerovnici, by si mal už vedieť sám.



Ž: *V zápise nerovnice sa hovorí, že hodnoty funkcie kosínus majú byť menšie, alebo rovnaké ako číslo* $\frac{1}{2}$. *Zoberiem tú časť, kde sa kosínusoida nachádza* **pod priamkou**. *Je ohraničená priesečníkmi týchto grafov. Funkcia kosínus nadobúda hodnotu* $\frac{1}{2}$ *pre* x *rovné číslu* $\frac{\pi}{3}$. *S určením druhej hodnoty potrebujem poradiť.*

U: Okrem I. kvadrantu nadobúda funkcia kosínus kladné hodnoty aj vo IV. kvadrante. Graf funkcie kosínus je symetrický na intervale $\langle 0; 2\pi\rangle$ podľa priamky rovnobežnej s y-ovou osou. Priamka pretína x-ovú os v bode $x = \pi$. Preto druhú hodnotu dostaneme odčítaním čísla $\frac{\pi}{3}$ od čísla 2π.



$$\boxed{2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}}$$

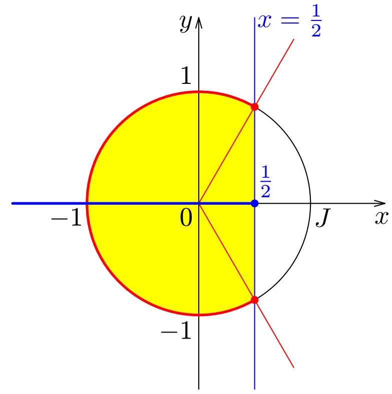
Ž: *Teraz je to už ľahké. Riešením nerovnice na intervale* $\langle 0;\ 2\pi)$ *bude uzavretý interval* $\left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\rangle$. *Pre takéto* x *sa graf funkcie kosínus nachádza pod grafom konštantnej funkcie* $y = \frac{1}{2}$.

U: Ukážeme si aj druhú metódu riešenia. Je založená na definícií funkcie kosínus. Využijeme pri nej aj jednotkovú kružnicu.

Ž: *Myslíte body jednotkovej kružnice, ktorých* **x-ová súradnica** *predstavuje* **hodnoty funkcie kosínus***?*

U: Áno. Body jednotkovej kružnici odpovedajú reálnym číslam x. Najdôležitejšie pre riešenie je preformulovať si zadanie nerovnice $\cos x \leqq \frac{1}{2}$ do geometrickej interpretácie na jednotkovej kružnici. Rovnosť by si mal vedieť vysvetliť.

Ž: *Treba nájsť body jednotkovej kružnice, ktorých* x*-ová súradnica je rovná číslu* $\frac{1}{2}$. *Také body sú dva, v I. a vo IV. kvadrante.*



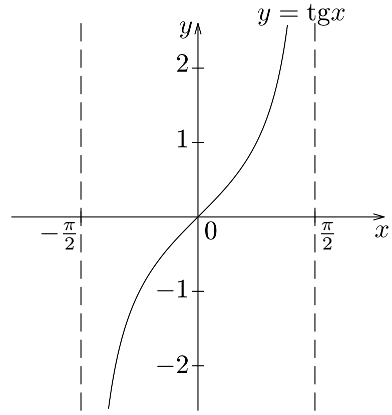
U: Tieto body zodpovedajú hodnotám $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{5\pi}{3}$ argumentu x. Tu je jasnejší výpočet druhej hodnoty cez číslo 2π. ***Nerovnosť*** znamená nájsť ***body na jednotkovej kružnici***, ktorých ***x-ová súradnica je menšia ako číslo*** $\frac{1}{2}$. To znamená, že x-ové súradnice môžu byť v rozpätí od -1 do $\frac{1}{2}$. Ako vidíš na obrázku zodpovedajú tomu všetky hodnoty argumentu x, ktoré sú medzi už určenými číslami. Záver riešenia je ten istý ako pri prvej metóde.

$$\boxed{\mathcal{K} = \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\rangle}$$

Príklad 2: *Vyriešte v množine reálnych čísel nerovnicu:* $\mathrm{tg}x \geqq -1$.

