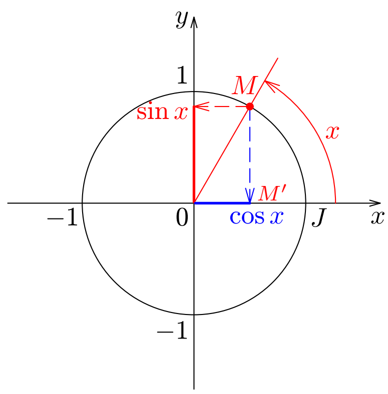
Definícia funkcií tangens a kotangens

RNDr. Marián Macko

U: Pripomeňme si definície funkcií sínus a kosínus na jednotkovej kružnici. Načrtni situáciu na jednotkovej kružnici pre argument $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ a vyznač hodnoty $\sin x$ a $\cos x$.



Ž: *Funkcie súvisia so súradnicami bodu M, ktorý prislúcha číslu x, pričom:*

$$\sin x = y_M, \qquad \cos x = x_M.$$

U: Dané hodnoty v tomto prípade vyjadrujú aj dĺžky odvesien v pravouhlom trojuholníku $OM'M$.

Ž: *Platí:*

$$|OM'| = \cos x, \qquad |MM'| = \sin x.$$

U: Nič nám teda nebráni, aby sme pre ***ostrý uhol veľkosti x radiánov v pravouhlom trojuholníku*** $OM'M$ vyjadrili zvyšné dve goniometrické funkcie: ***tangens a kotangens***.

Ž: *Tangens je pomer protiľahlej ku priľahlej odvesne a kotangens naopak.*

U: Zapíšeme to vzťahmi:

$$\mathrm{tg} x = \frac{|M'M|}{|OM'|} = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\mathrm{cotg} x = \frac{|M'O|}{|MM'|} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Naše úvahy boli zamerané na I. kvadrant, pretože v ďalších kvadrantoch môžu byť sínus alebo kosínus záporné. Nevyjadrovali by dĺžku úsečiek. Funkcie sínus a kosínus sú definované na množine reálnych čísel a môžu mať kladné, aj záporné hodnoty. Kladné a záporné hodnoty môžu mať aj funkcie tangens a kotangens, ak nami získané vzťahy zoberieme za ich definície.

Definícia: ***Funkciou tangens*** nazývame funkciu určenú predpisom

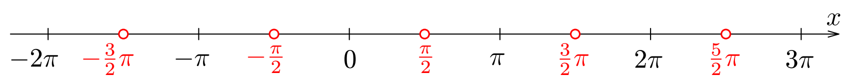
$$y = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Definícia: ***Funkciou kotangens*** nazývame funkciu určenú predpisom

$$y = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

U: Zlomky v predpisoch týchto funkcií zapríčiňujú, že do definičného oboru funkcií ***tangens a kotangens*** nebudú patriť všetky reálne čísla.

Ž: *Takže treba určiť podmienky. Skúsim to. Pre funkciu tangens je definičným oborom množina všetkých reálnych čísel x, pre ktoré má zmysel výraz $\frac{\sin x}{\cos x}$. To je vtedy, keď menovateľ je rôzny od nuly. Teda $\cos x \neq 0$. V intervale $\langle 0;\ 2\pi)$ sa hodnota $\cos x$ rovná nule pre $x_1 = \frac{\pi}{2}$ a $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.*

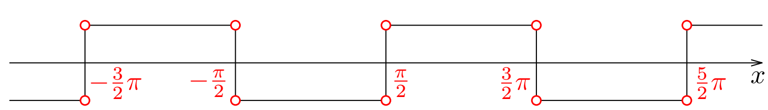


U: Sú to všetky ***nepárne násobky čísla*** $\frac{\pi}{2}$.

Definičným oborom funkcie tangens je množina všetkých ***reálnych čísel*** x, ktoré ***sú rôzne od čísel v tvare*** $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde k je celé číslo.

Ž: *Ako to zapíšeme?*

U: Menej používaný spôsob zápisu v stredoškolskej matematike je pomocou zjednotenia nekonečného počtu otvorených intervalov v tvare $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, kde k je ľubovoľné celé číslo.



U: Túto množinu zapisujeme tak, ako to vidíš v rámčeku.

$$\boxed{\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right),}$$

U: pričom symbol $\bigcup$ označuje zjednotenie príslušných intervalov.

Ž: *Dosť zložitý zápis.*

U: Nič sa nestane, ak ho nebudeš používať, ale zapíšeš symbolmi to, čo sme o ***definičnom obore funkcie tangens*** povedali slovne. Teda

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ž: *Tomuto zápisu viac rozumiem, lebo mínus znamená, že z množiny reálnych čísel vylúčime čísla uvedené v druhej množine.*

U: Máš pravdu. Je to operácia rozdielu dvoch množín.

