Goniometrické rovnice riešené substitúciou

RNDr. Marián Macko

U: Okrem základných goniometrických rovníc, ktorým sme sa už venovali, existujú aj zložitejšie goniometrické rovnice. Metódy ich riešenia môžu byť rôzne. Ukážeme si také metódy, ktoré sú založené na substitúcii. S týmto pojmom si sa už určite stretol.

Ž: *Počul som niečo o tom. Ide o* **nahradenie zložitejšieho výrazu** *jednoduchším.*

U: Máš pravdu. ***Substitúcia*** mení zložité zápisy na jednoduchšie. Také, ktoré už poznáme. Bude to aj v prípade zložitejších goniometrických rovníc. V takýchto rovniciach môže byť napríklad argumentom goniometrickej funkcie výraz obsahujúci neznámu.

Ž: *Mohli by ste uviesť príklad?*

U: Napríklad rovnica $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$. Táto rovnica svojím zápisom pripomína jednoduchú goniometrickú rovnicu.

Ž: *Áno, ale to by musela mať tvar* $\cos x=-\frac{1}{2}$.

U: Práve to sa dá ľahko dosiahnuť substitúciou. V čom je rozdiel medzi týmito dvomi rovnicami?

Ž: *Rozdiel je vo výraze, ktorý je za kosínusom. V jednoduchej rovnici je to iba neznáma x a v zložitejšej rovnici je výraz* $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}$.

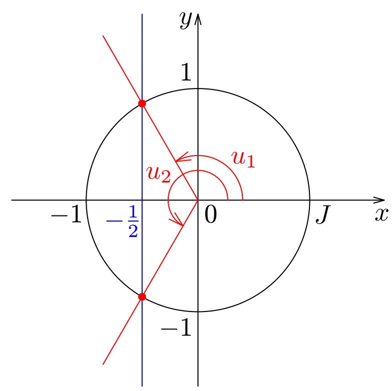
U: Preto je vhodné ***výraz*** $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}$ ***nahradiť*** jednoduchou premennou. Napríklad u. Z rovnice $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$, ktorá vyzerá pre teba komplikovane, dostaneme jednoduchú rovnicu

$$\cos u=-\frac{1}{2}.$$

Takú rovnicu vieš vyriešiť. Urč jej základné hodnoty riešenia, ktoré patria do intervalu $\langle 0;2\pi)$.

Ž: *Pomôžem si jednotkovou kružnicou. Kosínus priraďuje reálnemu číslu x x-ovú súradnicu bodov na jednotkovej kružnici. Má byť záporná, rovná číslu* $-\frac{1}{2}$. *Preto tomu zodpovedajú body v II. a v III. kvadrante.*

U: Hodnotu $\frac{1}{2}$ nadobúda funkcia kosínus pre číslo $\frac{\pi}{3}$. Vyjadri pomocou tohto čísla hodnoty neznámej u zodpovedajúce bodom v II. a v III. kvadrante.



Ž: *Riešenie zodpovedajúce II. kvadrantu bude* $u_1 = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$. *Pre III. kvadrant to bude* $u_2 = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$.

U: To sú zatiaľ základné hodnoty riešenia. Funkcia kosínus je periodická s najmenšou periódou 2π, preto všetky riešenia rovnice $\cos u = -\dfrac{1}{2}$ sa dajú vyjadriť v tvare $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ alebo v tvare $\dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$, kde k je celé číslo. Našou úlohou v riešení zadanej rovnice je však určiť hodnoty neznámej x.

Ž: *Ale substitučný vzťah spája neznáme x a u.*

U: Správne, neznáma u sa dá vyjadriť v tvare $u = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}$. Dosaď do tejto rovnice vypočítané hodnoty neznámej u a vyjadri neznámu x. Urob to najskôr pre $u_1 = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

Ž: *Najskôr dosadím za neznámu u. Obe strany rovnice vynásobím číslom 6, aby som odstránil zlomky. Odčítam číslo 3π, aby neznáma bola na jednej strane a nakoniec vydelím číslom 3. Takto dostanem riešenie $x = \dfrac{\pi}{3} + 4k\pi$, kde k je celé číslo.*

$$u = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$3x + 3\pi = 4\pi + 12k\pi,$$

$$3x = \pi + 12k\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi.$$

U: Vyriešil si to správne. Teraz urob to isté pre $u_2 = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$.

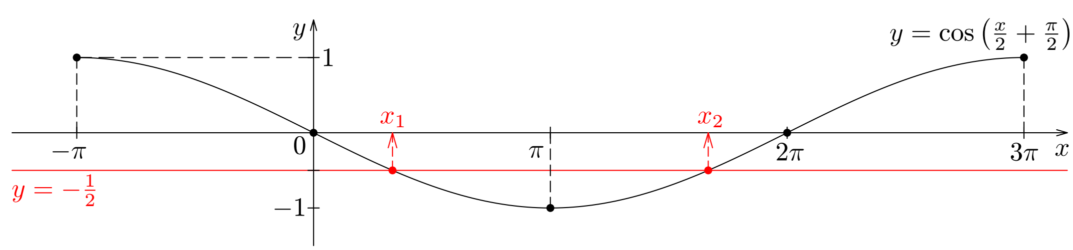
Ž: *Veľa zmien tu nebude. Urobím také isté úpravy ako v prvom prípade. Vynásobím obe strany rovnice číslom 6, odčítam 3π a nakoniec vydelím obe strany rovnice číslom 3. Dostanem výsledok $x = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi$, kde k je celé číslo.*

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}, \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} &= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \\ 3x + 3\pi &= 8\pi + 12k\pi, \\ 3x &= 5\pi + 12k\pi, \\ x &= \frac{5\pi}{3} + 4k\pi. \end{aligned}}$$

U: Prechod od hodnôt substitučnej neznámej k riešeniu pre neznámu x si zvládol veľmi pekne. Skôr, než ukončíme riešenie rovnice zápisom množiny koreňov, pozrieme sa ešte na dve dôležité veci. Dúfam, že si zaregistroval zmenu v perióde pre riešenia neznámej x. Základné hodnoty sa opakujú, ale najmenšia perióda je 4π.

Ž: *Všimol som si, že ste násobky periódy pripočítavali už k substitučnej neznámej. Pri vyjadrovaní x sa objavila nová perióda. Prečo sa násobky periódy 2π nepripočítajú až na konci riešenia k neznámej x?*

U: To je druhá dôležitá záležitosť. Najmenšiu periódu 2π má iba funkcia v tvare $y = \cos u$. No funkcia $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ je zloženou funkciou. Koeficient $\frac{1}{2}$ pri argumente x v predpise tejto funkcie mení periódu. Perióda bude dvakrát väčšia ako u funkcie $y = \cos u$. Preto sa základné riešenia budú opakovať s najmenšou ***periódou*** 4π.



