Definícia funkcie sínus a kosínus

RNDr. Marián Macko

U: Dnešnú podobu goniometrickým funkciám dal až v 18. storočí Leonard Euler. Skúmal ich hodnoty ako čísla, nie ako úsečky, ako sa to robilo dovtedy. Goniometrické funkcie sa totiž dlho definovali len pre ostré uhly $\alpha \in (0°;\ 90°)$ v pravouhlom trojuholníku ako pomery dĺžok dvoch jeho strán. Dĺžka úsečky ako vieme je iba kladné reálne číslo.
Euler pripustil pre hodnoty premenných goniometrických funkcií čísla kladné, ale aj záporné. Prostriedkom k tomu mu bola jednotková kružnica.

Ž: *Urobíme to tak, ako Euler, aj my?*

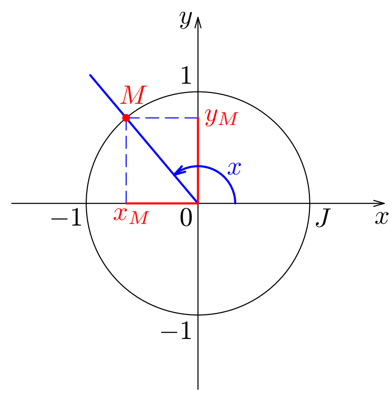
U: Áno. Pamätáš sa, čo je podstatou pojmu funkcia?

Ž: *Každému reálnemu číslu z definičného oboru určitým spôsobom priradí práve jedno reálne číslo.*

U: Z tohto dôvodu sme sa naučili v predchádzajúcej téme reálnym číslam jednoznačne priradiť body na jednotkovej kružnici.

Ž: *Ale funkcia nepriraďuje reálnemu číslu bod.*

U: To máš pravdu. Reálnemu číslu potrebujeme priradiť reálne číslo. ***Bod M*** na jednotkovej kružnici má však dve súradnice $M\,[x_M;\ y_M]$, čo sú reálne čísla.
Ak reálnemu číslu x známym spôsobom priradíme na jednotkovej kružnici bod M, ***jeho súradnice predstavujú funkčné hodnoty kosínus a sínus*** reálneho čísla x.



Ž: *To znamená, že funkcia* **sínus reálnemu číslu x priradí hodnotu určenú y-ovou súradnicou bodu M** *a funkcia* **kosínus reálnemu číslu x priradí x-ovu súradnicu bodu M**.

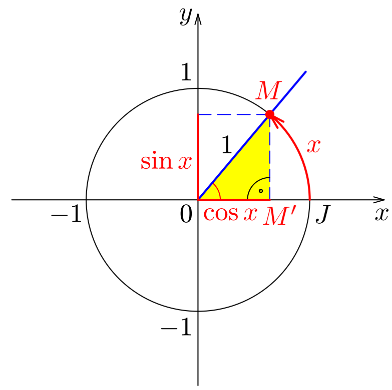
U: Presne tak. Aj pre tieto funkcie však používame obvyklé zápisy $f: y = \sin x$, $g: y = \cos x$.

Ž: *Trochu mám v tom zmätok. Prečo nestačí definovať tieto funkcie iba pre ostré uhly? Kde potrebujeme napr.* $\sin 2007°$ *?*

U: Mnohé prírodovedné predmety, ako fyzika a astronómia, potrebujú rozšíriť definičný obor oboch týchto funkcií na množinu všetkých reálnych čísel. Túto potrebu uvidíš aj v matematických úlohách. Preto je ***definičným oborom funkcií sínus s kosínus množina všetkých reálnych čísel***.

Ž: *Súvisí táto definícia zavedenia funkcií sínus a kosínus na jednotkovej kružnici s definíciou v pravouhlom trojuholníku?*

U: Na prvý pohľad sa zdá, že sa líšia. Ukážeme si však, že ***definícia na jednotkovej kružnici*** zodpovedá ***definícií pre ostrý uhol v pravouhlom trojuholníku***.
Stačí si uvedomiť, že v jednotkovej kružnici je pravouhlý trojuholník.



Ž: *Je to trojuholník $OM'M$.*

U: Urč dĺžky jeho strán!