U: Teraz urči analogicky definičný obor funkcie kotangens.

Ž: *Podmienka je* $\sin x \neq 0$*, lebo v menovateli je sínus. V intervale* $\langle 0;\ 2\pi)$ *sa sínus rovná nule pre* $x_1 = 0$ *a* $x_2 = \pi$*.*

U: Všeobecne $k\pi$, teda ***celočíselné násobky čísla*** π. Povedz slovne, čo je definičným oborom funkcie kotangens.

Ž: **Definičným oborom funkcie kotangens** *je množina všetkých* **reálnych čísel, okrem celočíselných násobkov čísla** π**.**

U: Zapisujeme v tvare:

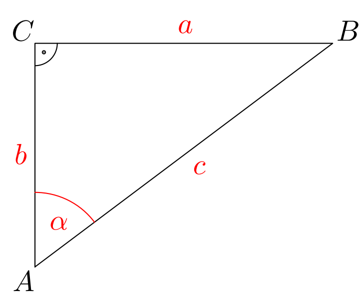
$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ž: *Zrejme to treba vedieť.*

U: Áno. Ak poznáš definície a vieš nulové body funkcií sínus a kosínus, nebude to problém.

Ž: *Pri sínus a kosínus sme ukázali, že ich definície pre* $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ *v pravouhlom trojuholníku zodpovedajú definíciám na jednotkovej kružnici. Platí to isté pre tangens a kotangens?*

U: Ukážeme si to. Zapíš všetky goniometrické funkcie pre uhol α v pravouhlom trojuholníku ABC.



Ž: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$.

U: Dobre. Ukážeme, že ***tangens sa dá zapísať ako podiel sínus a kosínus***. Začneme definíciou v pravouhlom trojuholníku. Zatiaľ vieme: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Zlomok sa nezmení, ak čitateľa, aj menovateľa predelíme kladným číslom c, čo je dĺžka prepony: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$.

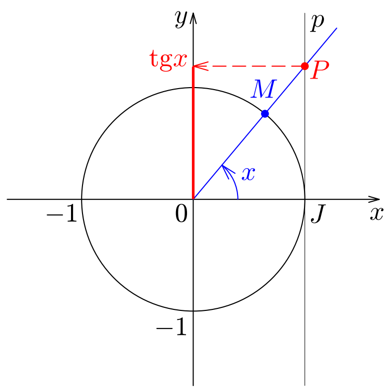
Ž: *Už to vidím. V čitateli zloženého zlomku je $\frac{a}{c}$, čo je sínus a v menovateli je kosínus.*

U: Prepíšeme na tvar : $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, a teda obe definície sú rovnocenné.

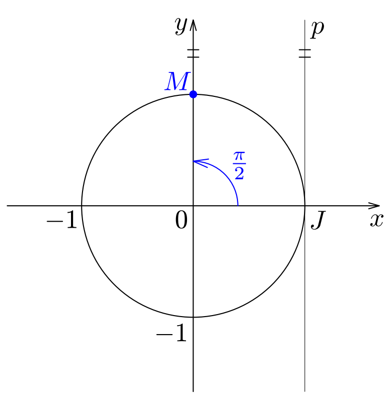
Ž: *Vo funkciách tangens a kotangens vidím trochu problém. Sú vyjadrené cez podiel funkcií sínus a kosínus. Musím určiť dve hodnoty, a potom ich ešte vydeliť. Tak dostanem výslednú hodnotu. Nedali by sa určiť priamo, tak ako sínus a kosínus?*

U: Je pravda, že ***definícia funkcií tangens a kotangens*** je v algebrickom tvare, ale obe funkcie ***možno interpretovať aj geometricky*** pomocou jednotkovej kružnice. To vyrieši tvoj problém.

Reálnemu číslu x priradíme na jednotkovej kružnici známym spôsobom bod M. Zostrojíme dotyčnicu p ku kružnici v bode $J\,[1;\ 0]$. Priesečník dotyčnice a polpriamky OM je bod P. ***y-ová súradnica bodu P je*** $\mathrm{tg}x$.



U: Pokús sa na základe geometrickej interpretácie na jednotkovej kružnici určiť $\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}$.