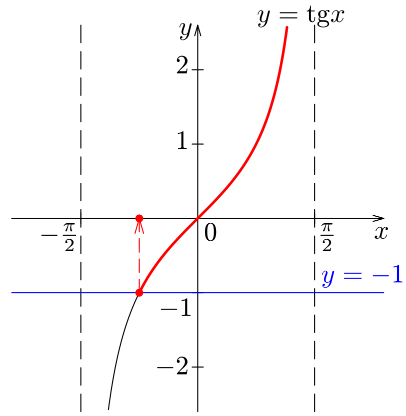
U: Načrtni graf funkcie tangens na otvorenom intervale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ž: *Grafom je časť tangentoidy. Na x-ovej osi tangentoidu vymedzujú dve asymptoty. Sú to priamky rovnobežné s y-ovou osou a prechádzajú koncovými bodmi intervalu.*



U: S výrazom $\mathrm{tg}x$ na ľavej strane nerovnice súvisí jedna funkcia, ktorej graf už máme. Pravou stranou nerovnice je určená druhá funkcia, ktorej graf treba načrtnúť do toho istého obrázka. Nerovnica je porovnaním hodnôt týchto dvoch funkcií. Hodnoty výrazu na pravej strane v našom prípade nezávisia od hodnôt argumentu x. Stále sú rovné číslu -1. O akú funkciu ide?

Ž: *Pravá strana je konštanta. Grafom je* **priamka rovnobežná s x-ovou osou**. *Priamka pretína y-ovú os v bode -1.*



U: Podľa zadanej nerovnice hodnoty funkcie tangens majú byť väčšie alebo rovnaké ako hodnoty konštantnej funkcie. Pre reálne čísla x zodpovedajúce tejto situácii sa ***graf funkcie tangens*** má nachádzať ***nad grafom konštantnej funkcie***, alebo ho pretínať. Aká je x-ová súradnica priesečníka grafov týchto dvoch funkcií?

Ž: *Funkcia tangens nadobúda hodnotu jedna pre x rovné reálnemu číslu $\frac{\pi}{4}$. Opačnú hodnotu má pre x rovné číslu $-\frac{\pi}{4}$.*

U: Aby boli hodnoty funkcie tangens väčšie ako číslo -1, musí byť argument x ***väčší ako číslo*** $-\frac{\pi}{4}$. Vtedy časť tangentoidy je nad priamkou. Máš možnosť vidieť to na obrázku.

Ž: *Riešením bude teda interval* $\left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right)$.

U: Bude to základné riešenie. Podobných intervalov však bude nekonečne veľa, lebo funkcia tangens je periodická s najmenšou periódou π. Všeobecne ich zapíšeš tak, že k ľavému hraničnému bodu $-\frac{\pi}{4}$ základného intervalu pripočítaš celočíselné násobky čísla π. To isté urobíš pre pravý hraničný bod $\frac{\pi}{2}$. Výsledok bude zjednotením takto vytvorených intervalov pre všetky celočíselné hodnoty parametra k, ktorý použiješ.

$$\boxed{\mathcal{K} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)}$$

Úloha : *Vyriešte v množine reálnych čísel nerovnicu:* $\frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{cotg} x < \sqrt{3}$.

Výsledok: $\mathcal{K} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \right)$

Príklad 3: *Vyriešte v množine reálnych čísel nerovnicu:* $\sin x \cos x > 0$.

Ž: *Nevyzerá to dobre. Dve rôzne funkcie v súčine na ľavej strane nerovnice.*

U: Lenže nerovnica hovorí, že ***súčin funkcií*** má byť ***kladné číslo***. To celé riešenie zjednoduší, hoci na prvý pohľad je zadanie tejto úlohy komplikované. Aké môžu byť dve čísla, ak ich vynásobením máme dostať kladné číslo?

Ž: *Obe čísla musia byť buď* **súčasne kladné** *alebo* **súčasne záporné**.

U: Aplikuj túto vedomosť na zadanú nerovnicu $\sin x \cos x > 0$.