Ž: *Z obrázka je to jasné. Nie všetky zložené goniometrické funkcie majú rovnakú periódu. Preto sa to prejaví aj pri riešení rovníc.*

U: Zapíš množinu koreňov rovnice.

Ž: *Množina koreňov sa dá zapísať v tvare*

$$\mathcal{K} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 4k\pi;\ \frac{5\pi}{3} + 4k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

U: Poďme si to teraz celé zhrnúť. Ak máme rovnicu v tvare $\cos(ax+b) = c$, kde a, b, c sú reálne čísla a a je rôzne od nuly, riešime ju ***substitúciou argumentu*** funkcie kosínus. Teda výraz $ax+b$ nahradíme novou neznámou u. Ďalej riešime jednoduchú goniometrickú rovnicu $\cos u = c$, z ktorej vyjadríme neznámu u. Teraz spätne dosadíme za u pôvodný výraz $ax+b$ a doriešime rovnicu. Teraz už s premennou x. Je dôležité si uvedomiť, že zatiaľ čo riešenia rovnice $\cos u = c$ sa opakujú s najmenšou periódou 2π, riešenia rovnice $\cos(ax+b) = c$ sa budú opakovať s najmenšou ***periódou*** $p = \dfrac{2\pi}{|a|}$.

U: Druhý typ zložitejších goniometrických rovníc, pri ktorých sa používa substitúcia, sú rovnice v tvare $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$, kde a, b, c sú reálne čísla, pričom a je rôzne od nuly. Výraz $\sin x$ môže byť nahradený inou goniometrickou funkciou. Princíp riešenia tejto rovnice pochopíš, ak pochopiš jej zápis. Aký je výraz na ľavej strane rovnice? Čo obsahuje?

Ž: *Obsahuje tri sčítance. Je tam samotná funkcia sínus, ale aj jej druhá mocnina.*

U: Na ľavej strane je navyše aj člen c, ktorý nie je viazaný funkciou sínus. Výraz teda obsahuje tri členy, kvadratický, lineárny a absolútny člen. Na pravej strane je nula. Ktorý typ rovnice má tieto charakteristiky?

Ž: *Podobá sa na kvadratickú rovnicu.*

U: Preto aj substitúcia bude volená tak, aby sme pre novú neznámu skutočne dostali kvadratickú rovnicu. Ktorý výraz je nutné nahradiť jednoduchšou neznámou?

Ž: *Nahradil by som výraz* $\sin x$.

U: Presne tak. Ak namiesto výrazu $\sin x$ dosadíme neznámu u, dostaneme kvadratickú rovnicu

$$au^2 + bu + c = 0.$$

Pri prechode k tejto rovnici hovoríme o ***substitúcií funkčnej hodnoty***. Výraz $\sin x$ sme nahradili neznámou u.

Ž: *Vyskúšajme to na nejakom príklade.*

U: Dobre. Vyriešme v množine reálnych čísel rovnicu $\sin^2 x + 4\sin x + 3 = 0$. Začni zavedením substitúcie.

Ž: *Výraz* $\sin x$ *nahradím novou neznámou* u. *Dostanem rovnicu* $u^2 + 4u + 3 = 0$.

U: Korene kvadratickej rovnice s neznámou u určíme niektorou zo známych metód. Pripomenieš si ich pri riešení úloh podobného typu, preto ti teraz prezradím, že koreňmi tejto rovnice sú čísla -3 a -1. Viac nás zaujíma ďalší postup pri určení hodnôt neznámej x. Čo navrhuješ?

Ž: *Dosadil by som hodnoty neznámej* u *do rovnice* $\sin x = u$. *Budeme mať dve jednoduché goniometrické rovnice, keďže sme dostali dve hodnoty neznámej* u.

U: Dosaď za neznámu u najskôr hodnotu -3.

Ž: *Rovnica, ktorú získam bude mať tvar* $\sin x = -3$. *Ale sínus nadobúda hodnoty iba od* -1 *do* 1 *vrátane. Sínus nemôže mať hodnotu* -3.

U: Pre tento prípad je teda riešením prázdna množina. Zostáva ti vyriešiť prípad, keď $u = -1$.

Ž: *Rovnica* $\sin x = -1$ *bude mať jedno základné riešenie. Hodnotu* -1 *nadobúda funkcia sínus pre* x *rovné číslu* $\dfrac{3\pi}{2}$.

U: Sú to všetky riešenia rovnice $\sin x = -1$?

Ž: *Nie. Všetky riešenia dostanem pripočítaním celočíselných násobkov čísla* 2π *k tomuto základnému riešeniu. Funkcia sínus je totiž periodická s najmenšou periódou* 2π.

U: Keďže sme už vyriešili všetky prípady, ku ktorým viedla zadaná rovnica, riešenia poslednej rovnice budú aj riešeniami zadanej rovnice. Teda platí, že:

$$\mathcal{K} = \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

U: Pokús sa na záver vysvetliť všeobecne podstatu riešenia rovníc typu

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0.$$

Ž: *Dobre. Najprv zavediem* **substitúciu** $u = \sin x$. *Pre neznámu* u *potom získam* **kvadratickú rovnicu**

$$au^2 + bu + c = 0.$$

Určím korene kvadratickej rovnice $u_1; u_2$, *samozrejme, ak existujú. Nakoniec pre každý koreň kvadratickej rovnice s neznámou* u *vyriešim jednoduchú goniometrickú rovnicu* $\sin x = u$.

U: Od číselných hodnôt koreňov kvadratickej rovnice závisí počet riešení jednoduchých goniometrických rovníc. Princíp riešenia sa však nezmení ak v rovnici zameníme funkciu sínus za ktorúkoľvek inú goniometrickú rovnicu. Neovplyvňujú ho ani zadané hodnoty parametrov a, b, c.

Príklad 1: *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu:* $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

U: Najprv zjednodušíme zápis zadanej rovnice.

Ž: *Ako?*

U: V tejto rovnici je argumentom funkcie sínus lineárny výraz $2x - \frac{\pi}{4}$. V jednoduchej goniometrickej rovnici je to iba jedna neznáma. Aj my si to preto zjednodušíme tak, že nahradíme celý lineárny výraz neznámou u:

$$2x - \frac{\pi}{4} = u.$$

Ž: *Spomínam si. Zavedieme substitúciu.*

U: Áno, zavedieme ***substitúciu argumentu*** funkcie. Celý výraz, z ktorého počítame hodnoty sínus, nahradíme jednoduchou premennou. Akú rovnicu v našom prípade získame?

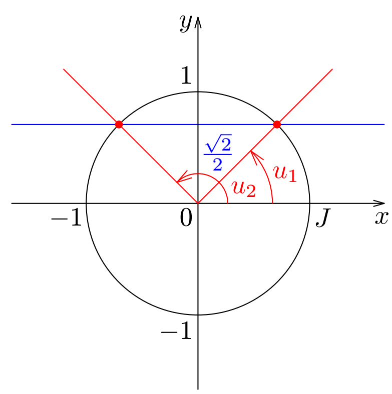
Ž: *Dostaneme rovnicu v tvare* $\sin u = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

U: Nájsť jej základné hodnoty riešenia by už pre teba nemal byť problém.