Ž: *Dĺžky odvesien sú určené súradnicami bodu M. Vyjadrím ich pomocou hodnôt funkcií kosínus a sínus reálneho čísla x. Prepona OM má dĺžku jedna, lebo to je polomer a kružnica je jednotková. Preto platí*

$$|OM'| = x_M = \cos x,$$
$$|MM'| = y_M = \sin x,$$
$$|OM| = 1.$$

U: Dĺžka oblúka JM je reálne číslo $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ktoré vyjadruje veľkosť uhla $M'OM$ v radiánoch. Môžeš vyjadriť $\sin x$ v pravouhlom trojuholníku $OM'M$.

Ž: *Je to pomer protiľahlej odvesny ku prepone, čiže*

$$\sin x = \frac{|M'M|}{|OM|} = \frac{y_M}{1} = y_M.$$

Podľa definície na jednotkovej kružnici je to teda sínus reálneho čísla x.

U: Obe definície vyjadrujú ten istý obsah pojmu sínus pre ostrý uhol.
Podobne by si to urobil pre funkciu kosínus.

U: Keďže nekonečnému počtu reálnych čísel v tvare $x = x_0 + 2k\pi$ vždy priradíme ten istý bod na jednotkovej kružnici, budú sa hodnoty funkcií sínus a kosínus, ktoré sú určené súradnicami tohto bodu, pravidelne opakovať.

Ž: *To znamená, že dané funkcie sú periodické.*

U: Máš pravdu. Aká je najmenšia perióda?

Ž: *Dĺžka jednotkovej kružnice, teda číslo 2π.*

U: To, že ***funkcie sínus a kosínus sú periodické s najmenšou periódou*** 2π, vyjadrujú vzťahy

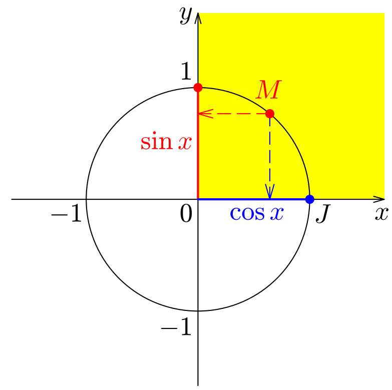
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x; \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x.$$

Tieto vzťahy si treba zapamätať.

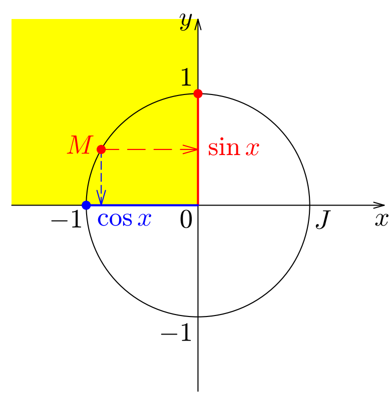
Ž: *To ale znamená, že na vlastnosti týchto dvoch funkcií sa stačí pozrieť na intervale $\langle 0;\ 2\pi)$.*

U: Začnime tým, kde sú ***hodnoty sínus, resp. kosínus kladné***, a kde ***záporné***. Stačí si všímať súradnice bodov jednotkovej kružnice v jednotlivých kvadrantoch.

Ž: *Každý* **bod** *na jednotkovej kružnici* **v I. kvadrante má obe súradnice kladné**, *teda aj* **hodnoty sínus a kosínus sú kladné**.



U: Body jednotkovej kružnice ***v II. kvadrante*** majú x-ovú súradnicu zápornú, teda ***kosínus je záporný*** a y-ovú súradnicu kladnú, ***sínus je kladný***.



Ž: *Ďalej je to už podľa jednotkovej kružnice jednoduché.*

U: Všetko sa dá vyčítať z jednotkovej kružnice, ak poznáš definíciu sínus a kosínus a vieš zobrazovať reálne čísla na jednotkovú kružnicu.

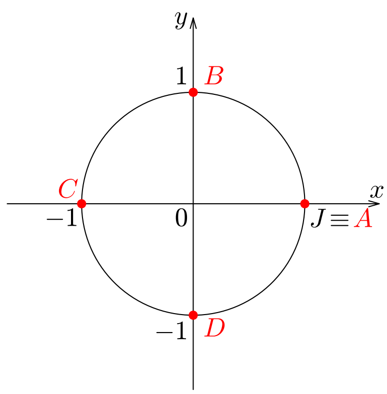
Ž: *Musím uznať, že obrázok dosť napomáha k objaveniu výsledkov.*

U: V nasledujúcej tabuľke máš zhrnuté poznatky o kladnosti, resp. zápornosti hodnôt funkcií sínus a kosínus.

x	$\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$	$\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$

Ž: *Vedeli by sme v jednotlivých kvadrantoch určiť aj hodnoty týchto funkcií?*

U: ***Vo význačných argumentoch*** áno, pre iné hodnoty získame funkčné hodnoty na kalkulačke.
Pre $x \in \left\{0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\}$ dokážeš určiť hodnoty aj sám.