Ž: *V našom prípade buď sínus aj kosínus sú súčasne kladné alebo súčasne záporné.*

U: Možno sa pamätáš na symbolický zápis tebou vyslovenej vlastnosti, ktorú si aplikoval na zadanú nerovnicu.

$$\boxed{\sin x \cos x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sin x > 0 \ \wedge \ \cos x > 0) \ \vee \ (\sin x < 0 \ \wedge \ \cos x < 0)}$$

Ž: *Potrebujem to trochu pripomenúť. Čo znamenajú tie symboly?*

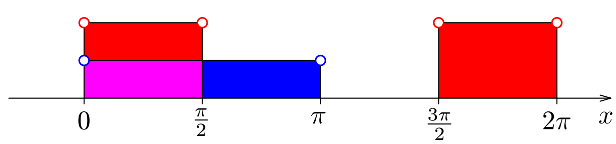
U: Nahradil som tvoje slovné spojky symbolmi. Symbol podobný písmenu v označuje spojku alebo. Ak ho prevrátime, dostaneme symbol pre spojku a. Prvý symbol nahrádza slovné spojenie ***práve vtedy, keď***. Vyjadrili sme ním, že kladnosť sa dá dosiahnuť iba v týchto dvoch prípadoch. Inokedy nie. V prvom prípade majú byť hodnoty funkcií sínus a kosínus súčasne kladné. Urči riešenie pre tento prípad na intervale $\langle 0; 2\pi)$.

Ž: *Funkcia sínus je kladná na otvorenom intervale* $(0; \pi)$. *Pre funkciu kosínus dostaneme dva intervaly. Je kladná na intervale* $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, *alebo na intervale* $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

U: Logická spojka ***alebo***, ktorú si použil, zodpovedá zjednoteniu týchto intervalov. Symbolický zápis si môžeš pozrieť v rámčeku.

$$\boxed{\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \bigcup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)}$$

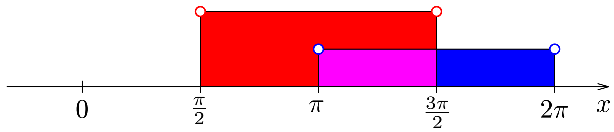
U: Dostal si dve čiastkové riešenia. Pre nerovnicu $\sin x > 0$ množinu koreňov $\mathcal{K}_1 = (0; \pi)$. Pre nerovnicu $\cos x > 0$ množinu koreňov $\mathcal{K}_2 = \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. V tomto prípade obe nerovnice majú platiť súčasne. Výsledná množina koreňov $\mathcal{K}'$ preto bude ***prienikom*** oboch týchto množín $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$.



$$\boxed{\mathcal{K}' = \mathcal{K}_1 \bigcap \mathcal{K}_2 = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)}$$

U: Vyrieš podobným spôsobom druhý prípad. Obe funkcie teraz majú mať záporné hodnoty.

Ž: *Funkcia sínus nadobúda záporné hodnoty na intervale* $(\pi; 2\pi)$. *Pre funkciu kosínus je to interval* $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. *Ich prienikom je interval* $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. *Prienik preto, lebo obe nerovnice majú platiť súčasne.*



$$\boxed{\mathcal{K}'' = \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)}$$

U: Celkové riešenie nerovnice dostaneme zjednotením čiarkovaných množín. Zatiaľ sme ho určili iba na základnom intervale $\langle 0; 2\pi)$. Obe funkcie sú však ***periodické*** s najmenšou periódou rovnajúcou sa číslu 2π. Výsledkom teda bude ***zjednotenie nekonečného počtu*** takýchto ***intervalov***. Ich hraničné body získame ako súčet hraničných bodov základného riešenia a celočíselných násobkov periódy. Sleduj v rámčeku.

$$\mathcal{K}''' = \mathcal{K}' \bigcup \mathcal{K}'' = \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \bigcup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\mathcal{K} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\left(0 + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \bigcup \left(\pi + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\right].$$

Príklad 4: *Vyriešte na uzavretom intervale* $\langle 0; 2\pi\rangle$ *nerovnicu:* $\mathrm{tg}x \geqq \sin x$.

U: Upravme nerovnicu na ***anulovaný tvar***. To znamená, že na jednej strane nerovnice bude nula.

Ž: *Odčítam od oboch strán nerovnice výraz* $\sin x$*:*

$$\mathrm{tg}x - \sin x \geqq 0.$$

U: Všetky ďalšie úpravy budeme robiť tak, aby sme výraz na ľavej strane upravili na ***súčin dvoch výrazov***. Čím by si začal?

Ž: *Tangens by som napísal ako podiel funkcií sínus a kosínus:*

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x \geqq 0.$$

U: Ľavú stranu upravíme na jeden zlomok. Spoločným menovateľom je výraz $\cos x$, preto výraz $\sin x$ rozšírime:

$$\frac{\sin x - \sin x \cos x}{\cos x} \geqq 0.$$

Akú ďalšiu úpravu by si urobil?

