Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku

RNDr. Marián Macko

U: Pojem goniometrické funkcie v preklade z gréčtiny znamená funkcie merajúce uhly. Dajú sa použiť v pravouhlom trojuholníku, v ktorom sú zadané dve jeho strany.

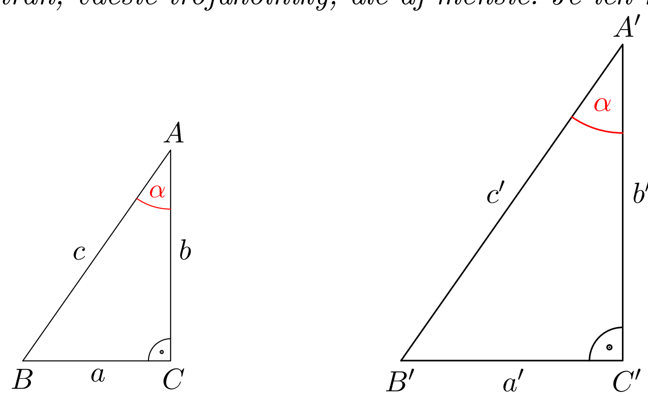
Ž: **Pravouhlý trojuholník** *znamená, že jeden jeho* **uhol je pravý***?*

U: Áno, veľkosť jedného z vnútorných uhlov je 90 stupňov. Akú veľkosť majú zvyšné dva uhly?

Ž: *Keďže súčet uhlov v trojuholníku je* 180 *stupňov a jeden uhol má* 90 *stupňov, zvyšné uhly majú dokopy tiež* 90 *stupňov.*

U: Z toho vyplýva, že každý z týchto uhlov musí byť ***menší ako*** 90 ***stupňov***, a takéto uhly nazývame ***ostré uhly***. Označme veľkosť jedného z nich α, teda $\alpha \in (0°;\ 90°)$, napríklad $35°$.
Koľko pravouhlých trojuholníkov, ktorých jeden vnútorný uhol má veľkosť 35 stupňov, existuje?

Ž: *Závisí to od dĺžok strán, väčšie trojuholníky, ale aj menšie. Je ich nekonečne veľa?*



U: Máš pravdu. Vyplýva to z ***vety (uu) o podobnosti trojuholníkov***.

Ž: *Čo to znamená veta (uu)?*

U: Porovnanie veľkostí uhlov. Ak zistíš veľkostí uhlov v jednom trojuholníku, v druhom ti stačí overiť pre dva uhly, či ich veľkosti zodpovedajú veľkostiam uhlov v prvom trojuholníku. Ak to platí, tak tieto trojuholníky sú podobné.

Ž: *Naše trojuholníky sa zhodujú v pravom uhle a uhle α, teda sú podobné.*

U: Z podobnosti trojuholníkov vyplýva určitá vlastnosť pre dĺžky zodpovedajúcich si strán.

Ž: *Spomínam si. Pomer a' ku a je taký istý ako b' ku b, a tiež c' ku c.*

U: Tento pomer vyjadruje určité číslo, ktoré nazývame ***koeficient podobnosti***. Zapísané:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

Ak k je jedna polovica, tak dĺžky strán a', b', c' sú polovicou dĺžok a, b, c.

Ž: *Čiarkovaný trojuholník je dvakrát menší. Ak by bolo $k = 3$, čiarkovaný trojuholník by bol trikrát väčší. Pochopil som to správne?*

U: Super! Podobnosť trojuholníkov môžeme zapísať aj tak, že dáme do pomeru dĺžky dvoch konkrétnych strán daného pravouhlého trojuholníka. Stačí upraviť rovnosť napr. medzi prvým a tretím zlomkom:

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c},$$

vynásobíme a:

$$a' = \frac{ac'}{c},$$

vydelíme c':

$$\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}.$$

Ž: *A tento pomer je tiež koeficient podobnosti?*

U: Nie. Tento ***pomer dĺžok konkrétnych dvoch strán*** daného pravouhlého trojuholníka je číslo, ktoré ***závisí iba od veľkosti uhla*** α a je pre ktorýkoľvek z našich podobných pravouhlých trojuholníkov rovnaké.

Ž: *Čiže nezáleží na tom, či tam dosadím dvakrát kratšie alebo trikrát dlhšie strany.*

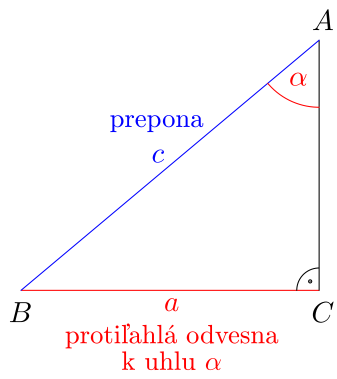
U: Máš pravdu. To ***číslo charakterizuje*** iba ***veľkosť ostrého uhla*** α. Teda ostrému uhlu α sme priradili jediné číslo, ktoré sa rovná pomeru dĺžok konkrétnych dvoch strán pravouhlého trojuholníka.

Ž: *Čo ak bude trojuholník označený ináč?*

U: Z toho dôvodu v tom urobíme poriadok. Pomenovať strany v pravouhlom trojuholníku by nemal byť problém.

Ž: *To viem z Pytagorovej vety, c je prepona, a je odvesna.*

U: Spresníme. ***Strana oproti pravému uhlu*** sa nazýva ***prepona***, strany vytvárajúce pravý uhol sú odvesny. Keďže odvesna a je ***oproti ostrému uhlu*** α, nazýva sa ***protiľahlá odvesna***.