Ž: *Odpovedajú im body* $A\,[1;\ 0]$*;* $B\,[0;\ 1]$*;* $C\,[-1;\ 0]$*;* $D\,[0;\ -1]$*; takže*
$\sin 0 = 0;\ \cos 0 = 1,$
$\sin\frac{\pi}{2} = 1;\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,$
$\sin\pi = 0;\ \cos\pi = -1,$
$\sin\frac{3\pi}{2} = -1;\ \cos\frac{3\pi}{2} = 0.$

U: Okrem týchto význačných hodnôt argumentu sú dôležité aj hodnoty pre
$x \in \left\{\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3}\right\}$.
Funkčné hodnoty sa dajú vypočítať využitím rovnostranného a rovnoramenného pravouhlého trojuholníka. Výpočet si môžeš pozrieť v riešených úlohách.
V nasledujúcej tabuľke sú uvedené ***hodnoty funkcií sínus a kosínus vo význačných bodoch***.

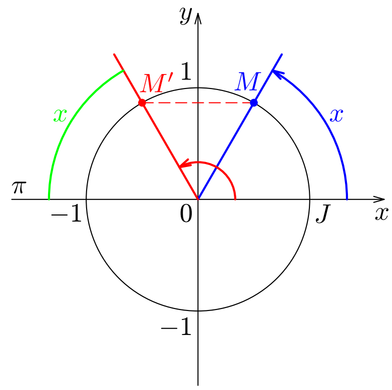
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
x	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

Ž: *Prečo sú uvedené hodnoty pre časti pravého uhla iba v I. kvadrante?*

U: Pretože v ďalších kvadrantoch s nimi súvisia. Niekedy sa líšia iba znamienkom. A neplatí to iba pre $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$, ale akúkoľvek hodnotu argumentu $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

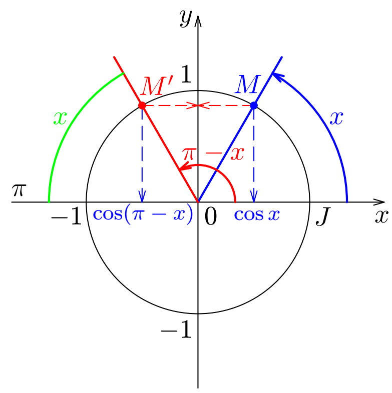
Ž: *Ako to teda bude v druhom kvadrante?*

U: Každému ***bodu*** $M\,[\cos x;\ \sin x]$ ***na oblúku v I. kvadrante***, ***zodpovedá bod*** M' ***v II. kvadrante***, ktorý je s nim osovo súmerný podľa osi y. V osovej súmernosti sa prenesie aj uhol veľkosti x. Bude meraný od zápornej polosi x k polpriamke OM'. Skús určiť, akú dĺžku bude mať oblúk JM'. Je to aj veľkosť uhla JOM'.



Ž: *Od čísla π odpočítam x.*

U: Ak vieme určiť hodnoty pre x z I. kvadrantu, vieme určiť hodnoty sínus a kosínus aj pre $(\pi - x)$ z II. kvadrantu. Aký je vzťah medzi súradnicami bodov M a M', ak si zodpovedajú v osovej súmernosti podľa y?

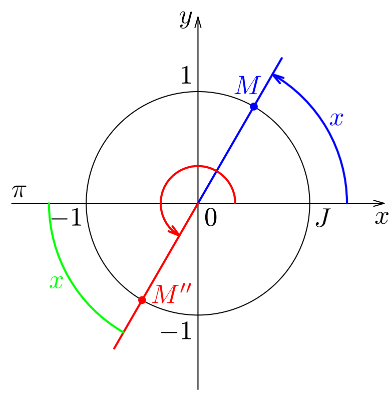


Ž: ***y-ové súradnice sú rovnaké***, *lebo sa to prenáša na kolmici na y,* ***x-ové by mali mať opačné znamienka***.