Ž: *V čitateli zlomku sa dá* **vybrať pred zátvorku** *výraz* $\sin x$*:*

$$\frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x} \geqq 0.$$

Netuším ako postupovať ďalej.

U: Pozri sa ešte raz na tvar poslednej nerovnice. V zlomku je súčin dvoch výrazov delený tretím výrazom. Výsledkom všetkých operácií má byť nezáporné číslo. Teda kladné alebo rovné nule. Nedá sa zistiť, kedy to nastane?

Ž: *To bude dosť komplikované. Čitateľ aj menovateľ musia byť naraz kladné čísla, alebo oba súčasne záporné. Toto určite sám nezvládnem. Veď ešte aj čitateľ je súčin dvoch výrazov.*

U: Čitateľ by v oboch prípadoch mohol byť aj nula. Vidím však, že analýza riešenia pre tri výrazy ťa odrádza od ďalšieho uvažovania. Poteším ťa. Výraz na ľavej strane sa dá zjednodušiť. Podiel dvoch funkcií v zápise $\frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x} \geqq 0$ sa dá nahradiť jedným výrazom.

Ž: *Máte pravdu. Už sme to raz v riešení použili. Podiel funkcií sínus a kosínus predstavuje hodnoty funkcie tangens. Teraz to vyzerá oveľa lepšie. V poslednej nerovnici už nie je zlomok.*

$$\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{\cos x} \geqq 0,$$
$$\mathrm{tg}x\,(1-\cos x) \geqq 0.$$

U: Ľavá strana je navyše súčinom iba dvoch výrazov. Dúfam, že teraz už prekonáš svoju nechuť k riešeniu. Vedel si, kedy je podiel dvoch výrazov nezáporné číslo. Pre súčin je to o trochu jednoduchšie.

Ž: *Máte pravdu. Buď sú* **výrazy $\mathrm{tg}x$ a $1-\cos x$ súčasne nezáporné alebo súčasne nekladné**.

$$\mathrm{tg}x\,(1-\cos x) \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{tg}x \geqq 0 \wedge 1-\cos x \geqq 0) \vee \vee\ (\mathrm{tg}x \leqq 0 \wedge 1-\cos x \leqq 0).$$

U: Rámček vyjadruje tvoju slovnú argumentáciu použitím symbolov. Máme teda vyriešiť dva prípady a v každom dve nerovnice. Prvá nerovnica $\mathrm{tg}x \geqq 0$ nepatrí medzi obtiažne. Pre ktoré reálne čísla x nadobúda funkcia tangens nezáporné hodnoty?

Ž: *Toto si pamätám, lebo sa to vyskytuje veľmi často. V I. kvadrante. Teda* $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right)$.

U: Funkcia tangens je periodická s najmenšou periódou π. Z tohto dôvodu nerovnici $\mathrm{tg}x \geqq \geqq 0$ vyhovuje zjednotenie nekonečného počtu intervalov. Budú vyjadrené pomocou hraníc základného intervalu, ku ktorým pripočítame celočíselné násobky čísla π:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle 0+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right).$$

U: Ani riešenie druhej nerovnice $1-\cos x \geqq 0$ nie je náročné. Stačí ju upraviť na tvar $1 \geqq \cos x$.

Ž: *To by malo platiť vždy!*

U: Prečo?

Ž: *Vyplýva to z oboru funkčných hodnôt pre funkciu kosínus. Kosínus má pre každé reálne číslo x hodnoty menšie, alebo rovné číslu 1.*

U: Dobre. Riešením nerovnice $1-\cos x \geqq 0$ sú preto ***všetky reálne čísla***. Obe nerovnice majú platiť súčasne. Riešením druhej nerovnice sú všetky reálne čísla a prvej nerovnici vyhovujú čísla zo zjednotenia intervalov v tvare $\left\langle 0+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$. Výsledok je určený prienikom. V tomto prípade je to spomenuté zjednotenie intervalov.

$$\mathcal{K}' = \mathbb{R} \cap \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle 0+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle 0+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$$

U: Vyriešiť druhý prípad

$$\mathrm{tg} x \leqq 0 \quad \wedge \quad 1 - \cos x \leqq 0$$

by pre teba nemal byť problém.

Začni poslednou nerovnicou.