Ž: *Aha! Takže pomer protiľahlej odvesny a prepony v podobných pravouhlých trojuholníkoch je konštantný.*

U: Áno a definuje funkciu sínus ostrého uhla α. Zapísané:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Sínus ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je ***pomer dĺžky protiľahlej odvesny*** ostrého uhla ***k dĺžke prepony***.

Ž: *Čo ak budem poznať iné dve strany v pravouhlom trojuholníku?*

U: Využiješ inú goniometrickú funkciu. Podobným spôsobom sa dá z pomeru strán dvoch podobných trojuholníkov odvodiť vzťah medzi inými dvomi stranami daného pravouhlého trojuholníka. Trojuholník má tri strany, do pomeru dávame dve z nich. Koľko goniometrických funkcií by sme mohli vytvoriť?

Ž: *Asi* 3*, pomery a ku c, b ku c a a ku b. Vlastne až* 6*, lebo aj c ku a, c ku b a b ku a.*

U: Z praktického hľadiska stačí poznať prvé tri, ktoré si uviedol, zo zvyšných je dôležitá posledná. Zadefinujeme zvyšné funkcie a zavedieme ich pomenovanie a označenie:

Kosínus ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je ***pomer dĺžky priľahlej odvesny*** ostrého uhla ***k dĺžke prepony***.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Tangens ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je ***pomer dĺžok protiľahlej a priľahlej odvesny*** k ostrému uhlu.

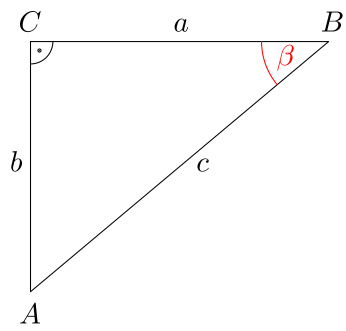
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Kotangens ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je ***pomer dĺžok priľahlej a protiľahlej odvesny*** k ostrému uhlu.

$$\mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Ž: *Mohli by sme zapísať goniometrické funkcie aj pre ostrý uhol β?*

U: Ak si učivo pochopil, tak je to teraz tvoja úloha.



Ž: **Sínus** *je* **pomer protiľahlej odvesny k prepone**. *Protiľahlá k uhlu* β *je odvesna* b*, teda:*

$$\sin\beta = \frac{b}{c}.$$

Ostatné je už ľahké:

$$\cos\beta = \frac{a}{c}, \qquad \mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a}, \qquad \mathrm{cotg}\beta = \frac{a}{b}.$$

U: Skús porovnať hodnoty goniometrických funkcií pre ostré uhly α a β v tom istom pravouhlom trojuholníku.

Ž: *Zaujímavé.*

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}, \qquad \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{cotg}\beta = \frac{a}{b}$$

$$\sin\beta = \cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \mathrm{tg}\beta = \mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$$

U: Dôležitejšie to bude, ak použijeme iba jednu premennú. Dá sa uhol β vyjadriť cez uhol α?

Ž: *Keďže uhol* $\gamma = 90^\circ$ *a súčet* $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$*, tak* $\alpha + \beta = 90^\circ$*, a teda* $\beta = 90^\circ - \alpha$.

U: Ak to využijeme, tak to, čo si objavil, si treba pamätať v tvare:

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{cotg}(90^\circ - \alpha)$$

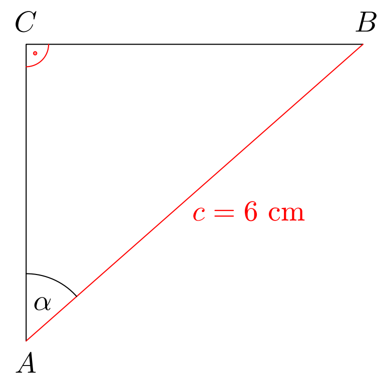
$$\mathrm{cotg}\alpha = \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha).$$

Daná vlastnosť vyjadruje, že funkcie kosínus a kotangens sa chápu ako ***doplňujúce funkcie*** k funkciám sínus a tangens.

Príklad 1: *Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C tak, aby platilo $c = 6$ cm a $\sin\alpha = \frac{3}{4}$.*

Ž: *To mám urobiť celú konštrukčnú úlohu?*

U: V tomto prípade nie. Ale náčrt je dobrým východiskom, aby si si uvedomil, čo máš dané a ako budeš rysovať.



Ž: *Viem, že trojuholník má byť pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C.*

U: Dobre. Pre konštrukciu trojuholníka potrebuješ 3 údaje o stranách alebo uhloch. Jeden uhol už máš, ten bol v texte úlohy. Aj zvyšné 2 údaje sú v texte úlohy.

Ž: *Prepona je dlhá 6 cm, ale žiaden ďalší uhol ani stranu tam nevidím.*

U: Ďalšia strana nie je zadaná priamo, ale máš pomer dvoch strán daný funkciou sínus.

Ž: *Aha!* **Sínus** *je* **pomer dĺžky protiľahlej odvesny k dĺžke prepony**. *Čiže prepona je 4 cm a odvesna $a = 3$ cm.*

U: Trojuholník s preponou 4 cm a odvesnou 3 cm je jeden z tých, pre ktoré platí: $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Ten, ktorý máš zostrojiť, má mať preponu 6 cm dlhú, je s ním podobný. Koeficient podobnosti určíš, ak dáš do pomeru dĺžky prepôn týchto dvoch podobných trojuholníkov.