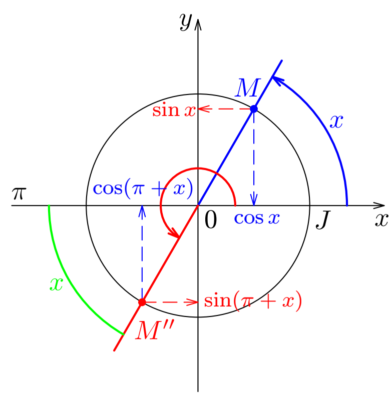
U: Týmito súradnicami sú určené hodnoty sínus a kosínus. Platí teda

$$\sin(\pi - x) = \sin x;\ \ \cos(\pi - x) = -\cos x.$$

Ž: **V treťom kvadrante** *k priamemu uhlu π pridáme uhol x?*



U: Súvisí to teraz so stredovou súmernosťou so stredom v začiatku súradnicovej sústavy O. Bod O je samodružný, bod $J\,[1;\ 0]$ sa zobrazí do bodu $J'\,[-1;\ 0]$ a bod $M\,[\cos x;\ \sin x]$ do bodu M''. Veľkosť uhla JOM'' je $(\pi + x)$, tak ako si spomenul. Verím, že ani teraz nebude pre teba problém dať do súvisu ***súradnice bodov** M **a** M''*.

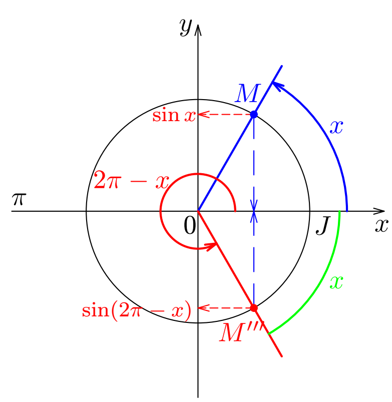


Ž: *Obe súradnice sú teraz* **opačné ako má bod v I. kvadrante***.*

U: V III. kvadrante platí:

$$\boxed{\sin(\pi + x) = -\sin x; \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x}$$

U: Zostáva IV. kvadrant. Pre prechod z I. kvadrantu do IV. využijeme opäť osovú súmernosť, ale podľa osi x



Ž: *Uhly, ktoré sa prenesú budú mať rovnakú veľkosť, lebo je to zhodné zobrazenie. Zmení sa iba znamienko pre y-ovú súradnicu, čiže funkciu sínus.*

U: Reálne číslo, ktoré odpovedá IV. kvadrantu bude $(2\pi - x)$, a teda platí:

$$\boxed{\sin(2\pi - x) = -\sin x; \qquad \cos(2\pi - x) = \cos x}$$

U: Páčila sa mi tvoja poznámka v úvode, že funkcia nemôže reálnemu číslu priradiť bod. Hodnotami sínus a kosínus sú isté reálne čísla. Ako sa však pozeráš na zápis $\sin 30°$?

Ž: *Myslíte tým, že ako argument funkcie by sa nemali používať* **hodnoty v stupňoch***?*

U: $30°$ nie je reálne číslo. Vyjadruje veľkosť stredového uhla na jednotkovej kružnici, ktorú možno vyjadriť reálnym číslom $\dfrac{\pi}{6}$ v radiánoch. Zápis $\sin 30°$ musíme teda chápať ako hodnotu funkcie sínus, ktorá je ***priradená reálnemu číslu*** $\dfrac{\pi}{6}$. Tieto zápisy sa však bežne používajú, preto sa im nebudeme vyhýbať ani my.

Ž: *Spomenuli ste* **stupne** *a* **radiány***. Existuje vzorec na prevod hodnôt zo stupňovej miery na radiánovú?*

U: Radiány sú jednotkou pre veľkosť uhla v ***oblúkovej miere***. Prechod z jednej miery do druhej sa dá zvládnuť jednoduchou trojčlenkou. Čo si určite pamätáš je, koľko radiánov predstavuje $360°$ alebo $180°$.

Ž: $180°$ *je* π **radiánov***.*

U: Platí priama úmera: čím viac stupňov, tým viac radiánov, alebo naopak, čím viac radiánov tým viac stupňov.