Ž: *Upravím ju na tvar* $1 \leqq \cos x$. *Hodnoty kosínus nemôžu byť väčšie ako číslo* 1.

U: Ale hodnoty funkcie kosínus môžu byť rovné číslu 1. Nerovnica vtedy bude pravdivým výrokom. Pre aké x to nastane?

Ž: *Kosínus nadobúda hodnotu* 1 *pre celočíselné násobky čísla* 2π.

U: V porovnaní s prvým prípadom sme nedostali nič nové. Prípad kedy kosínus je rovný číslu 1 je zahrnutý aj v nerovnici $1 \geqq \cos x$. Vyriešili sme ju v prvom prípade. Čísla v tvare $2k\pi$ sú zarátané do množiny $\mathcal{K}'$. Teda nie je nutné v riešení druhého prípadu pokračovať. Nedostaneme nič nové. Celkovým riešením je množina, ktorá je uvedená v rámčeku.

$$\boxed{\mathcal{K} = \mathcal{K}' = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle 0 + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi \right)}$$

Príklad 5: *Vyriešte v množine reálnych čísel nerovnicu:* $|\cos x| < 1$.

U: Riešenie bude závisieť od toho, aké hodnoty nadobúda výraz $\cos x$ v absolútnej hodnote. Podľa definície absolútnej hodnoty reálneho čísla treba rozlíšiť dva prípady.

Ž: *Mohli by ste to pripomenúť?*

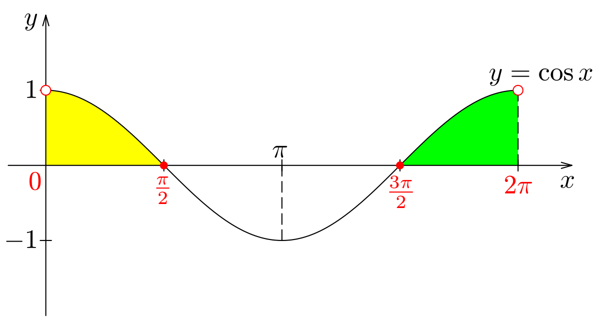
U: Ak výraz $\cos x$ v absolútnej hodnote nadobúda ***nezáporné hodnoty***, tak absolútnu hodnotu možno nahradiť tým istým výrazom. Absolútna hodnota nezáporného čísla je to isté číslo, napríklad $|2| = 2$. V našom prípade: ***ak*** $\cos x \geqq 0$***, tak*** $|\cos x| = \cos x$.

Ž: *Aha! Vtedy bude mať zadaná nerovnica tvar* $\cos x < 1$.

U: Správne! Uvedom si však, že nerovnicu $\cos x < 1$ máme vyriešiť za podmienky $\cos x \geqq 0$. Preto ďalej riešime sústavu dvoch nerovníc. Ako súvisí riešenie tejto sústavy s množinami koreňov jednotlivých nerovníc?

Ž: *Keďže je to sústava, obe nerovnice musia platiť súčasne. Výsledné riešenie nájdeme ako prienik množín koreňov jednotlivých nerovníc.*

U: Ukážeme si, že v našom prípade sa výsledné riešenie sústavy nerovníc dá určiť rýchlejšie. Sleduj graf funkcie kosínus na intervale $\langle 0; 2\pi\rangle$. Nerovnice $\cos x < 1$ a $\cos x \geqq 0$ vyčleňujú z neho tú časť, ktorá sa nachádza nad alebo na x-ovej osi. To preto, lebo podľa druhej nerovnice majú byť hodnoty funkcie kosínus nezáporné. Prvá nerovnica navyše hovorí, že tejto časti grafu nepatria body, v ktorých má funkcia kosínus hodnotu 1.



U: Výsledným riešením v prvom prípade budú všetky reálne čísla x, pre ktoré ***graf funkcie nie je pod x-ovou osou a graf nenadobúda maximum***. Určiť ich, by pre teba nemal byť problém.

Ž: *Sú to dva intervaly, a to interval* $\left(0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ *a* $\left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Ž: *Ako sa vyrieši nerovnica, keď kosínus bude záporný?*

U: To je druhý prípad. Podľa definície absolútnej hodnoty, ak reálne číslo je záporné, tak jeho absolútna hodnota je rovná číslu, ktoré je k nemu opačné. Napríklad $|-3| = -(-3)$.

V našom prípade, ***ak*** $\cos x < 0$***, tak*** $|\cos x| = -\cos x$. Stačí dosadiť do zadania a vyriešiť.