Ž: *To sa nedá.*

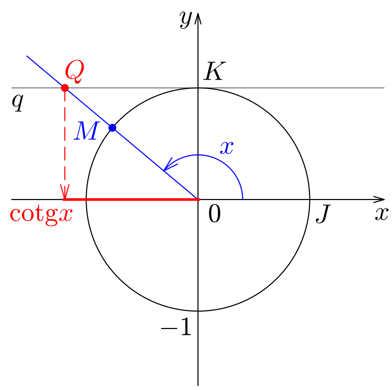
U: Prečo?

Ž: *Lebo dotyčnica p a priamka OM sú rovnobežné.*

U: Nemajú spoločný bod P, ktorého y-ová súradnica má vyjadrovať $\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}$. Tým si len potvrdil to, čo vieme z úvodu, že číslo $\frac{\pi}{2}$ nepatrí do definičného oboru funkcie tangens.

Ž: *Ako to bude s funkciou kotangens?*

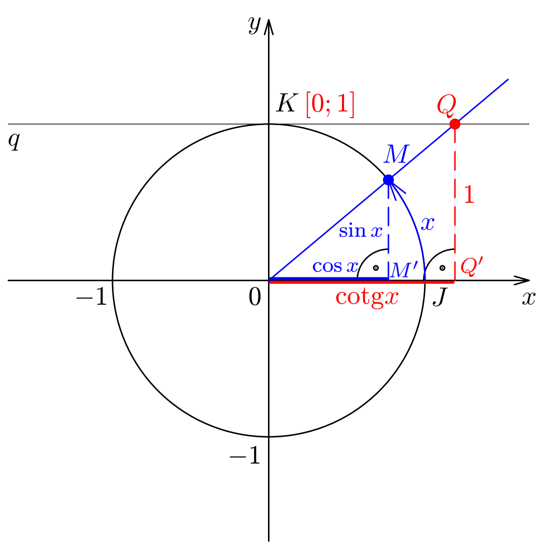
U: Teraz zostrojíme dotyčnicu q k jednotkovej kružnici v bode $K[0;1]$. ***x-ová súradnica bodu Q***, ktorý je ***priesečníkom*** polpriamky OM a tejto dotyčnice ***vyjadruje*** $\mathrm{cotg}x$.



Ž: *Prečo to takto funguje?*

U: Využívame iba podobosť dvoch trojuholníkov. Trojuholník OMM' je pravouhlý s jedným vnútorným uhlom x. Aj trojuholník OQQ' je pravouhlý s jedným vnútorným uhlom x.

Ž: *Uhol x je spoločný obom trojuholníkom.*



U: Áno. V týchto trojuholníkoch poznáme aj dĺžky odvesien. V trojuholníku OMM' majú dĺžky $\sin x$; $\cos x$ a v trojuholníku OQQ' dĺžky odvesien sú 1 a $\mathrm{cotg}x$. Stačí ich dať do pomeru vzhľadom na podobnosť.

Ž: $\dfrac{\mathrm{cotg}x}{1} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

U: Teda: $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

U: Pozrime sa ešte, ako je to s ***kladnosťou a zápornosťou hodnôt tangens a kotangens*** na intervaloch $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right)$; $\left(\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$; $\left(\dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

Stačí, ak si pripomenieme, aké hodnoty nadobúdajú funkcie sínus a kosínus v týchto kvadrantoch a uvedomíme si, že podiel dvoch kladných alebo dvoch záporných čísel je číslo kladné, podiel kladného a záporného čísla je číslo záporné. Pokús sa teraz zdôvodniť, že tangens je v druhom kvadrante záporný.

Ž: *Sínus je v druhom kvadrante kladný, kosínus záporný. Tangens je ich podiel, preto je záporný.*

U: ***Kladnosť a zápornosť hodnôt tangens a kotangens*** vo všetkých 4 kvadrantoch máš uvedenú v nasledujúcej tabuľke.

x	$\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$	$\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\operatorname{tg} x$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\operatorname{cotg} x$	$+$	$-$	$+$	$-$

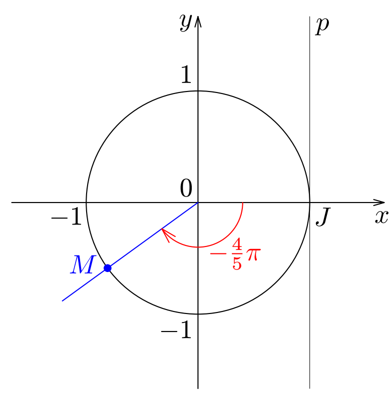
Príklad 1: *Rozhodnite, aké znamienko má funkcia $f: y = \mathrm{tg}x$ pre $x = -\dfrac{4\pi}{5}$.*

U: Tak, ako v prípade funkcií sínus a kosínus aj tu si pomôžeme geometrickou interpretáciou funkcie tangens na jednotkovej kružnici.