Ž: *Vyskúšajme na nejakom príklade, napríklad pre* $330°$*.*

U: $180°$ zodpovedá π ***radiánom***,
$330°$ zodpovedá x ***radiánom***.
Daj to do pomeru a vyjadri x.

Ž: *Pomer bude vyjadrený v tvare*

$$\frac{x}{\pi} = \frac{330}{180}.$$

U: Pre neznámu x dostávame

$$x = \frac{330}{180} \cdot \pi.$$

Určite si si všimol, že ***väčšina význačných hodnôt je vyjadrená násobkom čísla*** π. Robíme to z toho dôvodu, že je to iracionálne číslo. Museli by sme pracovať iba z jeho približnou hodnotou. Aj náš príklad vedie k takémuto vyjadreniu. Skús dokončiť výpočty!

Ž: *Po vykrátení zlomku* 30*-timi mám*

$$x = \frac{11}{6} \cdot \pi.$$

Príklad 1:

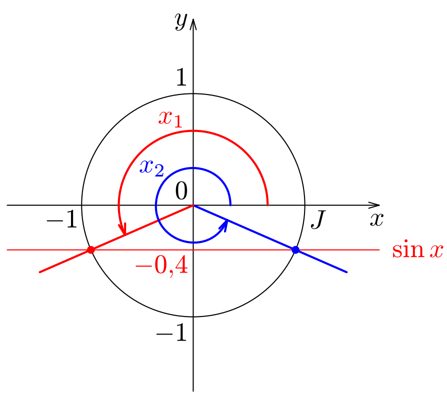
Určte, ktoré z čísel $-0{,}4$*;* 3*;* $\sqrt{10}$*;* $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$*;* $\dfrac{5}{8}$ *a* π *môže byť hodnotou funkcie sínus.*

U: S ktorou premennou v zápise funkcie $y = \sin x$ súvisia zadané čísla?

Ž: *V texte úlohy je otázka, ktoré z čísel môže byť hodnotou, takže s hodnotou* y.

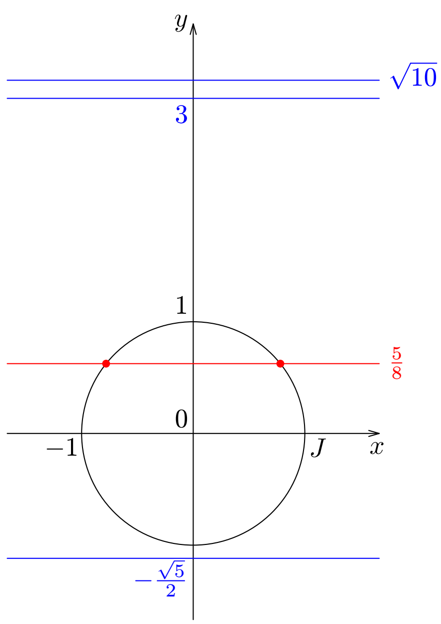
U: Ide o funkčné hodnoty $y = f(x)$. Otázka je, ku ktorému zo zadaných čísel existuje aspoň jedno reálne číslo x, tak, že $y = \sin x$?

Ž: *Pomôžem si jednotkovou kružnicou. Funkcia sínus reálnemu číslu priraďuje y-ovú súradnicu bodu na jednotkovej kružnici. Pre* $y = -0{,}4$ *existujú dokonca dva také body.*



U: Sú v III. a vo IV. kvadrante a zodpovedá im nekonečne veľa reálnych čísel x v tvare $x = x_1 + 2k\pi$, alebo $x = x_2 + 2k\pi$ kde k je celé číslo. Takže $-0{,}4$ môže byť hodnotou funkcie sínus.

Ž: *Analogicky určím pre ostatné čísla. Vyznačil som to na obrázku.*



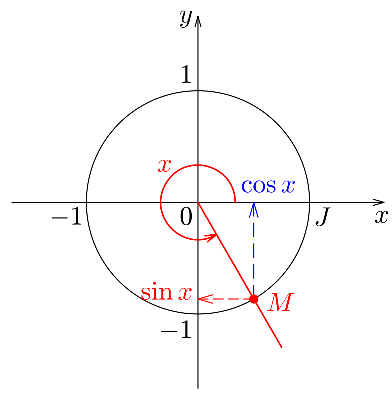
Ž: *Hodnotou funkcie sínus môžu byť iba čísla* $x \in \left\{-0{,}4;\ \dfrac{5}{8}\right\}$.