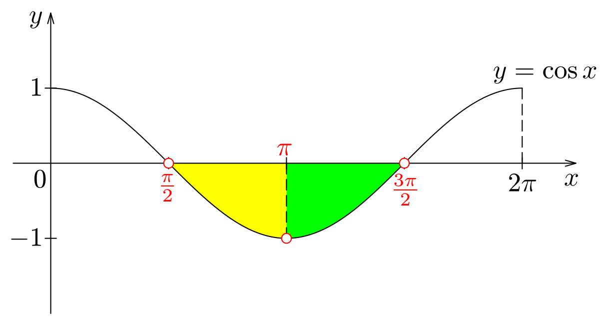
Ž: *Po dosadení do pôvodnej nerovnice* $|\cos x| < 1$ *dostaneme nerovnicu* $-\cos x < 1$. *Ak vynásobíme výrazy na oboch stranách nerovnice číslom* -1*, bude mať nerovnica tvar:*

$$\cos x > -1.$$

U: Aj v druhom prípade vyriešime sústavu dvoch nerovníc: $\cos x < 0$ a $\cos x > -1$. Situácia v interpretácií nerovníc na grafe je analogická prvému prípadu.

Ž: *Teraz nás zaujíma časť grafu funkcie kosínus, ktorá je pod x-ovou osou, lebo podľa prvej nerovnice majú byť hodnoty tejto funkcie záporné.*

U: Keďže oborom funkčných hodnôt funkcie kosínus je uzavretý interval $\langle -1; 1\rangle$, druhá nerovnica platí vždy, okrem tých reálnych čísel x, pre ktoré je kosínus rovný číslu -1. Na grafe nezoberieme bod, ktorý zodpovedá minimu funkcie.



Ž: *Riešením budú opäť dva intervaly:* $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ *a interval* $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

U: Zjednotením riešení získaných v oboch prípadoch dostaneme výsledné základné riešenie. Pre celkové riešenie úlohy na množine reálnych čísel zohľadníme periodickosť funkcie kosínus s najmenšou periódou 2π. Sleduj najskôr situáciu na číselnej osi. Štyri intervaly, ktoré sme dostali ako riešenia v analyzovaných dvoch prípadoch vytvárajú skoro jeden súvislý celok. Je to interval $\langle 0;\ 2\pi)$, v ktorom treba vylúčiť dve čísla: 0 a π. Vieš prečo?

Ž: *Pre tieto hodnoty má funkcia spomínamé maximum alebo minimum. Ale, keď je periodická, bude sa táto situácia opakovať na každom ďalšom vhodnom intervale dĺžky 2π.*

U: Ako jednoduchšie by sa daný výsledok dal zapísať?

Ž: *Výsledkom budú všetky reálne čísla, okrem tých hodnôt, pre ktoré má funkcia kosínus hodnoty 1 alebo -1. V základnom intervale sú to čísla 0 a π. Všeobecne ich zapíšeme v tvare $k\pi$, kde k je celé číslo.*

$$\boxed{\mathcal{K} = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}}$$

U: Ak si uvedomíš podstatu zadania, nemusíš mať riešenie úlohy takéto zdĺhavé. Na zadanie však potrebuješ aplikovať vedomosti o vlastnostiach funkcie kosínus. Vieme, že hodnoty funkcie kosínus sú v rozpätí od -1 do 1 vrátane. Zadaná nerovnica $|\cos x| < 1$ hovorí, že absolútna hodnota funkčných hodnôt kosínus nemôže byť väčšia alebo rovná číslu 1. Vtedy by absolútna hodnota nebola menšia ako číslo 1. Preto kosínus nemôže byť rovný číslam 1 a -1. Ale to už je výsledok, ku ktorému sme došli aj v našom riešení.

Príklad 6: *Určte definičný obor funkcie:*

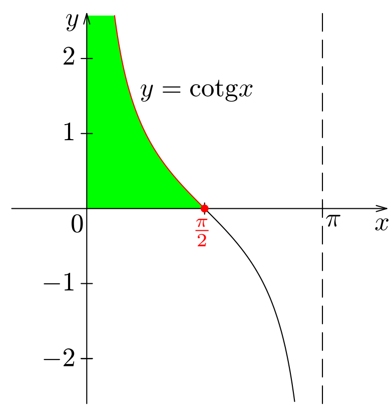
a) $f: y = \sqrt{\mathrm{cotg} x}$,

b) $g: y = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$.