Ž: *To potrebujem dotyčnicu k jednotkovej kružnici v bode $J[1;0]$.*

U: Máš pravdu. Pri tangense nepriraďujeme reálnemu číslu bod na jednotkovej kružnici, ale prostredníctvom neho bod na spomenutej dotyčnici. Jeho y-ová súradnica určuje $\mathrm{tg}\left(-\dfrac{4\pi}{5}\right)$. Potrebuješ vedieť, ktorý bod v priradení zodpovedá reálnemu číslu $-\dfrac{4\pi}{5}$.

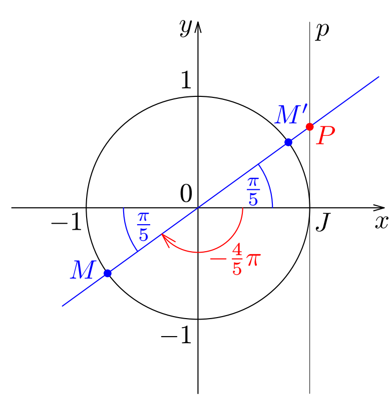
Ž: *$\dfrac{4\pi}{5}$ je menej ako π, takže jemu odpovedajúci bod na jednotkovej kružnici je v II. kvadrante, ale pri mínus treba postupovať opačným smerom, čiže číslu $-\dfrac{4\pi}{5}$ zodpovedá bod M v* **III. kvadrante**.



U: $\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, preto stačí, ak si uvedomíš, aké sú hodnoty sínus a kosínus v III. kvadrante z hľadiska kladnosti a zápornosti.

Ž: *Záporné.*

U: ***Dve záporné*** čísla dajú ***pri delení kladné*** číslo. Situácia je rovnaká, ako keď sú hodnoty oboch funkcií kladné, čo zodpovedá I. kvadrantu.



U: Hľadaný bod P, ktorého y-ová súradnica vyjadruje $\mathrm{tg}\left(-\frac{4\pi}{5}\right)$ nájdem ako priesečník dotyčnice p a priamky OM.

Ž: *Jeho y-ová súradnica je kladné číslo.*

U: Riešením úlohy je: $\mathrm{tg}\left(-\frac{4\pi}{5}\right) > 0$.

Úloha : *Rozhodnite, aké znamienko má funkcia* $f : y = \mathrm{tg} x$ *pre* $x = \frac{13\pi}{3}$.

Výsledok: $\mathrm{tg}\frac{13\pi}{3} > 0$

Príklad 2: *Určte, či* $\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x$ *a* $\mathrm{tg}x - \mathrm{cotg}x$ *je číslo kladné, záporné, alebo nula, ak:*

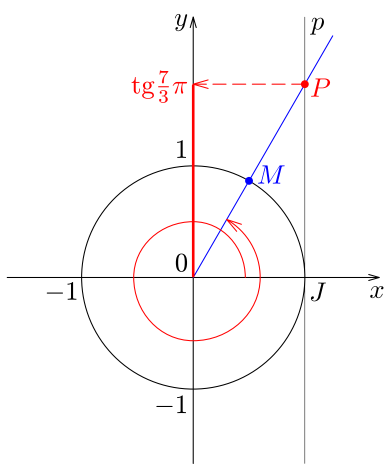
$$x = \frac{7\pi}{3}$$

Ž: *Určím si najskôr, či* $\mathrm{tg}\dfrac{7\pi}{3}$ *je kladné, alebo záporné číslo, a potom urobím to isté pre* $\mathrm{cotg}\dfrac{7\pi}{3}$.

U: Je to jeden z možných spôsobov riešenia. Pokračuj.

Ž: $\dfrac{7\pi}{3} = \left(\dfrac{6\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\pi + \dfrac{\pi}{3}$

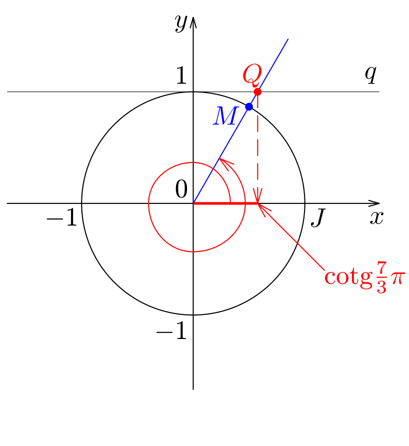
Tomuto číslu zodpovedá bod na jednotkovej kružnici v I. kvadrante. Tu je to ľahké. Zostrojím si dotyčnicu p *v bode* $J\,[1;0]$, *ktorú pretne priamka* OM *v bode* P *a jeho* y*-ová súradnica je* $\mathrm{tg}\dfrac{7\pi}{3}$.