Ž: *Sínus nadobúda kladné hodnoty v* **I. a v II. kvadrante**. *Preto budú dve hodnoty základného riešenia.*

U: Ako vieme, sínus nadobúda hodnotu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pre reálne číslo $\frac{\pi}{4}$. Táto hodnota zodpovedá I. kvadrantu. Urč hodnotu pre II. kvadrant.

Ž: *Pomôžem si jednotkovou kružnicou. Hodnotu zodpovedajúcu II. kvadrantu získam, ak od čísla π odrátam hodnotu z I. kvadrantu, čiže $\frac{\pi}{4}$. Dostávam teda číslo $\frac{3\pi}{4}$.*



$$\boxed{\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}}$$

U: Riešením rovnice $\sin u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ budú všetky reálne čísla v tvare $u_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ alebo čísla v tvare $u_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, kde k je celé číslo.

Ž: *Ako vypočítame neznámu x?*

U: Ak do substitučného vzťahu dosadíme za neznámu u vypočítané hodnoty, dostaneme rovnicu pre výpočet neznámej x. Budú to dve lineárne rovnice. Urob výpočet najskôr pre $u_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Ž: *Najskôr dosadím tento výraz za premennú u. Obe strany rovnice vynásobím číslom 4. Potom pripočítam číslo π a nakoniec obe strany vydelím číslom 8. Dostanem, že $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.*

$$\boxed{\begin{gathered} 2x - \frac{\pi}{4} = u, \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ 8x - \pi = \pi + 8k\pi, \\ 8x = 2\pi + 8k\pi, \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi. \end{gathered}}$$

U: Dosadením hodnoty $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ za premennú u sa lineárna rovnica s neznámou x veľmi nezmení. Dosaď a vyrieš rovnicu.

Ž: *Vynásobím opäť obe strany rovnice číslom 4, potom pripočítam číslo π a nakoniec vydelím ôsmimi. Dostanem $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.*

$$\boxed{\begin{gathered} 2x - \frac{\pi}{4} = u, \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \\ 8x - \pi = 3\pi + 8k\pi, \\ 8x = 4\pi + 8k\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{gathered}}$$

U: Aké je teda výsledné riešenie zadanej rovnice?

Ž: *Riešením zadanej rovnice je teda:*

$$\mathcal{K} = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

U: Z riešenia taktiež vyplýva, že funkcia $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ určená výrazom na ľavej strane zadanej rovnice má ***najmenšiu periódu*** π.

Príklad 2: *Vyriešte v uzavretom intervale $\langle -2\pi; 4\pi\rangle$ rovnicu:* $\sin\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ž: *Označím si výraz $\pi - \frac{x}{2}$ ako novú premennú. Napríklad u.*

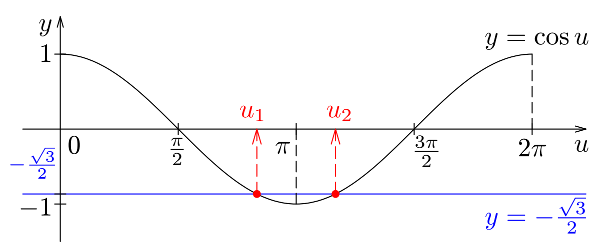
$$\boxed{\pi - \frac{x}{2} = u}$$

U: Ideš na to veľmi dobre. Túto rovnicu vyriešime ***substitúciou argumentu***. Vďaka nej dostaneme jednoduchú rovnicu $\cos u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ž: *Môžem využiť na jej vyriešenie grafickú metódu?*

U: Samozrejme. Metóda riešenia nie je podstatná, pokiaľ nie je v zadaní určená. Pri náčrte grafov však nezabudni, že teraz pracuješ s premennými u a y. ***Vodorovná os*** nebude os x, ale os u.

Ž: *Výraz na ľavej strane rovnice predstavuje* **hodnoty funkcie** $f: y = \cos u$. *Na pravej strane rovnice je číslo. Vyjadruje hodnoty konštantnej funkcie $g: y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Načrtnem si ich grafy na intervale $\langle 0; 2\pi)$. Stačí to na určenie základných hodnôt riešenia.*



U: Ako určíme tieto základné hodnoty z grafov?

Ž: *Keďže v rovnici ide o rovnosť výrazov, musia sa funkčné hodnoty rovnať. Nájdem teda priesečníky grafov.*

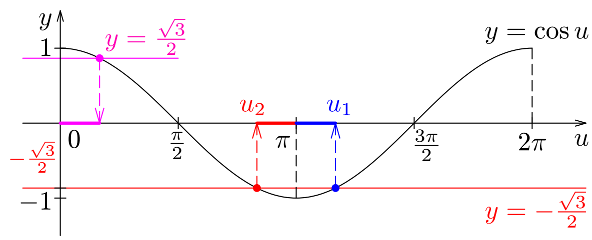
U: Ako je vidieť na grafe, také priesečníky sú dva. Súvisia s riešeniami rovnice $\cos u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ž: *Rovnica má neznámu u. Preto ma budú zaujímať iba* **prvé súradnice priesečníkov**. *Pri ich určení by som potreboval pomôcť.*

U: Uvedom si najskôr, v ktorom intervale nadobúda funkcia kosínus zápornú hodnotu.

Ž: *Funkcia kosínus má záporné hodnoty na intervale* $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

U: Funkcia kosínus nadobúda hodnotu $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ak argument je číslo $\frac{\pi}{6}$. Túto hodnotu prenesieme do intervalu $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ naľavo a napravo od čísla π.



Ž: *Už si spomínam. Jedno riešenie získam, ak tento význačný argument k číslu π prirátam a druhú hodnotu, ak odrátam:*

$$u_1 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}; \qquad u_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

U: No vidíš. Nakoniec si si spomenul. Potrebuješ vyjadriť všetky riešenia danej rovnice. Využi na to poznatok, že funkcia kosínus premennej u je periodická s najmenšou periódou 2π.

Ž: *Všetky riešenia budú zapísané ako súčet základnej hodnoty riešenia a celočíselného násobku čísla 2π, tak, ako je to uvedené v rámčeku.*

$$\boxed{u \in \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

U: Aj ďalšia časť riešenia bude jednoduchá. Aby sme určili riešenie pre neznámu x, musíme vyriešiť dve lineárne rovnice. Získame ich tak, že za neznámu u dosadíme do substitučného vzťahu vypočítané hodnoty. Dosaď najskôr za u výraz $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$.