U: Akou podmienkou je dané určenie definičného oboru funkcie f?

Ž: *V predpise funkcie na pravej strane je výraz obsahujúci druhú odmocninu.* **Pod odmocninou nesmie byť záporné číslo**.

U: V našom prípade budeme teda riešiť nerovnicu $\mathrm{cotg} x \geqq 0$. Tá porovnáva hodnoty funkcie kotangens s nulou. Preto je výhodné načrtnúť si graf funkcie kotangens.



U: Ako na grafe interpretovať nerovnicu? Hodnoty funkcie kotangens majú byť väčšie alebo rovné nule.

Ž: *y-ová súradnica predstavuje hodnoty funkcie. Teda* **graf funkcie kotangens má byť nad x-ovou osou, alebo ju pretína**. *Vtedy je hodnota funkcie rovná nule.*

U: Je dobré, ak si v takýchto úlohách budeš všímať graf iba na základnom intervale. Pre funkciu kotangens je to otvorený interval $(0;\pi)$. Na tomto intervale sa graf nachádza nad x-ovou osou, respektíve ju pretína, pre x z intervalu $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$.

Ž: *Ako zohľadníte periodickosť funkcie kotangens? Veď riešením je nekonečne veľa intervalov.*

U: Každý z ďalších intervalov získame posunutím základného riešenia v smere x-ovej osi o celočíselné násobky čísla π.

Ž: *To je najmenšia perióda funkcie kotangens.*

U: Áno. Celkový výsledok zapíšeme v tvare zjednotenia nekonečného počtu intervalov. Ich hranice vyjadríme v tvare súčtu čísel, ktoré vyjadrujú hranice základného intervalu $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$ a celočíselných násobkov čísla π. Vyjadruje to posun o spomínané násobky periódy.

$$\boxed{\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(0 + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right\rangle}$$

U: Riešenie úlohy b) bude analogické. Akou podmienkou je určený definičný obor funkcie $g : y = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$?

Ž: *Výraz* $\dfrac{1-\cos x}{2}$*, ktorý je pod druhou odmocninou, musí nadobúdať nezáporné hodnoty, t. j.*

$$\frac{1-\cos x}{2} \geqq 0.$$

U: Na rozdiel od úlohy a) je dobré nerovnicu upraviť.

Ž: *Vynásobím obe strany nerovnice číslom* 2 *a dostanem*

$$1 - \cos x \geqq 0.$$

Ak pripočítam k obom stranám nerovnice výraz $\cos x$*, mám nerovnicu*

$$1 \geqq \cos x.$$

U: Riešenie poslednej nerovnice je pomerne jednoduché. Potrebuješ však uplatniť vedomosť o jednej vlastnosti, ktorú má funkcia kosínus.

Ž: *Máte na mysli obor funkčných hodnôt?*

U: Vieš zdôvodniť prečo?

Ž: *Zápis* $1 \geqq \cos x$ *vyjadruje, že hodnoty funkcie kosínus majú byť menšie alebo rovné číslu* 1*. Funkcia kosínus však nadobúda hodnoty v rozpätí čísel od* 1 *do* -1 *vrátane. Preto riešením nerovnice je každé reálne číslo.*

U: Vidíš. Riešenie tejto úlohy bolo nakoniec jednoduchšie ako v prvom prípade.
Definičným oborom funkcie g je množina všetkých reálnych čísel

$$\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}.$$

Príklad 7: *Vyriešte v množine reálnych čísel nerovnicu:* $\cos 2x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

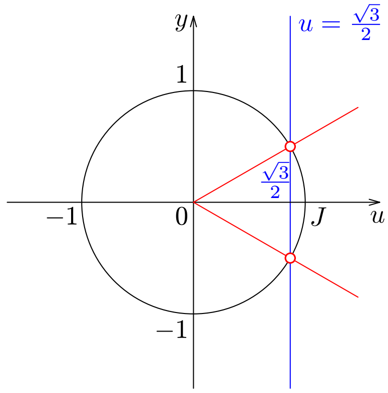
U: Zavedieme substitúciu. Výraz $2x$, ktorý je argumentom funkcie kosínus, nahradíme novou neznámou