U: Zistil si, že $\mathrm{tg}\dfrac{7\pi}{3} > 0$. Dokonči pre kotangens.

Ž: *Bude ma zaujímať dotyčnica* q *v bode* $K\,[0;1]$ *a kotangens bude teraz* x*-ová súradnica bodu* Q.

U: Iba pripomínam, že Q hľadáme ako priesečník dotyčnice q s priamkou OM.



Ž: *Aj* $\operatorname{cotg}\frac{7\pi}{3} > 0$, *takže* $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3} \cdot \cot\frac{7\pi}{3}$ *je tiež* **kladné** *číslo.*

U: Úlohu si mohol vyriešiť aj inak. Pokús sa využiť definíciu funkcií tangens a kotangens.

Ž: $\operatorname{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ *a* $\operatorname{cotg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

U: Potom $\operatorname{tg}x \cdot \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$, lebo výrazy $\sin x$ a $\cos x$ sa vykrátia. Neplatí to pre všetky reálne čísla, ale pre argument $\frac{7\pi}{3}$ sú sínus a kosínus rôzne od nuly, ako si ukázal na obrázku. Teda aj $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3} \cdot \cot\frac{7\pi}{3} = 1$ a to je ***kladné*** číslo.

Ž: *Dobrá finta!*

U: Dorieš úlohu ešte pre výraz $\operatorname{tg}x - \operatorname{cotg}x$.

Ž: *Skúsim vašu fintu. Rozdiel zlomkov upravím na spoločného menovateľa. To je výraz* $\cos x \cdot \sin x$, *tak ako to vidno v rámčeku.*

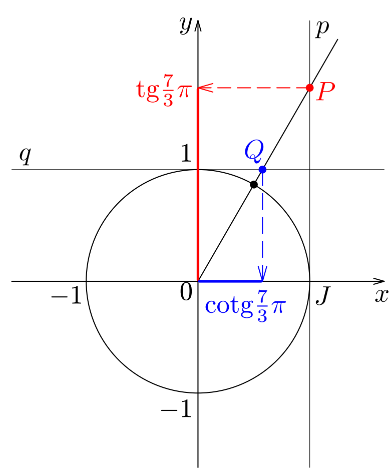
$$\boxed{\operatorname{tg}x - \operatorname{cotg}x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x}}$$

Ž: *Čo ďalej?*

U: Dá sa to doriešiť, ale potrebuješ poznať rôzne vzťahy medzi hodnotami goniometrických funkcií. V tomto prípade stačí pokračovať v tvojom spôsobe riešenia.

Ž: *Ako mám určiť, či výsledok je kladný, záporný alebo nula, ak obe čísla sú kladné? Ich rozdiel môže byť kladný, záporný, alebo nula, keď budú rovnaké.*

U: Veď o to ide. Máš určiť, či sú rovnaké, alebo ktoré z nich je väčšie. Porovnaj hodnoty s jednotkou, ktorá je polomerom kružnice.



U: Z obrázku vidno, že $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3} > \operatorname{cotg}\frac{7\pi}{3}$

Ž: *Potom je ich rozdiel kladný.*

U: Riešením úlohy je: súčin aj rozdiel hodnôt zadaných výrazov je kladný.

Úloha : *Určte, či* $\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x$ *a* $\mathrm{tg}x - \mathrm{cotg}x$ *je číslo kladné, záporné, alebo nula, ak:* $x = -\dfrac{13\pi}{4}$.

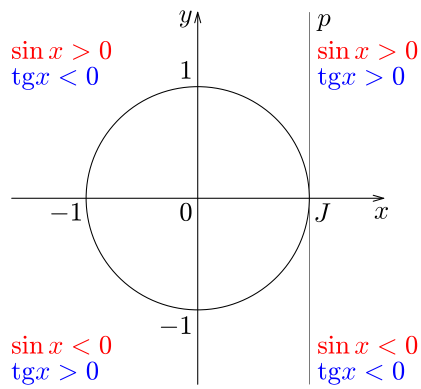
Výsledok: $\mathrm{tg}\left(-\dfrac{13\pi}{4}\right) \cdot \mathrm{cotg}\left(-\dfrac{13\pi}{4}\right) > 0;\ \mathrm{tg}\left(-\dfrac{13\pi}{4}\right) - \mathrm{cotg}\left(-\dfrac{13\pi}{4}\right) = 0$

Príklad 3: *Určte, do ktorého z intervalov* $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right);\ \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right);\ \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right);\ \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$ *patrí* x*, ak*

a) $\mathrm{tg}x > 0$ *a* $\sin x < 0$

b) $\mathrm{cotg}x < 0$ *a* $\cos x > 0$.