Ž: 6 *ku* 4 *dá* **koeficient** 1,5.

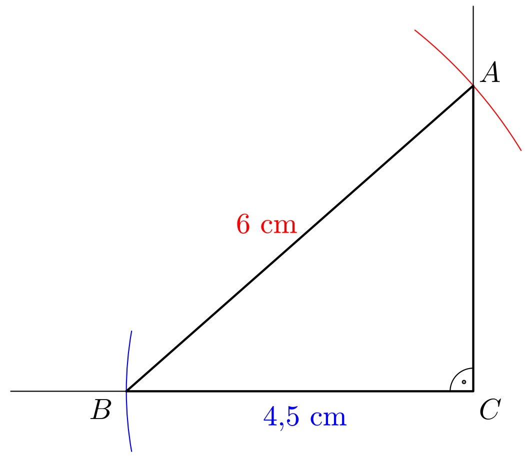
U: Teda aj ***odvesna*** trojuholníka, ktorý máš zostrojiť bude $1,5$-***krát väčšia***.

Ž: *Odvesna a teda bude*

$$a = 1{,}5 \cdot 3 \ cm = 4{,}5 \ cm.$$

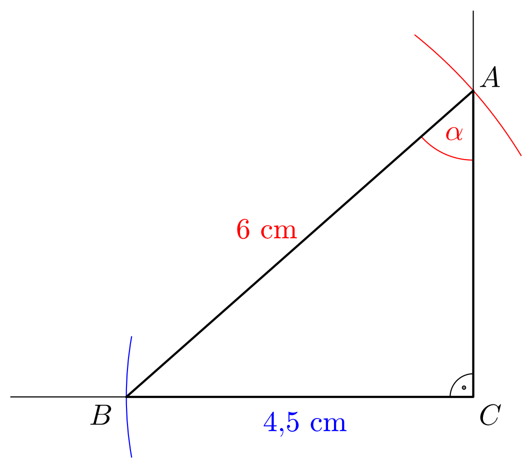
U: Máme zostrojiť pravouhlý trojuholník, ak je dané: $\gamma = 90°$, $a = 4{,}5$ cm, $c = 6$ cm. Skús popísať, ako budeš postupovať!

Ž: *Zostrojím si ľubovoľný pravý uhol, jeho vrchol označím C. Na jednom ramene pravého uhla nanesiem úsečku dĺžky $4,5$ cm, čo je odvesna a. Dostanem bod B. Bod A získam pomocou kružnice k so stredom v bode B a polomerom 6 cm, lebo tak zabezpečím dĺžku prepony 6 cm. Tam, kde táto kružnica pretne druhé rameno pravého uhla získam bod A. Mám trojuholník ABC.*



U: Vyznač, kde je uhol α, pre ktorý má platiť $\sin\alpha = \frac{3}{4}$?

Ž: *Uhol je oproti odvesne a, čiže pri vrchole A.*



U: Trojuholník je pravouhlý, dĺžka prepony je 6 cm a platí $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, lebo $\frac{4,5}{6} = \frac{3\cdot 1,5}{4\cdot 1,5} = \frac{3}{4}$.

Príklad 2: *Dĺžka ramena rovnoramenného trojuholníka je trojnásobkom dĺžky jeho základne. Vypočítajte veľkosti jeho vnútorných uhlov.*

U: Vieš, čo je charakteristické pre rovnoramenný trojuholník?

Ž: *Má dve strany rovnako dlhé.*

U: Nazývajú sa ramená, zvyšná strana je základňa. Ako je to s jeho vnútornými uhlami?

Ž: *Ak sú 2 strany rovnako dlhé, tak aj uhly oproti nim sú rovnako veľké.*

U: Hovorí sa im uhly priľahlé k základni. Skúsme vypočítať ich veľkosť. Trojuholník označíme ABC so základňou AB. Začnime uhlom α.

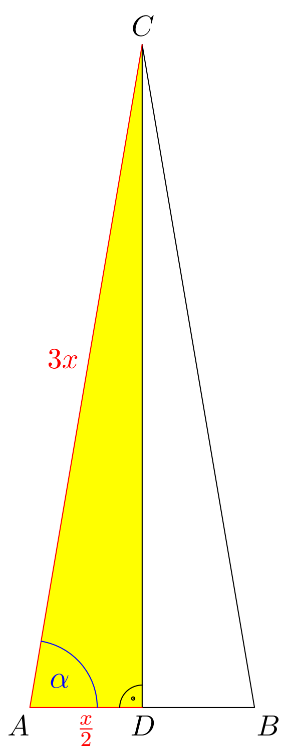
Ž: *Ale v texte úlohy nemáme dĺžku žiadnej strany.*

U: Máme však informáciu, že dĺžka ramena je trojnásobkom dĺžky základne. Ak si ***dĺžku základne označíš*** x, aké dlhé bude ***rameno***?

Ž: $3x$.

U: Aby si mohol použiť niektorú goniometrickú funkciu ostrého uhla, potrebuješ pravouhlý trojuholník.

Ž: *To nie je problém. Výška na základňu rozdelí rovnoramenný trojuholník na 2* **zhodné pravouhlé trojuholníky** *ADC a BDC.*



U: Vyjadri dĺžky strán AD a AC v trojuholníku ADC.

Ž: $|AD| = \frac{x}{2}$, $|AC| = 3x$.

U: Ak chceš vypočítať uhol α, ktorú funkciu využiješ?