$$u = 2x.$$

Dostaneme nerovnicu

$$\cos u > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

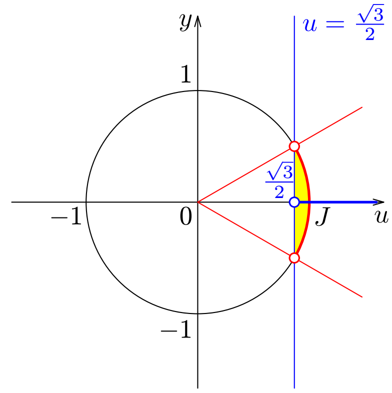
Ž: *Pokúsim sa vyriešiť túto nerovnicu využitím jednotkovej kružnice. Viem, že kosínus predstavuje x-ovú súradnicu bodov, ktoré sú priradené reálnym číslam u. Rovnici* $\cos u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *vyhovujú dve riešenia v základnom intervale. Odpovedajú bodom jednotkovej kružnice v I. a vo IV. kvadrante.*



Ž: *Kosínus nadobúda hodnotu* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *pre u rovné číslu* $\dfrac{\pi}{6}$. *I. a IV. kvadrant sú symetrické podľa x-ovej osi. Preto základné riešenie zodpovedajúce bodu vo IV. kvadrante bude rovné rozdielu čísla 2π a určenej hodnoty pre I. kvadrant, teda*

$$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

U: Rovnicu si vyriešil správne. Teraz je nutný prechod k nerovnici. Hodnoty funkcie kosínus majú byť väčšie ako číslo $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. To znamená, že hľadané body na jednotkovej kružnici majú x-ovú súradnicu väčšiu ako $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ktorá časť kružnice tomu vyhovuje?



Ž: *Sú to body na* **menšom kružnicovom oblúku** *ohraničenom bodmi, pre ktoré platila rovnica.*

U: V nerovnici je ostrá nerovnosť. Preto riešením bude otvorený interval. Koncové body kružnicového oblúka nerovnici nevyhovujú.

Ž: *Mám problém tento interval zapísať pomocou čísel* $\frac{\pi}{6}$ *a* $\frac{11\pi}{6}$.

U: Máš pravdu. Aby to bol jeden interval, je nutné hodnotu $\frac{11\pi}{6}$ nahradiť iným reálnym číslom. Bude zodpovedať tomu istému bodu vo IV. kvadrante. Zoberieme číslo $-\frac{\pi}{6}$. To isté ako v I. kvadrante, ale v zápornom smere.

Ž: *Jasné! Riešením pre neznámu u bude otvorený interval* $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$.

U: Je to základné riešenie. Prečo sme ho určovali iba na intervale dĺžky 2π?

Ž: *Pretože funkcia kosínus je periodická s najmenšou periódou 2π. Intervaly sa budú opakovať. Ako to zapíšeme?*

U: Začiatok každého ďalšieho intervalu, ktorý je riešením nerovnice $\cos u < \frac{\sqrt{3}}{2}$, dostaneme pripočítaním celočíselných násobkov čísla 2π k začiatku $-\frac{\pi}{6}$ základného intervalu. Koniec intervalu zapíšeme analogicky. Celkovým riešením pre neznámu u je ***zjednotenie*** takto vytvorených intervalov:

$$u \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right).$$

U: Symbol $\bigcup$ označuje spomínané zjednotenie. Zápis $k \in \mathbb{Z}$ vyjadruje, že parameter k nadobudne všetky hodnoty z množiny celých čísel. V zjednotení je nekonečný počet intervalov.

Ž: *Máme už množinu koreňov zadanej nerovnice?*

U: Zatiaľ sme určili iba hodnoty neznámej u. Určiť riešenie pre neznámu x už nie je problém, lebo $u = 2x$. Neznáma x ***bude nadobúdať polovičné hodnoty*** zodpovedajúce substitučnej neznámej u:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{12} + k\pi;\ \frac{\pi}{12} + k\pi\right).$$

Ž: *Prečo ste zmenili aj periódu z 2π na číslo π?*

U: Funkcia $y = \cos u$ má najmenšiu periódu číslo 2π, ale ***funkcia*** $y = \cos 2x$ ***má dvakrát menšiu periódu***. Veď to vyplýva aj z našej substitúcie $u = 2x$. Teda $x = \frac{u}{2}$.

Ak $u = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, tak x je polovicou výrazu na pravej strane:

$$x = \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi.$$