Ž: *Po dosadení za neznámu u obe strany rovnice vynásobím číslom 6. Potom odrátam číslo 6π a vydelím rovnicu číslom -3.*

$$\boxed{\begin{aligned} \pi - \frac{x}{2} &= u, \\ \pi - \frac{x}{2} &= \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \\ 6\pi - 3x &= 7\pi + 12k\pi, \\ -3x &= \pi + 12k\pi, \\ x &= -\frac{\pi}{3} - 4k\pi. \end{aligned}}$$

U: Dostal si pre neznámu x jeden z tvarov, ktoré vyjadrujú všetky riešenia rovnice v množine reálnych čísel. Našou úlohou je však nájsť riešenia iba z uzavretého intervalu $\langle -2\pi; 4\pi\rangle$.

Ž: *Ako to zistím?*

U: Skúmaj, ktoré celé čísla môžeš dosadiť za parameter k, aby hodnota neznámej x bola z uvedeného intervalu.

Ž: *Iba čísla* 0 *a* −1*. Pre* $k = 0$ *dostanem* $x = -\dfrac{\pi}{3}$*. Ak dosadím číslo* −1*, tak dostanem* $x = -\dfrac{\pi}{3} + 4\pi = \dfrac{11\pi}{3}$.

U: Výborne. Verím, že takto úspešne vyriešiš aj druhú lineárnu rovnicu. Získaš ju, ak za substitučnú neznámu dosadíš výraz $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Ž: *To nebude problém. Lineárna rovnica s neznámou* x *vyzerá skoro tak isto. Za* u *dosadím výraz* $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$*. Obe strany rovnice vynásobím číslom* 6*, potom odrátam* 6π *a nakoniec vydelím rovnicu číslom* −3*. Dostávam, že* $x = \dfrac{\pi}{3} - 4k\pi$.

$$\boxed{\begin{aligned} \pi - \frac{x}{2} &= u, \\ \pi - \frac{x}{2} &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \\ 6\pi - 3x &= 5\pi + 12k\pi, \\ -3x &= -\pi + 12k\pi, \\ x &= \frac{\pi}{3} - 4k\pi. \end{aligned}}$$

U: V tomto prípade môžeme za parameter k dosadiť iba jedno číslo a to nulu. x sa potom rovná číslu $\dfrac{\pi}{3}$. Pre k rovné číslu 1, by bola hodnota menšia ako -2π. Naopak pre $k = -1$ hodnota neznámej by bola väčšia ako 4π. Dopracovali sme sa teda k záveru riešenia. Riešením zadanej rovnice sú tri čísla:

$$\mathcal{K} = \left\{ -\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{11\pi}{3} \right\}.$$

Príklad 3: *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu:* $\operatorname{cotg}(4x - \pi) = -0{,}1.$

U: Na riešenie rovnice použijeme ***substitučnú metódu***. Výraz $4x - \pi$, ktorý je argumentom funkcie kotangens nahradíme novou premennou. Napríklad u.

$$\boxed{4x - \pi = u}$$

Ž: *Potom dostaneme jednoduchú rovnicu* $\operatorname{cotg} u = -0{,}1.$

U: Substitučná metóda prevádza zložitejšie úlohy na úlohy už známe. Od, na prvý pohľad, zložito vyzerajúcej rovnice sme sa dostali k rovnici $\operatorname{cotg} u = -0{,}1$. A to už vieš riešiť.

Ž: *Kotangens je periodická funkcia s najmenšou periódou* π. *Z tohto dôvodu stačí určiť riešenie v otvorenom intervale* $(0; \pi)$. *Záporné hodnotu nadobúda funkcia kotangens pre argument v intervale* $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. *Použijem* **kalkulačku**, *lebo číslo* $-0{,}1$ *nepatrí medzi význačné hodnoty.*

U: Dúfam, že ti je jasné, ako pracovať s kalkulačkou. K hodnote argumentu u sa dopracuješ využitím funkcie tangens. Kotangens je jej prevrátenou a naopak.

Ž: *V tomto nemám problém. Zaskočilo ma však, že hodnota neznámej* u, *ktorú mi vypočítala kalkulačka, je záporná:*

$$u \approx -1{,}4711.$$

U: Súvisí to s funkciou tangens. Jej vlastnosti a hodnoty sa skúmajú na otvorenom intervale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Pre kladné argumenty má kladné hodnoty, a pre záporné argumenty sú hodnoty záporné. To je aj náš prípad. Preto základnú hodnotu riešenia pre neznámu u ponecháme v tomto tvare. Vyjadri všetky riešenia pre neznámu u.

Ž: *K približnej hodnote určenej na kalkulačke stačí pripočítať* **celočíselné násobky čísla** π. *Teda*

$$u \approx -1{,}4711 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$$

U: Výsledné riešenie rovnice dostaneš, ak túto hodnotu premennej u dosadíš do substitučného vzťahu. Budeš vlastne riešiť lineárnu rovnicu s neznámou x.

Ž: *Dobre. Za premennú* u *najskôr dosadím výraz* $-1{,}4711 + k\pi$. *V druhom kroku pripočítam k obom stranám rovnice číslo* π. *Nakoniec vydelím číslom 4 a dostanem, že* $x \approx \frac{\pi}{4} - 0{,}367775 + \frac{k\pi}{4}$.

$$\boxed{\begin{gathered} 4x - \pi = u, \\ 4x - \pi = -1{,}4711 + k\pi, \\ 4x = \pi - 1{,}4711 + k\pi, \\ x = \frac{\pi}{4} - 0{,}367775 + \frac{k\pi}{4}. \end{gathered}}$$

U: Tento výsledok sa ešte dá ďalej upraviť. Z troch sčítancov vieme dva zlúčiť do jedného.

Ž: *Myslíte zlomky?*

U: Pochopil si. Posledný zlomok vyjadruje celočíselné násobky zlomku $\frac{\pi}{4}$. K tomu prirátame prvý zlomok $\frac{\pi}{4}$. Dostaneme teda $k+1$ násobok zlomku $\frac{\pi}{4}$. Ale aj výraz $k+1$ predstavuje nejaké celé číslo. Napríklad h. Teda riešenie rovnice možno vyjadriť v tvare, ktorý máš uvedený v rámčeku.

$$\boxed{\mathcal{K} = \left\{-0{,}367775 + h\frac{\pi}{4};\ h \in \mathbb{Z}\right\}}$$

U: Tomuto združovaniu by si sa vyhol už na začiatku, keby si namiesto substitúcie využil na úpravu ľavej strany rovnice jednu význačnú vlastnosť funkcie kotangens. Pri riešení tejto rovnice si ju nielen spomenul, ale aj využil. Tušíš, ktorá vlastnosť to je?

Ž: **Periodickosť** *funkcie kotangens s najmenšou periódou* π*.*

U: Výborne. Platí: $\operatorname{cotg}(4x - \pi) = \operatorname{cotg} 4x$. Z tohto dôvodu sa zadaná rovnica dá upraviť na tvar $\operatorname{cotg} 4x = -0{,}1$. Jej riešenie však nechávam na tvoju domácu úlohu.