Ž: *Keďže mám vyjadrenú dĺžku priľahlej odvesny k uhlu α a preponu, použijem funkciu kosínus.*

U: Čiže: $\cos\alpha = \frac{|AD|}{|AC|}$. Pokračuj dosadením.

Ž: $\cos\alpha = \frac{\frac{x}{2}}{3x}$, *po úprave zloženého zlomku:* $\cos\alpha = \frac{x}{6x}$.

U: Po krátení dostávame:

$$\cos\alpha = \frac{1}{6}.$$

Uhol α určíme použitím kalkulačky:

$$\alpha \approx 80,406^\circ.$$

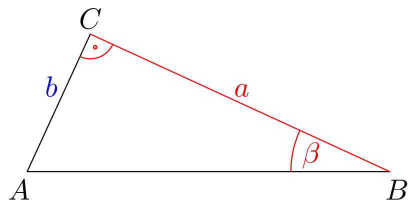
Ž: *Uhol β bude rovnaký a uhol γ dopočítam zo súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku:*

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,\ \alpha = \beta$$

U: Teda $\gamma \approx 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 80{,}406^\circ = 19{,}188^\circ$.

Príklad 3: *V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C je daná dĺžka strany $a = 20\ cm$ a uhol $\beta = 34^\circ\, 20'$. Vypočítajte:*
a) dĺžku strany b,
b) výšku na stranu c, teda v_c.

Ž: *Radšej si urobím náčrt a vyznačím, čo poznám.*



U: V akom vzťahu sú strany a, b vzhľadom k uhlu β?

Ž: *Sú to* **odvesny***, takže použijem* **tangens** *alebo kotangens.*

U: Máš pravdu, ale nie je to celkom jedno.

Ž: *Ako to myslíte?*

U: Ukážeme si to. Využi najskôr funkciu tangens.

Ž: *To je* **pomer protiľahlej k priľahlej***, čiže:*

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a}.$$

U: Vyjadri stranu b, dosaď hodnoty a uhol vypočítaj použitím kalkulačky.

Ž: $b = a \cdot \mathrm{tg}\beta = 20 \cdot \mathrm{tg}34^\circ\, 20' \approx 13{,}66\ cm$

U: Poďme teraz na výpočet cez ***kotangens***.

Ž: *To je* **pomer priľahlej k protiľahlej***, čiže:*

$$\mathrm{cotg}\beta = \frac{a}{b}.$$

A mám problém vyjadriť neznámu b, keď je v menovateli.

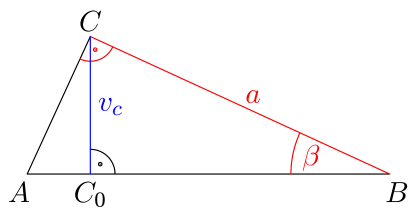
U: Vynásob obe strany rovnice neznámou b.

Ž: $b \cdot \mathrm{cotg}\beta = a$

U: Vydeľ výrazom $\mathrm{cotg}\beta$.

Ž: $b = \dfrac{a}{\mathrm{cotg}\beta}$ *a môžem dosadiť.*

U: Pre určenie uhla budeš musieť použiť kalkulačku a vznikne druhý problém. Tlačidlo kotangens na kalkulačke nie je. Kotangens je prevrátenou hodnotou tangensu. Z praktických dôvodov teda používaj radšej tangens.
Vyrieš úlohu b). Opäť bude vhodný náčrt a uvedomiť si čo označuje symbol v_c.



Ž: *Je to výška na stranu c.*

U: Teda kolmica z bodu C na preponu AB. Označ pätu výšky ako C_0.

Ž: *Je to už ľahké, lebo použijem pravouhlý trojuholník BC_0C a v ňom funkciu* **sínus**, *lebo strana BC je* **prepona** *a v_c* **protiľahlá odvesna** *k zadanému uhlu β.*

U: Stačí dopočítať.

Ž: $\sin\beta = \dfrac{|CC_0|}{|BC|} = \dfrac{v_c}{a}$, *vynásobím premennou a, aby som vyjadril výšku:*

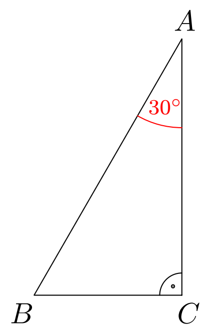
$$v_c = a \cdot \sin\beta$$

a dosadím

$$v_c = 20 \cdot \sin 34^\circ\, 20' \approx 11{,}28 \ cm.$$

Príklad 4: *Vypočítajte hodnoty* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{cotg}\alpha$ *pre* $\alpha = 30°$.

U: Použijeme ***pravouhlý trojuholník***, v ktorom jeden ostrý uhol je $\alpha = 30°$.

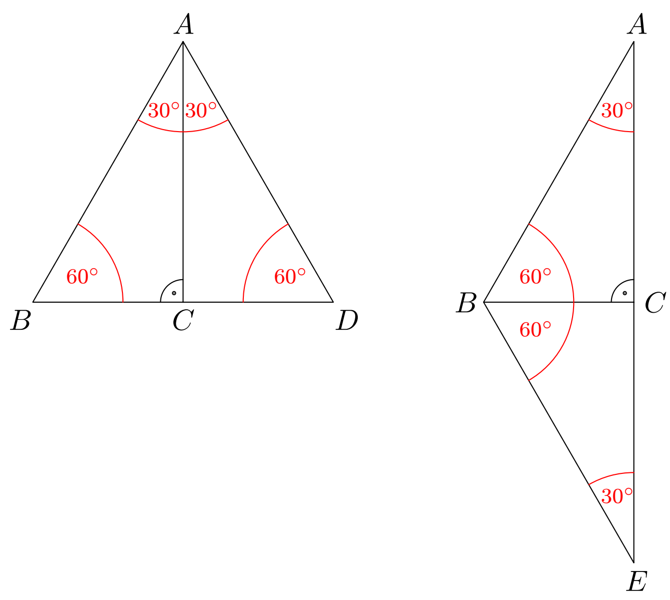


Ž: *Poznáme potom aj tretí uhol, ten má veľkosť* $60°$.