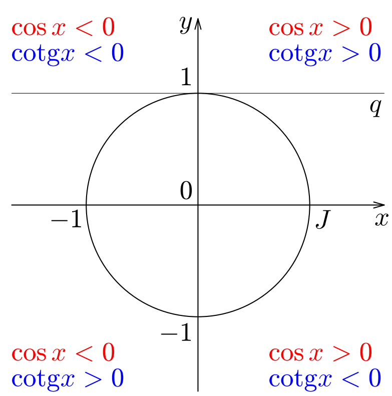
U: V úlohe a) sa stačí zorientovať na jednotkovej kružnici.



Ž: *Tangens je kladný v I. a v* **III.** *kvadrante, sínus je záporný v* **III.** *a vo IV. kvadrante. Obe podmienky platia súčasne práve vtedy, ak x patrí do III. kvadrantu.*

U: Riešením úlohy je $x \in \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ž: *V riešení úlohy b) t. j.* $\mathrm{cotg}x < 0$ *a* $\cos x > 0$ *si opäť pomôžem jednotkovou kružnicou.*



Ž: *Kotangens je záporný v II. a vo* **IV.** *kvadrante, kosínus je kladný v I. a vo* **IV.** *kvadrante. Riešením je IV. kvadrant.*

U: Výsledok úlohy b) je: $x \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

Úloha : *Určte, do ktorého z intervalov* $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right);\ \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right);\ \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right);\ \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$ *patrí* x*, ak* $\mathrm{tg}x = -1$ *a* $\sin x > 0$.

Výsledok: $x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$

Príklad 4: *Vypočítajte hodnotu výrazu* $\dfrac{\sin x - 3\cos x}{2\sin x + 5\cos x}$, *ak* $\mathrm{cotg} x = -\dfrac{2}{3}$.

Ž: *Podľa zadania sa* $\mathrm{cotg} x = -\dfrac{2}{3}$ *a podľa definície viem, že* $\mathrm{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. *Potom* $\cos x = -2$ *a* $\sin x = 3$, *alebo* $\cos x = 2$ *a* $\sin x = -3$.

U: Zabudol si, že hodnoty týchto funkcií nemôžu byť menšie ako -1, ani väčšie ako 1. Podľa zadanej hodnoty kotangens sú v pomere $(-2) : 3$, alebo $2 : (-3)$. Môžeš to zohľadniť tak, že $\cos x = -2m$; $\sin x = 3m$ alebo $\cos x = 2m$; $\sin x = -3m$, kde m je nenulové reálne číslo.
Ak tieto výrazy dosadíš do výrazu $\dfrac{\sin x - 3\cos x}{2\sin x + 5\cos x}$, dopracuješ sa k výsledku.

Ž: *Dosadím najskôr:* $\cos x = -2m$; $\sin x = 3m$. *Vynásobím, v čitateli sčítam a v menovateli odčítam. Nakoniec vykrátim parameter* m.

$$\boxed{\frac{\sin x - 3\cos x}{2\sin x + 5\cos x} = \frac{3m - 3(-2m)}{2 \cdot 3m + 5(-2m)} = \frac{3m + 6m}{6m - 10m} = \frac{9m}{-4m} = -\frac{9}{4}}$$

U: Urob taký istý výpočet pre druhý prípad. Čo myslíš, ako sa to zmení?

Ž: *Netuším, zmení sa znamienko? Radšej vypočítam. Dosadím* $\cos x = 2m$; $\sin x = -3m$. *Vynásobím, v čitateli odčítam a v menovateli sčítam. Nakoniec vykrátim parameter* m.

$$\boxed{\frac{\sin x - 3\cos x}{2\sin x + 5\cos x} = \frac{-3m - 3 \cdot (2m)}{2 \cdot (-3m) + 5 \cdot (2m)} = \frac{-3m - 6m}{-6m + 10m} = \frac{-9m}{4m} = -\frac{9}{4}}$$

Dostal som ten istý výsledok.

U: Samozrejme, pretože hodnoty môžu byť kladné, aj záporné a tieto dva prípady sa líšia iba znamienkami pre sínus a kosínus. Úloha sa dá vyriešiť viacerými spôsobmi. Ukážeme si ešte jeden z možných spôsobov.