Príklad 4: *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu:* $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0.$

U: Zvolíme substitúciu. Výraz $\cos x$ nahradíme novou premennou. Napríklad y.

$$\boxed{\cos x = y}$$

Ž: *Dostaneme rovnicu v tvare* $2y^2 - 7y + 3 = 0$.

U: Akého typu je táto rovnica?

Ž: *Je to kvadratická rovnica s neznámou* y.

U: Urč koeficienty a, b, c tejto kvadratickej rovnice.

Ž: *Koeficienty sú* $a = 2$, $b = -7$ *a koeficient* c *je rovný* 3.

U: Ako určíš korene tejto rovnice?

Ž: *Vypočítam najskôr diskriminant kvadratickej rovnice* $D = b^2 - 4ac$. *Po dosadení a úpravách dostávam hodnotu tohto diskriminantu, číslo* 25.

$$\boxed{D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25}$$

U: To znamená, že kvadratická rovnica s neznámou y bude mať dva korene. Keďže si nezabudol, ako sa počíta diskriminant, predpokladám, že vypočítať tieto korene bude pre teba hračka.

Ž: *Vzorec na* **výpočet koreňov** *kvadratickej rovnice som si zapamätal veľmi dobre. Pre neznámu* x *platí:*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

U: Nezabudni, že neznáma kvadratickej rovnice je teraz označená symbolom y.

Ž: *Dosadím teraz do vzorca hodnoty koeficientov a diskriminantu. Po úpravách mi vyšlo, že* $y_1 = 3$ *a koreň* $y_2 = \frac{1}{2}$.

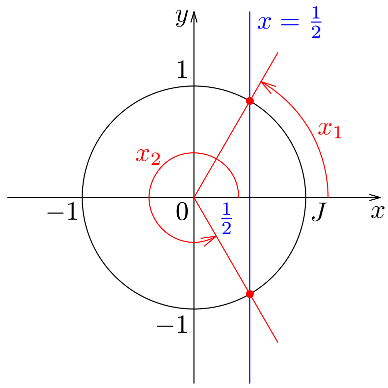
$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= \frac{-(-7) + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{7+5}{4} = 3 \\ y_2 &= \frac{-(-7) - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}}$$

U: Páčil sa mi tvoj zápis riešenia. Som rada, že si tak dobre pamätáš vzorce pre diskriminant a korene kvadratickej rovnice. Dúfam, že takto budeš pokračovať aj pri určovaní hodnôt premennej x. Do substitučného vzťahu $\cos x = y$ dosaď najskôr za premennú y prvý koreň a vypočítaj neznámu x.

Ž: *Po dosadení čísla* 3 *za premennú* y *riešim rovnicu* $\cos x = 3$. *Ale to nikdy nenastane. Hodnoty funkcie kosínus sú iba v rozpätí od* -1 *do* 1 *vrátane. Kosínus nemôže mať hodnotu rovnú číslu* 3.

U: Správne. Riešením rovnice $\cos x = 3$ je ***prázdna množina***. Zostáva nám teda vyriešiť rovnicu $\cos x = \frac{1}{2}$ po dosadení druhého koreňa.

Ž: *Takúto hodnotu už kosínus môže nadobúdať. Dokonca dvakrát, ako je to vidieť na obrázku. A to v* **I. a vo IV. kvadrante***, lebo kosínus priraďuje reálnemu číslu x x-ovú súradnicu odpovedajúcich bodov na jednotkovej kružnici.*



U: Hodnotu zodpovedajúcu bodu jednotkovej kružnice v I. kvadrante ti našepkám. Kosínus má hodnotu $\frac{1}{2}$ pre argument rovný číslu $\frac{\pi}{3}$. Ako určíš riešenie zodpovedajúce IV. kvadrantu?

Ž: *Medzi I. a IV. kvadrantom je symetria podľa osi x. Preto riešenie zodpovedajúce bodu jednotkovej kružnice v IV. kvadrante dostanem, ak od čísla 2π odrátam $\frac{\pi}{3}$.*

$$\boxed{2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}}$$

U: Výborne. Zápis množiny koreňov už urobím za teba. K základným hodnotám, ktoré sme doteraz určili zohľadním ***periodickosť*** funkcie kosínus. Má najmenšiu periódu rovnú číslu 2π. Riešením rovnice je množina

$$\mathcal{K} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Príklad 5: *Vyriešte v uzavretom intervale* $\langle -\pi; \pi\rangle$ *rovnicu:* $\mathrm{tg}x - 1 = \dfrac{2}{\mathrm{tg}x}$.

Ž: *V zadanej rovnici je zlomok, preto by som začal riešením* **podmienky**. *V menovateli zlomku nesmie byť nula.*

U: V našom prípade výraz $\mathrm{tg}x$ ***sa nesmie rovnať nule***. Nie je to zložitá podmienka. Vyrieš ju.

Ž: *Tangens nadobúda nulové hodnoty pre celočíselné násobky čísla* π. *Preto tieto čísla nebudú patriť do definičného oboru rovnice.*

U: Z hľadiska zápisu výrazov v rovnici to ešte nie je všetko.

Ž: *Ale tam už žiadny ďalší zlomok nie je, ani odmocnina.*

U: Nemáš celkom pravdu. Zlomok je schovaný vo výraze $\mathrm{tg}x$. Funkcia tangens je predsa definovaná ako podiel funkcií sínus a kosínus. V takých úlohách nesmieš zabúdať na definičný obor funkcie tangens. Spomínaš si?

Ž: *Aha! Pamätám si to v spojitosti s nulovými bodmi. Tangens mal nulové hodnoty pre celočíselné násobky čísla* π, *takže do jeho definičného oboru nepatria nepárne násobky čísla* $\dfrac{\pi}{2}$.

U: Celočíselné násobky čísla π sa dajú chápať ako párne násobky čísla $\dfrac{\pi}{2}$. Číslo π sa dá zapísať ako zlomok s menovateľom jedna. Tento zlomok možno rozšíriť číslom 2 a výsledok prepísať do požadovaného tvaru. Sleduj rámček.

$$\boxed{k\pi = k\frac{\pi}{1} = k\frac{\pi}{1}\cdot\frac{2}{2} = k\frac{2\pi}{2} = 2k\frac{\pi}{2}}$$

U: Čísla, ktoré nepatria do definičného oboru rovnice, sú teda buď ***nepárne násobky čísla*** $\dfrac{\pi}{2}$, alebo ***párne násobky čísla*** $\dfrac{\pi}{2}$. Obe skupiny čísel dávajú dohromady ***celočíselné násobky čísla*** $\dfrac{\pi}{2}$. To je uvedené v rámčeku. Preto môžeme prejsť na úpravy zadanej rovnice.