U: Pravouhlý trojuholník možno chápať ako jeden z dvoch zhodných trojuholníkov, na ktoré je rozdelený ***rovnoramenný trojuholník*** svojou výškou na základňu. Skús takýto trojuholník z trojuholníka ABC vytvoriť.

Ž: *Ale to sa dá viacerými spôsobmi.*

U: Iba dvoma, keď výškou rovnoramenného trojuholníka bude strana AC alebo strana BC.



U: Čo myslíš, ktorý z nich bude pre ďalšie riešenie úlohy výhodnejší?

Ž: *Aha už to vidím, keď výškou na základňu v novovytvorenom trojuholníku bude strana* AC.

U: Vznikne ***rovnostranný trojuholník*** ABD, pretože všetky uhly majú veľkosť $60°$. Ak dĺžku strany tohto rovnostranného trojuholníka označíme ako premennú x, vieme vyjadriť všetky strany v pravouhlom trojuholníku ABC.

Ž: $|AB| = x$, $|BC| = \dfrac{x}{2}$, *ale dĺžku strany* AC *nepoznám.*

U: Použiješ ***Pytagorovu vetu***:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ž: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + b^2 = x^2$

U: Odčítame zlomok a upravíme na spoločného menovateľa:

$$b^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}.$$

Po odmocnení dostávame:

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Teraz, keď máš vyjadrené všetky strany pravouhlého trojuholníka ABC, môžeš vypočítať hodnoty goniometrických funkcií pre uhol 30°.

$$a = \frac{x}{2}, \qquad b = \frac{\sqrt{3}}{2}x, \qquad c = x.$$

Ž: *Využijem definície funkcií, dosadím dĺžky strán. Premenná x sa vykráti.*

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}, & \cos 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \mathrm{tg} 30^\circ = \frac{a}{b} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{3}x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, & \mathrm{cotg} 30^\circ = \frac{b}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3} \end{array}}$$

U: Výsledky sú v matematických výpočtoch dosť dôležité, preto si ich treba zapamätať. Výsledok pre tangens treba upraviť, odstrániť odmocninu z menovateľa.

Ž: *A to ako?*

U: ***Rozšíriť zlomok*** výrazom z menovateľa.

Ž: *Spomínam si. Rozšíriť znamená vynásobiť čitateľa aj menovateľa číslom* $\sqrt{3}$.

$$\mathrm{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

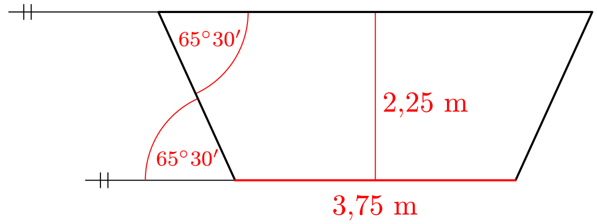
Príklad 5: *Vypočítajte šírku priekopy, ktorá má v kolmom reze tvar rovnoramenného lichobežníka. Steny priekopy majú sklon* $65°30'$*, dno má šírku* $3{,}75$ *m a hĺbka priekopy je* $2{,}25$ *m.*

U: Čo je rovnoramenný lichobežník by nemal byť problém.

Ž: *Je to špeciálny štvoruholník, ktorého dve protiľahlé strany sú rovnobežné. Zvyšné dve strany sú rôznobežné, a keďže je rovnoramenný majú rovnakú veľkosť.*

U: Ako hovorí pomenovanie, rovnako dlhé strany sa nazývajú ramená, rovnobežné strany sú základne. Čo poznáme?

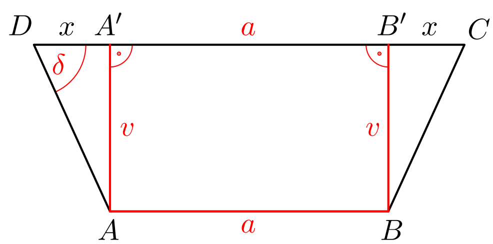
Ž: *Jednu základňu, výšku lichobežníka, ale čo to je sklon steny potrebujem vysvetliť.*



U: Sklon steny je uhol medzi stenou priekopy a vodorovnou rovinou, v priereze je to ostrý uhol, ktorý zviera rameno lichobežníka so základňou. Je jedno s ktorou, pretože ide o striedavé uhly na priečke rovnobežných priamok – základne, a preto sú rovnako veľké.

Ž: *Naša úloha je teda vypočítať dlhšiu základňu.*

U: Tá pozostáva z troch častí, ktoré dostaneš, ak si v lichobežníku $ABCD$ načrtneš ***výšky*** z bodov A, B ***na základňu*** CD.