U: Budeme sa snažiť dostať do výrazu $\dfrac{\sin x - 3\cos x}{2\sin x + 5\cos x}$ funkciu ***kotangens***. Ako vieme, $\mathrm{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, preto ***predelíme čitateľa aj menovateľa*** zlomku ***výrazom*** $\sin x$.

$$\boxed{\frac{\sin x - 3\cos x}{2\sin x + 5\cos x} = \frac{\dfrac{\sin x - 3\cos x}{\sin x}}{\dfrac{2\sin x + 5\cos x}{\sin x}}}$$

Ž: *Nezmeníme hodnotu zlomku?*

U: Vydeliť čitateľa aj menovateľa tým istým číslom rôznym od nuly znamená zlomok krátiť. Napríklad: $\dfrac{6}{4} = \dfrac{6:2}{4:2}$. Dostaneme iný tvar zlomku, ktorý má však tú istú hodnotu. Vyjadruje to isté číslo.

Ž: *A odkiaľ viete, že sínus nie je nula?*

U: To vyplýva zo zadania úlohy: $\mathrm{cotg}x = -\frac{2}{3}$. Keďže $\mathrm{cotg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$ a hodnota kotangensu je daná, nemôže byť sínus rovný nule. Nula nemôže byť v menovateli. Kotangens by neexistoval.

Ž: *Pochopil som, pokračujte.*

U: V čitateli aj menovateli zloženého zlomku je zlomok, ktorý rozdelíme na dva zlomky. Sleduj rámček.

$$\boxed{\frac{\dfrac{\sin x - 3\cos x}{\sin x}}{\dfrac{2\sin x + 5\cos x}{\sin x}} = \frac{\dfrac{\sin x}{\sin x} - \dfrac{3\cos x}{\sin x}}{\dfrac{2\sin x}{\sin x} - \dfrac{5\cos x}{\sin x}}}$$

Pokračuj ďalej.

Ž: *Sínusy sa vykrátia a* $\frac{\cos x}{\sin x}$ **je** $\mathrm{cotg}x$*, čo je zadané. Za* $\mathrm{cotg}x$ *dosadím číslo* $-\frac{2}{3}$ *a ďalej upravujem číselný výraz.*

$$\frac{\dfrac{\sin x}{\sin x} - \dfrac{3\cos x}{\sin x}}{\dfrac{2\sin x}{\sin x} - \dfrac{5\cos x}{\sin x}} = \frac{1 - 3\mathrm{cotg}x}{2 + 5\mathrm{cotg}x} = \frac{1 - 3 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right)}{2 + 5 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right)} =$$

$$= \frac{1+2}{2 - \dfrac{10}{3}} = \frac{3}{\dfrac{6-10}{3}} = \frac{3}{\dfrac{-4}{3}} = -\frac{9}{4}$$

Ž: *Dostali sme to isté.*

U: Hodnota výrazu je $-\frac{9}{4}$.

Príklad 5: *Rozhodnite o pravdivosti výroku:* $\exists x \in \mathbb{R} : \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x = 0$

Ž: *Ak má byť súčin rovný nule, stačí aby jeden z výrazov sa rovnal nule.*

U: Opäť je to jeden z možných spôsobov riešenia úlohy:
$\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x = 0$ práve vtedy, ak $\mathrm{tg}x = 0$ ***alebo*** $\mathrm{cotg}x = 0$.
Vyriešiť tieto dve rovnice by nemal byť problém.

Ž: $\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = 0$ *vynásobím rovnicu výrazom* $\cos x$*:*
$\sin x = 0$ *a to platí pre* $x = k\pi$*, kde* k *je celé číslo.*
Analogicky $\mathrm{cotg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = 0$ *vynásobím rovnicu výrazom* $\sin x$*:*
$\cos x = 0$*, čo platí pre* $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$*, kde* k *je celé číslo.*
Výrok platí, lebo existuje nekonečne veľa čísel x*, pre ktoré platí:* $\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x = 0$.

U: Zabudol si však, že funkcie tangens a kotangens nie sú definované pre všetky reálne čísla x.
Definičný obor funkcie ***tangens*** je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$, kde k je celé číslo. Vylučuje z riešenia čísla, ktoré si dostal pri rovnici $\mathrm{cotg}x = 0$.
Definičný obor funkcie ***kotangens*** je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{k\pi\}$, kde k je celé číslo, a ten vylučuje všetky čísla, ktoré si dostal riešením rovnice $\mathrm{tg}x = 0$.

Ž: *To znamená, že* **neexistuje** *ani jedno* **reálne číslo** x*, pre ktoré by mal platiť zadaný vzťah.*

U: Áno. Odpoveď je: ***výrok neplatí***.