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Ž: *Výraz* $\mathrm{tg}x$ *by som nahradil novou premennou* y.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{tg}x - 1 &= \frac{2}{\mathrm{tg}x}, \\[2ex] y - 1 &= \frac{2}{y}. \end{aligned}}$$

U: Rovnica, ktorú si dostal a hlavne spôsob jej riešenia by pre teba nemali byť neznáme.

Ž: *Ak sú v rovnici zlomky, treba ich odstrániť. Preto vynásobím obe strany rovnice neznámou* y.

$$\boxed{\begin{aligned} y-1&=\frac{2}{y},\\ y^2-y&=2.\end{aligned}}$$

U: Dostal si kvadratickú rovnicu v tvare $y^2-y-2=0$. Akou metódou zvládneš výpočet jej koreňov?

Ž: *Vzorcom, s využitím diskriminantu* $D=b^2-4ac$.

U: Koeficienty sú: $a=1,\ b=-1,\ c=-2$.

Ž: *Dosadím koeficienty a vypočítam diskriminant. Výsledkom je číslo* 9.

$$\boxed{D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9}$$

U: Výsledok teraz dosaď do vzorca pre korene kvadratickej rovnice.

Ž: *Vzorec pre korene kvadratickej rovnice je:* $y_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Ž: *Za koeficient* b *dosadím hodnotu* -1, *za koeficient* a *hodnotu* 1 *a za diskriminant* D *číslo* 9. *Výpočet urobím dvakrát. Raz so znamienkom plus v čitateli a druhýkrát so znamienkom mínus. Koreňmi kvadratickej rovnice sú čísla* 2 *a* -1.

$$\boxed{\begin{aligned} y_1&=\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{1+3}{2}=2,\\ y_2&=\frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{1-3}{2}=-1.\end{aligned}}$$

U: Pre každú získanú hodnotu neznámej y vyriešime nakoniec jednoduchú goniometrickú rovnicu $\mathrm{tg}x=y$. Ona dáva do súvisu neznáme x a y. Po dosadení čísla 2 za neznámu y dostaneme rovnicu $\mathrm{tg}x=2$. Jej základné riešenie určíme na kalkulačke. Bude jediné, lebo najmenšia perióda funkcie tangens je číslo π. Všetky riešenia sa zapíšu ako súčet základného riešenia a celočíselných násobkov periódy:

$$x\approx 1{,}10715+k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

Rovnicu $\mathrm{tg}x=-1$ vyriešiš aj sám.

Ž: *Tangens nadobúda hodnotu* 1 *pre argument rovný číslu* $\dfrac{\pi}{4}$. *Tangens je záporný v II. kvadrante. Preto riešenie bude* $\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$. *Je to základná hodnota riešenia. K nej treba pripočítať* **celočíselné násobky čísla** π. *Množina koreňov rovnice je*

$$\mathcal{K}=\left\{1{,}10715+k\pi;\ \frac{3\pi}{4}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Príklad 6: *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu:* $4\sin^2 x - 2\sin x = \sqrt{3}(-1 + 2\sin x)$.

Ž: *Dosť komplikovaný zápis.*

U: Áno. Na prvý pohľad, ale spoločnými silami to zvládneme. Zvoľme najskôr ***substitúciu***. Výraz $\sin x$ nahraďme novou premennou y. Možno sa zápis rovnice trochu zjednoduší.

$$\boxed{\begin{gathered}\sin x = y,\\[2ex] 4y^2 - 2y = \sqrt{3}(-1 + 2y).\end{gathered}}$$

Ž: *Vyzerá to na kvadratickú rovnicu, lebo sú tam členy s druhou mocninou neznámej, neznáma a absolútne členy.*

U: Aby sme mohli určiť kvadratický, lineárny a absolútny člen tejto rovnice, potrebujeme ju upraviť na anulovaný tvar.

Ž: *Môžete prezradiť čo to je?*

U: Na pravej strane rovnice je nula a na ľavej strane rovnice je kvadratický výraz. Uprav rovnicu, aby sme takýto tvar dostali.

Ž: *Najskôr roznásobím výraz na pravej strane rovnice. Potom dám všetky členy na ľavú stranu rovnice. Nakoniec zlúčim členy, ktoré obsahujú neznámu y.*

$$\boxed{\begin{gathered}4y^2 - 2y = \sqrt{3}(-1 + 2y),\\[2ex] 4y^2 - 2y = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}y,\\[2ex] 4y^2 - 2y + \sqrt{3} - 2\sqrt{3}y = 0,\\[2ex] 4y^2 - (2 + 2\sqrt{3})y + \sqrt{3} = 0.\end{gathered}}$$

U: Určiť koeficienty by pre teba nemal byť problém.

Ž: *Koeficient a je rovný číslu 4, koeficient b je číselný výraz $-(2 + 2\sqrt{3})$ a absolútny člen $c = \sqrt{3}$.*

U: S výpočtom diskriminantu ti pomôžem. Sleduj rámček. Dosadím do výrazu $b^2 - 4ac$ číselné hodnoty. Dvojčlen umocním podľa vzorca $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Znamienko mínus sa umocnením mení na plus, lebo $(-1)^2 = 1$. Na konci výpočtu pre trojčlen $4 - 8\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2$ použijem vzorec $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

$$\boxed{\begin{aligned}&D = b^2 - 4ac = \left[-\left(2 + 2\sqrt{3}\right)\right]^2 - 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = \left(2 + 2\sqrt{3}\right)^2 - 16\sqrt{3} =\\ &= 4 + 8\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 16\sqrt{3} = 4 - 8\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = \left(2 - 2\sqrt{3}\right)^2.\end{aligned}}$$

Ž: *Určite by som to sám nezvládol.*

U: Ale výpočet koreňov podľa vzorca by už pre teba nemal byť problém.

Ž: *Napíšem si najskôr vzorec na* **výpočet koreňov** *kvadratickej rovnice.*

$$\boxed{y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

Ž: *Dosadím číselné hodnoty.*

$$\boxed{y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\left(2+2\sqrt{3}\right) \pm \sqrt{\left(2-2\sqrt{3}\right)^2}}{2 \cdot 4}}$$

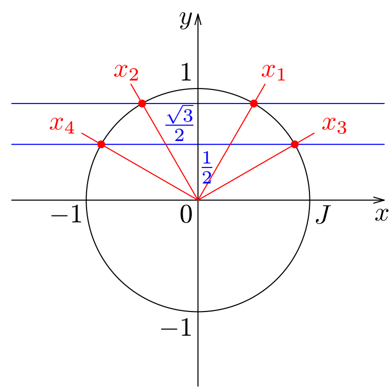
Ž: *Odmocnina a mocnina sa zrušia. Zostane číselný výraz v základe mocniny, ktorá je pod odmocninou.*

U: Pozor! Základ mocniny, teda číselný výraz $2 - 2\sqrt{3}$ je záporné číslo. Vieme, že druhá odmocnina má byť kladné číslo. Platí $\sqrt{x^2} = |x|$. V našom prípade druhá odmocnina z druhej mocniny číselného výrazu $2 - 2\sqrt{3}$ bude výraz $2\sqrt{3} - 2$. Pokračuj vo výpočtoch, ale rozdeľ ich na dva prípady.