Ž: *Prostredná časť má rovnakú dĺžku ako základňa* AB *lichobežníka, lebo* $ABB'A'$ *je* **obdĺžnik**.

$$|A'B'| = |AB| = 3{,}75\ m$$

U: Zvyšné dve časti majú rovnakú veľkosť, lebo trojuholníky DAA' a CBB' sú zhodné. Vypočítaj dĺžku úsečky DA' z pravouhlého trojuholníka DAA'.

Ž: *Poznám* **uhol, protiľahlú odvesnu**, *čo je výška v lichobežníku, a chcem vypočítať* **priľahlú odvesnu**. *Použijem funkciu* **tangens***:*

$$\mathrm{tg}\delta = \frac{|AA'|}{|DA'|},$$

vynásobím $|DA'|$*:*

$$|DA'| \cdot \mathrm{tg}\delta = |AA'|.$$

Vydelím $\mathrm{tg}\delta$ *a dosadím hodnoty:*

$$|DA'| = \frac{|AA'|}{\mathrm{tg}\delta} = \frac{3{,}75}{\mathrm{tg}65^\circ 30'} \approx 1{,}71\ m.$$

U: Dlhšia základňa rovnoramenného lichobežníka meria:

$$|CD| = 2 \cdot |DA'| + |A'B'| \approx 9{,}21 \text{ m}.$$

Táto číselná hodnota predstavuje šírku priekopy, ktorú sme mali vypočítať.

Príklad 6: *Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov rovnobežníka $ABCD$, ak sú dané dĺžky jeho strán $a = 10$ cm, $b = 5$ cm a obsah rovnobežníka je 25 cm^2.*

U: Vzorec pre obsah rovnobežníka by nemal byť problém.

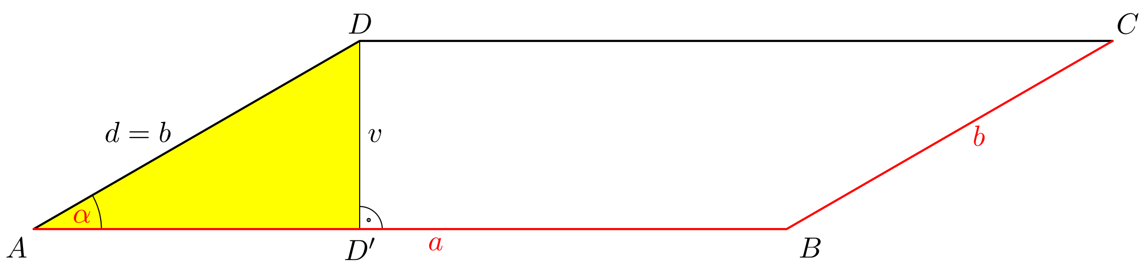
Ž: *Obsah rovnobežníka je základňa krát výška.*

$$S = a \cdot v$$

U: Môžeš teda vypočítať ***výšku***.

Ž: $v = \dfrac{S}{a}$, *po dosadení:* $v = \dfrac{25}{10} = 2{,}5$ *cm.*

U: Na výpočet uhla α potrebuješ pravouhlý trojuholník. Pozri na obrázok.



Ž: *Zoberiem* **pravouhlý trojuholník** $AD'D$, *v ktorom poznám stranu* $b = |AD| = 5$ *cm a* $v = |DD'| = 2{,}5$ *cm, čo som vypočítal.*

U: Stačí si uvedomiť, ktorú goniometrickú funkciu využiješ.

Ž: *To je jasné.* **Protiľahlá odvesna a prepona**, *takže sínus:*

$$\sin\alpha = \frac{v}{b} = \frac{2{,}5}{5} = \frac{1}{2}.$$

U: To je význačná hodnota, ktorú si máme pamätať, teda α je 30 stupňov. Čo ostatné uhly?

Ž: *Uhol γ je tuším rovnaký ako α. Aj dvojica uhlov β, δ je rovnako veľká. Dopočítam to zo* **súčtu vnútorných uhlov**.

$$\gamma = \alpha = 30^\circ$$

$$\beta = \delta$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

U: Po dosadení dostávame:

$$2 \cdot \beta + 2 \cdot 30^\circ = 360^\circ.$$

Pokračuj.

Ž: *Odčítam 60 stupňov a predelím dvomi:*

$$2 \cdot \beta = 360^\circ - 60^\circ$$

$$\beta = 150^\circ.$$

U: Na výpočet uhla β si mohol využiť súhlasný uhol k uhlu α na priečke rovnobežných priamok AD a BC. Pozri obrázok.

Ž: *Tento uhol s uhlom* β *tvoria dvojicu susedných uhlov, preto ich súčet je* 180 *stupňov. Teda*

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Veľkosti vnútorných uhlov rovnobežníka sú:

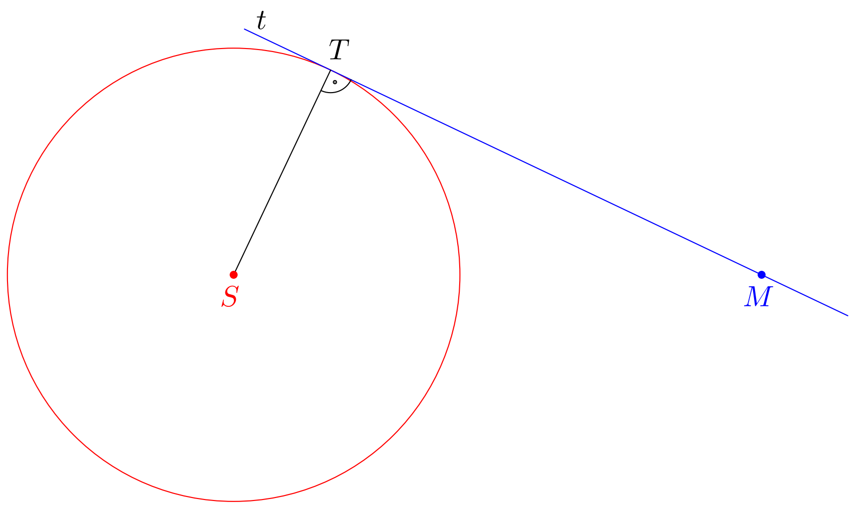
$$\alpha = \gamma = 30^\circ, \ \beta = \delta = 150^\circ.$$