Úloha : *Rozhodnite o pravdivosti výroku:* $\forall x; y \in \mathbb{R} : \mathrm{cotg}x = \mathrm{cotg}y \Rightarrow x = y$

Výsledok: výrok neplatí

Príklad 6: *Ukážte, že platí vzťah:* $\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x = 1$ *a určte množinu všetkých reálnych čísel, pre ktoré vzťah platí.*

U: Ukázať, že platí rovnosť by nemal byť problém. Stačí, ak využiješ definície funkcií tangens a kotangens.

Ž: $\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ **a** $\mathrm{cotg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. *Po dosadení dostanem:* $\dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = 1$. *Výrazy* $\sin x$ *a* $\cos x$ *sa krátia. Dostávam:* $1 = 1$.

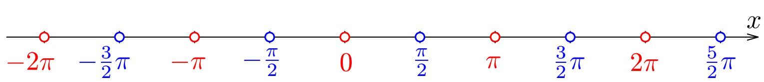
U: To je pravdivý výrok za istých ***podmienok***.

Ž: *Nie vždy?*

U: Pri úpravách si pracoval s funkciami tangens a kotangens, ktoré nie sú definované pre všetky reálne čísla. Inak povedané:
Ak sa pozrieš na svoje zápisy, použil si zlomky. V ich menovateli nesmie byť nula, čiže $\sin x \neq 0$ a $\cos x \neq 0$. Tieto dve podmienky vlastne vyjadrujú podmienky pre určenie definičných oborov funkcií tangens a kotangens. Ich určením vyriešime druhú časť úlohy.

Ž: *Aha!* $\sin x = 0$ *pre* $x = k\pi$ *a* $\cos x = 0$ *platí pre* $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, *kde* k *je celé číslo.*

U: Tieto dve vyjadrenia čísel, ktoré sme vylúčili sa dajú spojiť do jedného. Sleduj číselnú os.



Ž: *Opakujú sa s periódou* $\dfrac{\pi}{2}$.

U: Výrok platí pre všetky reálne čísla, okrem celočíselných násobkov čísla $\dfrac{\pi}{2}$.
Zapísané: $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$, kde k je celé číslo.

Príklad 7: *Vypočítajte:* $\operatorname{tg}\frac{31\pi}{6}$

U: Ak použijeme definíciu funkcie tangens, úlohu prevedieme na výpočet hodnôt funkcií sínus a kosínus.

Ž: *Viem, že* $\operatorname{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

U: V našom prípade: $\operatorname{tg}\frac{31\pi}{6} = \frac{\sin\frac{31\pi}{6}}{\cos\frac{31\pi}{6}}$. Výpočet týchto hodnôt by si mal už zvládnuť.

Ž: *Využijem, že sínus a kosínus sú periodické s* ***najmenšou periódou*** 2π*. Preto si číslo* $\frac{31\pi}{6}$ *prepíšem na tvar* $4\pi + \frac{7\pi}{6}$*. No a keďže* 4π *je dvojnásobkom najmenšej periódy, tak ho vylúčim. Potom mi stačí zistiť, do ktorého kvadrantu jednotkovej kružnice patrí uhol* $\frac{7\pi}{6}$*. Je to* **III. kvadrant**.

$$\boxed{\frac{\sin\frac{31\pi}{6}}{\cos\frac{31\pi}{6}} = \frac{\sin\frac{(24+7)\pi}{6}}{\cos\frac{(24+7)\pi}{6}} = \frac{\sin\left(4\pi+\frac{7\pi}{6}\right)}{\cos\left(4\pi+\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{\sin\frac{7\pi}{6}}{\cos\frac{7\pi}{6}} = \frac{\sin(\pi+\frac{\pi}{6})}{\cos(\pi+\frac{\pi}{6})}}$$

U: V III. kvadrante platí: $\sin x < 0$ ***a*** $\cos x < 0$.

Ž: *Keďže sú v tomto kvadrante obe funkcie záporné, tak potom* $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6}$*. A to isté platí pre kosínus. Hodnoty funkcie sínus aj kosínus pre argument* $\frac{\pi}{6}$ *poznám. Takže ich dosadím a upravím zložený zlomok. Dostala som výsledok* $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\boxed{\frac{\sin(\pi+\frac{\pi}{6})}{\cos(\pi+\frac{\pi}{6})} = \frac{-\sin\frac{\pi}{6}}{-\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\cdot 1}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

U: Túto hodnotu je potrebné ***usmerniť***.

Ž: *Čo to znamená?*

U: Odstrániť odmocninu z menovateľa. Zlomok ***rozšíriť číslom*** $\sqrt{3}$.

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Výsledkom úlohy je číslo $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Úloha : *Vypočítajte:* $\operatorname{cotg}\dfrac{17\pi}{3}$.

Výsledok: $\operatorname{cotg}\dfrac{17\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$