Ž: *V prvom riadku bude výpočet pre znamienko plus pred diskriminantom v čitateli zlomku, v druhom pre znamienko mínus. V oboch prípadoch dávajú niektoré členy dohromady nulu a zvyšné členy v čitateli po vykrátení s menovateľom dajú konečné výsledky* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *a* $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= \frac{\left(2+2\sqrt{3}\right) + \sqrt{\left(2-2\sqrt{3}\right)^2}}{2 \cdot 4} = \frac{2+2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}-2\right)}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_2 &= \frac{\left(2+2\sqrt{3}\right) - \sqrt{\left(2-2\sqrt{3}\right)^2}}{2 \cdot 4} = \frac{2+2\sqrt{3}-\left(2\sqrt{3}-2\right)}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}}$$

U: Teraz potrebujeme vyriešiť ***dve jednoduché goniometrické rovnice*** $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ***a*** $\sin x = \frac{1}{2}$. Ich riešením prejdeme od hodnôt substitučnej neznámej y k hodnotám neznámej x v zadanej rovnici. Obe majú dve základné hodnoty riešenia zodpovedajúce bodom jednotkovej kružnice v I. a v II. kvadrante. To preto, lebo funkcia sínus priraďuje reálnym číslam y-ovú súradnicu takýchto bodov. Tá je kladná práve v týchto dvoch kvadrantoch.



Ž: *Nebude problém to vyriešiť. Obe čísla určujú význačné hodnoty argumentu. Sínus je rovný číslu* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *pre* x *rovné číslu* $\frac{\pi}{3}$*. Hodnotu* $\frac{1}{2}$ *nadobúda pre* x *rovné* $\frac{\pi}{6}$*. Hodnoty zodpovedajúce bodom v II. kvadrante určím odčítaním týchto číselných hodnôt od čísla* π*. Preto platí:*

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

$$x_4 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

U: Na určenie všetkých riešení v množine reálnych čísel zohľadníme ***periodickosť*** funkcie sínus. K týmto 4 základným hodnotám pripočítame celočíselné násobky čísla 2π. To je najmenšia perióda funkcie sínus. Riešením zadanej rovnice máme uvedené v rámčeku.

$$\boxed{\mathcal{K} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Príklad 7: *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu:* $12\sin^4 x + \sin^2 x - 1 = 0$.

U: Aby sme zjednodušili zápis rovnice a dostali tak zápis rovnice nám známej, zavedieme substitúciu. Výraz $\sin^2 x$ ***nahradíme premennou*** u. Pokús sa vyjadriť výraz $\sin^4 x$ pomocou premennej u.

Ž: *Štvrtá mocnina sa dá zapísať ako druhá mocnina, pričom základ bude tiež druhá mocnina. Preto výraz* $\sin^4 x$ *môžeme nahradiť výrazom* u^2.

$$\boxed{\sin^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2 = u^2}$$

U: Substitúciou dostávame kvadratickú rovnicu s neznámou u.

$$12\sin^4 x + \sin^2 x - 1 = 0,$$
$$\sin^2 x = u,$$
$$12u^2 + u - 1 = 0.$$

U: Najspoľahlivejšou metódou na určenie jej koreňov bude použiť vzorec na výpočet koreňov. Urč preto koeficienty kvadratickej rovnice.

Ž: *Koeficient kvadratického člena a je rovný číslu* 12. *Lineárny koeficient b má hodnotu* 1 *a absolútny člen* $c = -1$.

U: Vypočítaj diskriminant kvadratickej rovnice.

Ž: *Zabudol som ako sa počíta. Mohli by ste mi to pripomenúť?*

U: Diskriminant sa vypočíta podľa vzorca $D = b^2 - 4ac$. Dosaď číselné hodnoty.

Ž: *Po dosadení čísel umocním a vynásobím čísla. Nakoniec sčítam dve čísla. Diskriminant je číslo* 49.

$$\boxed{D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-1) = 1 + 48 = 49}$$

U: Korene kvadratickej rovnice vypočítaš podľa vzorca $u_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Diskriminant máš vypočítaný, koeficienty a a b poznáš. Dosaď tieto známe čísla a urči hodnoty koreňov. Výpočet urob zvlášť pre prvý a zvlášť pre druhý koreň.

Ž: *Za diskriminant dosadím číslo* 49, *za koeficient a číslo* 12 *a* $b = 1$. *Druhá odmocnina z čísla* 49 *je číslo* 7. *Sčítam čísla v čitateli a nakoniec vykrátim s číslom v menovateli. Dostal som výsledky* $\dfrac{1}{4}$ *a* $-\dfrac{1}{3}$.

$$u_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2 \cdot 12} = \frac{-1 + 7}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$u_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \cdot 12} = \frac{-1 - 7}{24} = \frac{-8}{24} = -\frac{1}{3}$$

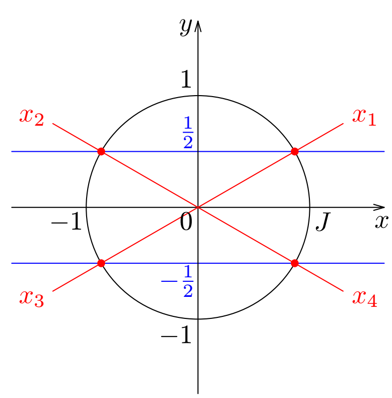
U: Prechod od substitučnej neznámej u k neznámej x je daný vzťahom $\sin^2 x = u$. Pre neznámu u sme dostali dve hodnoty riešenia. To znamená riešiť dve rovnice pre neznámu x: $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ a $\sin^2 x = -\frac{1}{3}$. Riešenie jednej z rovníc bude jednoduchšie.

Ž: *Riešenie druhej rovnice* $\sin^2 x = -\frac{1}{3}$ *bude jednoduchšie. Druhá mocnina hodnôt funkcie sínus sú vždy čísla väčšie alebo rovné nule. Nikdy to nebudú záporné čísla. Preto neexistuje reálne číslo* x*, pre ktoré by ľavá strana mohla byť rovná pravej, čiže rovná číslu* $-\frac{1}{3}$.

U: Správne. Riešením druhej rovnice je teda ***prázdna množina***. Z prvej rovnice $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ získame odmocnením výrazov na oboch stranách rovnice ďalšie dve rovnice. Pozor! Nezabudni, že $\sqrt{y^2} = |y|$. Práve to využijeme pri spomínanej úprave rovnice.