Príklad 7: *Daná je kružnica $k(S; r)$, $r = 3$ cm. Vypočítajte veľkosť uhla, ktorý zvierajú dotyčnice ku kružnici vedené jej vonkajším bodom M; $|MS| = 7$ cm.*

U: Pripomeňme si najskôr obsah pojmu dotyčnica ku kružnici.

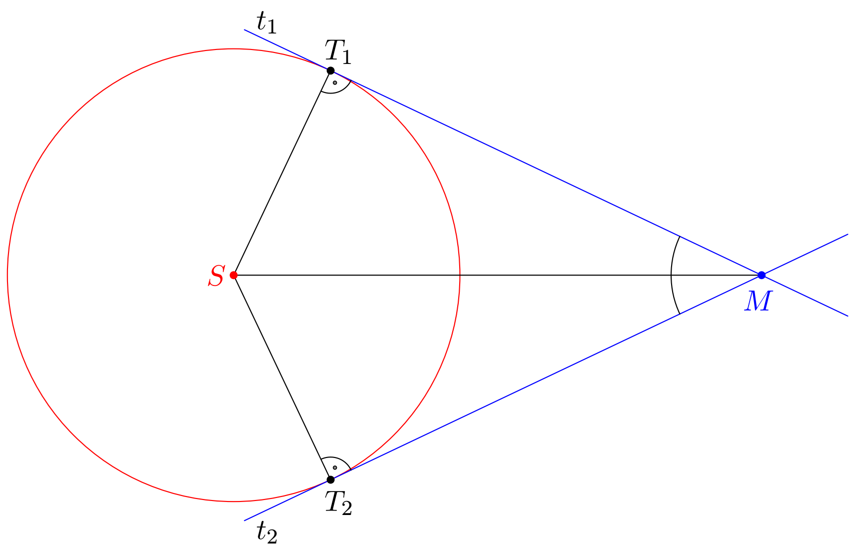
Ž: *Je to priamka, ktorá má s kružnicou spoločný práve jeden bod.*

U: Nazýva sa ***dotykový bod*** T a platí, že ***úsečka*** spájajúca dotykový bod a stred kružnice je na dotyčnicu ***kolmá***.



Ž: *Bodom M sa zrejme dajú zostrojiť 2 dotyčnice ku kružnici.*

U: Označme dotykové body týchto dotyčníc T_1, T_2.



U: Veľkosť ktorého uhla teda máme vypočítať?

Ž: *Uhla T_1MT_2.*

U: Je to uhol v štvoruholníku ST_1MT_2, ktorý uhlopriečka SM rozdeľuje na ***dva zhodné trojuholníky*** SMT_1 a SMT_2.

Ž: *Prečo sú zhodné?*

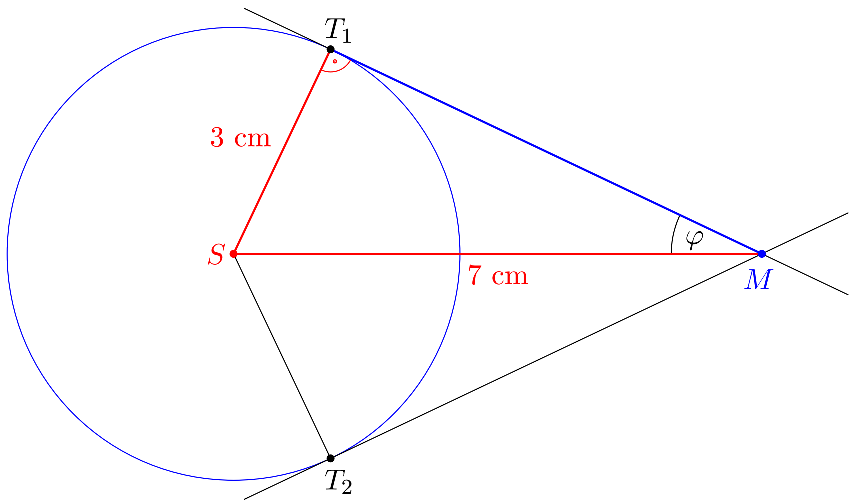
U: Sú zhodné podľa vety (Ssu), lebo : $|ST_1| = |ST_2| = r$, čo je polomer kružnice. Stranu SM majú spoločnú a oproti dlhšej zo zhodných strán je pravý uhol:

$$|\angle ST_1M| = |\angle ST_2M| = 90°.$$

Ž: *Potom aj* **uhly SMT_1 a SMT_2 sa zhodujú**.

U: A to je práve pointa úlohy. Najskôr vypočítame veľkosť uhla SMT_1 z pravouhlého trojuholníka SMT_1 a uhol dotyčníc bude dvojnásobkom jeho veľkosti.

$$|\angle T_1MT_2| = 2 \cdot |\angle SMT_1| = 2\,\varphi$$



U: Vypočítaj φ z trojuholníka SMT_1.