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{4}, \\ |\sin x| &= \sqrt{\frac{1}{4}}, \\ \sin x &= \pm\frac{1}{2}. \end{aligned}}$$

Ž: *Tieto rovnice sú našťastie už jednoduché goniometrické rovnice. Na určenie hodnoty neznámej* x *však budem potrebovať kalkulačku. Celú situáciu si znázorním na jednotkovej kružnici. Sínus predstavuje* y*-ovú súradnicu bodov na jednotkovej kružnici. Pre číslo* $\frac{1}{2}$ *budú tieto body v I. a v II. kvadrante. Pre hodnotu* $-\frac{1}{2}$ *sa dostaneme do III. a do IV. kvadrantu.*



U: Hodnota neznámej x zodpovedajúca bodu jednotkovej kružnice v I. kvadrante je $x_1 = \frac{\pi}{6}$. Verím, že dopočítať zvyšné riešenia nebude pre teba problém.

Ž: *Riešenie zodpovedajúce II. kvadrantu určím, ak od čísla π odrátam hodnotu x_1. V III. kvadrante urobím to isté, ale s operáciou sčítania. Riešenie vo IV. kvadrante vypočítam, ak od čísla 2π odrátam hodnotu x_1.*

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= \pi - x_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi, \\ x_3 &= \pi + x_1 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi, \\ x_4 &= 2\pi - x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi. \end{aligned}}$$

U: Dostali sme sa na koniec riešenia rovnice. K základným riešeniam, ktoré sme určili, je treba pripočítať celočíselné násobky čísla 2π. Získame tak všetky riešenia v množine reálnych čísel, ktoré máme uvedené v rámčeku.

$$\boxed{\mathcal{K} = \{x_1 + 2k\pi;\ x_2 + 2k\pi;\ x_3 + 2k\pi;\ x_4 + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}}$$

Príklad 8: *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu:* $\cos 3x = \sin 2x \cdot \cos 3x$.

Ž: *Zápis rovnice ma navádza, aby som* **vydelil** *obe strany rovnice* **výrazom** $\cos 3x$.

U: Je to jeden zo spôsobov riešenia tejto rovnice. Má však isté úskalia. Môžeš deliť výrazom?

Ž: *Tuším, čo chcete naznačiť. Výraz by mohol mať hodnotu rovnú nule. Nulou sa nedá deliť.*

U: Aby sme to zvládli tebou navrhnutou metódou, rozdelíme ďalšie riešenie na ***dva prípady***. Jednoduchší bude pre teba prípad, kedy výraz $\cos 3x$, ktorým chceš deliť výrazy na oboch stranách rovnice, bude mať ***nenulovú hodnotu***. Vtedy môžeš urobiť navrhnutú úpravu rovnice.

$$\boxed{\text{1. prípad: } \cos 3x \neq 0}$$

Ž: *V tomto prípade sa kosínusy vykrátia a dostanem rovnicu iba s goniometrickou funkciou sínus.*

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 3x &= \sin 2x \cdot \cos 3x, \\ 1 &= \sin 2x. \end{aligned}}$$

U: Ak výraz $2x$ nahradíš premennou u, dostaneš jednoduchú goniometrickú rovnicu $\sin u = 1$. Jej riešenie zvládneš aj bez jednotkovej kružnice, či grafu.

Ž: *Funkcia sínus nadobúda hodnotu 1 na základnom intervale iba raz. Vtedy neznáma u je rovná číslu $\frac{\pi}{2}$. Aby som dostal všetky riešenia, pripočítam k základnému riešeniu celočíselné násobky čísla 2π.*

$$\boxed{u = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

U: Dopočítajme riešenie pre neznámu x. Pripomínam, že sme výraz $2x$ nahradili v substitúcii premennou u.

Ž: *Hodnoty neznámej x* **budú dvakrát menšie** *ako pre neznámu u. Teda $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, kde k je celé číslo.*

U: Nezabudnime na ***podmienku***. Tento prípad sme vyriešili iba pre také hodnoty neznámej x, pre ktoré platí $\cos 3x \neq 0$. Podmienku môžeme vyriešiť substitúciou výrazu $3x$. Ukážem ti rýchlejší spôsob, bez substitúcie. Hodnoty funkcie kosínus majú byť rôzne od nuly. To znamená, že argument tejto funkcie musí byť rôzny od nepárnych násobkov čísla $\frac{\pi}{2}$. Ale argumentom funkcie je výraz $3x$. Preto platí

$$3x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{6}.$$

U: Hodnoty neznámej x, ktoré sme dostali v 1. prípade riešenia rovnice, tejto podmienke vyhovujú. Vyriešime druhý prípad, ak $\cos 3x = 0$.

$$\boxed{\text{2. prípad: } \cos 3x = 0}$$

Ž: *Pochopil som, že takým výrazom nemôžem deliť obe strany rovnice.*

U: Pozri sa preto ešte raz na rovnicu cez výraz $\cos 3x$, ktorý je rovný nule.

Ž: *Jasné. Ľavá aj pravá strana rovnice budú mať nulovú hodnotu. Na ľavej strane je výraz* $\cos 3x$ *a ten je rovný nule. Na pravej strane je súčin dvoch výrazov* $\sin 2x \cdot \cos 3x$*, z ktorých druhý výraz je rovný nule. Preto aj súčin je rovný nule. Dostali sme* $0 = 0$*. To platí vždy.*

U: Áno. Platí vždy, ak je splnená podmienka $\cos 3x = 0$. Jej riešenie bude analogické ako riešenie podmienky v 1. prípade.

Ž: *Pri podmienke sme určené hodnoty* x *vylúčili, teraz ich zoberieme za korene. Teda* $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{6}$*, kde* k *je celé číslo.*

U: Oba prípady dávajú celkové riešenie rovnice:

$$\mathcal{K} = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi;\ (2k+1)\frac{\pi}{6};\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

U: Riešenie rovnice by sa trochu zjednodušilo, ak by sme všetky výrazy dali na ***jednu stranu rovnice***. Sleduj rámček. Z oboch členov na ľavej strane by sme vybrali pred zátvorku výraz $\cos 3x$.

$$\boxed{\begin{gathered} \cos 3x = \sin 2x \cdot \cos 3x, \\[1em] \cos 3x - \sin 2x \cdot \cos 3x = 0, \\[1em] \cos 3x \cdot (1 - \sin 2x) = 0. \end{gathered}}$$

U: Na ľavej strane je ***súčin dvoch výrazov***. Kedy sa tento súčin rovná nule?

Ž: *Ak aspoň jeden z výrazov je rovný nule. Teda* $\cos 3x = 0$ *alebo* $1 - \sin 2x = 0$*. Ale to sú rovnice, ktoré sme riešili v našich dvoch prípadoch.*

U: Samozrejme. Pri tomto spôsobe riešenia však nemusíme riešiť žiadne iné podmienky.