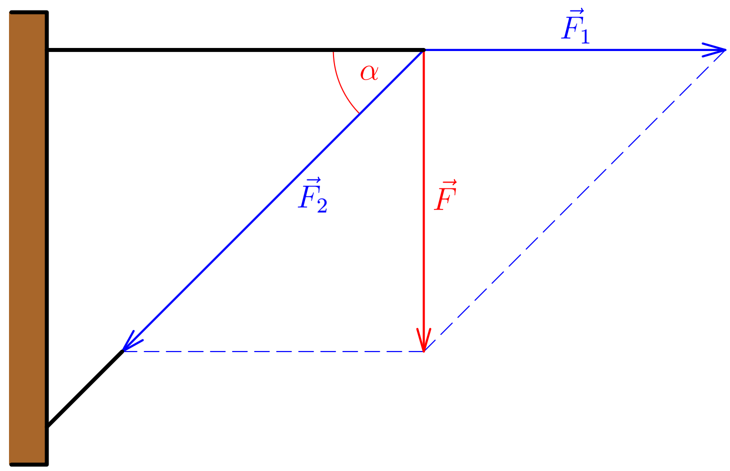
Ž: *Poznám* **preponu** $|SM| = 7$ *cm a* **protiľahlú odvesnu** $|ST_1| = 3$ *cm, preto použijem funkciu* **sínus***:*

$$\sin\varphi = \frac{|ST_1|}{|SM|} = \frac{3}{7}.$$

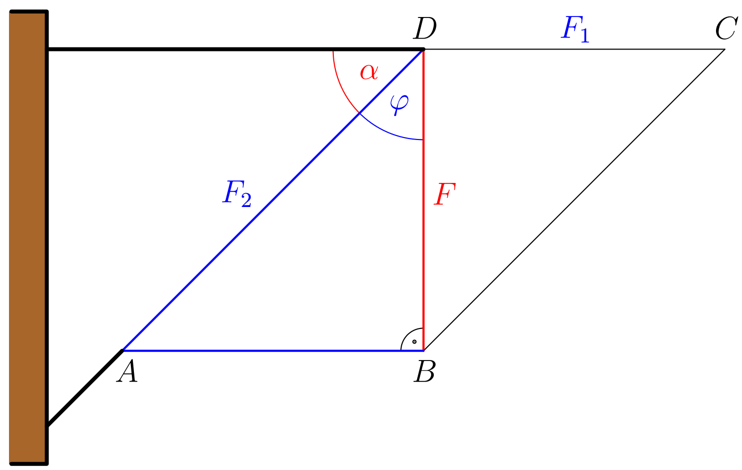
Uhol určím využitím kalkulačky: $\varphi = 25{,}38°$.

U: Uhol, ktorý zvierajú dotyčnice ku kružnici má veľkosť $50{,}76°$.

Príklad 8: *Nosník, ktorého ramená zvierajú uhol $\alpha = 45°$ je zaťažený bremenom, ktoré pôsobí silou veľkosti $F = 800$ N. Určte namáhanie nosníka na ťah F_1 a na tlak F_2.*



U: Ide o rozklad sily na dve zložky F_1 a F_2. Zložky F_1 a F_2 tvoria dve susedné strany ***rovnobežníka*** $ABCD$ a výsledná sila F je uhlopriečkou tohto rovnobežníka. Sila F, ako tiažová sila bremena, je kolmá na rameno nosníka.



Ž: *Viem vyjadriť uhol medzi silami F a F_2:*

$$\varphi = 90° - 45° = 45°.$$

U: Na výpočet veľkosti sily F_2 využiješ trojuholník ABD, ak si uvedomíš, že ***uhol pri vrchole B je pravý***.

Ž: *Poznám jeden ostrý uhol, priľahlú odvesnu a potrebujem preponu, takže použijem funkciu kosínus:*

$$\cos\varphi = \frac{|BD|}{|AD|} = \frac{F}{F_2}$$

U: Vyjadri F_2.

Ž: *Vynásobím F_2:*

$$F_2 \cdot \cos\varphi = F$$

Vydelím kosínusom a dosadím:

$$F_2 = \frac{F}{\cos\varphi} = \frac{800}{\cos 45^\circ} = \frac{800}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1600}{\sqrt{2}}.$$

U: Výsledok uprav tak, aby v menovateli nebola odmocnina.

Ž: *Vynásobím čitateľa aj menovateľa číslom $\sqrt{2}$:*

$$F_2 = \frac{1600}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1600 \cdot \sqrt{2}}{2} = 800 \cdot \sqrt{2}.$$

U: Zostáva vypočítať F_1. Úsečka BC má tú istú veľkosť ako F_2, pretože $ABCD$ je rovnobežník.

Ž: *Použijem* **Pytagorovu vetu***:*

$$|BD|^2 + |CD|^2 = |BC|^2$$

U: Dosaď a dopočítaj.

Ž: *Umocním, odpočítam číselnú hodnotu a odmocním.*

$$800^2 + |CD|^2 = \left(800 \cdot \sqrt{2}\right)^2$$

$$|CD|^2 = 640000 \cdot 2 - 640000$$
$$|CD|^2 = 640000$$
$$|CD| = \sqrt{640000} = 800$$

U: Namáhanie na ťah má veľkosť 800 N a namáhanie na tlak $800 \cdot \sqrt{2}$ N.