U: Úloha sa dala vyriešiť bez grafického znázorňovania na jednotkovej kružnici. Pochopil si ju správne v tom, či dané čísla môžu byť funkčnými hodnotami. Pýtame sa teda, aký je obor funkčných hodnôt funkcie sínus?

Ž: *Jasné. Je to uzavretý interval* $\langle -1;\ 1\rangle$ *a do tohto intervalu patria iba čísla, ktoré som predtým uviedol.*

Príklad 2:
Do ktorého intervalu $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$; $\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$*; patrí* x*, ak*
a) $\sin x < 0$ *a zároveň* $\cos x > 0$*;*
b) $\sin x > 0$ *a zároveň* $\cos x = -0{,}6$.

Ž: *Pomôžem si jednotkovou kružnicou.*

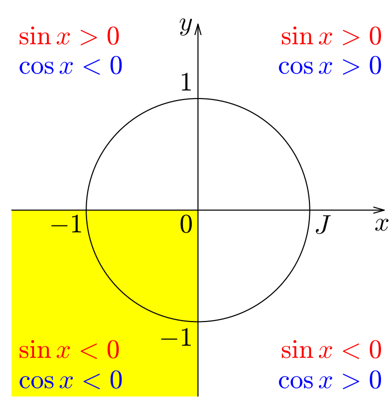


U: Uvedom si, v ktorom z daných intervalov má funkcia sínus záporné hodnoty.

Ž: *V* **treťom** *a vo* **štvrtom** *kvadrante.*

U: Podobne vyrieš podmienku $\cos x > 0$.

Ž: *Keďže funkcia kosínus reálnemu číslu* x *priradí* x*-ovú súradnicu bodu na jednotkovej kružnici, tak v II. a vo* **III.** *kvadrante.*



U: Obe podmienky majú platiť súčasne.

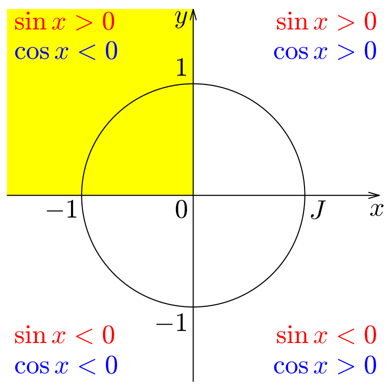
Ž: *Výsledným intervalom preto bude ten, ktorý som uviedol pri* 1. *podmienke a zároveň pri* 2. *podmienke. Je to III. kvadrant.*

U: Výsledkom úlohy je $x \in \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$. Vyrieš podobne úlohu b).

Ž: *Nemôžem určiť* x*, keďže* $\cos x = -0{,}6$*?*

U: Dalo by sa to, ale použitím kalkulačky. Získal by si však zápornú hodnotu x. Pri geometrickom určení na jednotkovej kružnici bola by hodnota nepresná, nedokážeme merať ani s presnosťou na stotiny centimetra.
Navyše úloha je analogická predchádzajúcej. Stačí si uvedomiť, že podmienka $\cos x = -0{,}6$ znamená $\cos x < 0$.

Ž: *Potom je to už ľahké.*
Z podmienky $\sin x > 0$ *vyplýva, že* x *patrí do I. alebo* **II.** *kvadrantu.*
Z podmienky $\cos x < 0$ *vyplýva, že* x *patrí do* **II.** *alebo III. kvadrantu.*



U: Výsledkom úlohy je $x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

Úloha :

Do ktorého intervalu $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$; $\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$; *patrí* x, *ak* $\sin x = -0{,}6$ *a zároveň* $\cos x = 0{,}8$

Výsledok: $x \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$

Príklad 3:
Určte všetky $x \in \langle 0;\ 2\pi)$, pre ktoré platí:

$$\sin x = \cos x.$$

U: Úloha sa dá riešiť ako goniometrická rovnica pomocou funkcie tangens alebo kotangens. Zatiaľ nám však tieto vedomosti chýbajú.

Ž: *Tak prečo mám riešiť takúto úlohu?*

U: Pretože k jej vyriešeniu stačí predstava o jednotkovej kružnici a súradniciach bodov v rovine. Ty túto predstavu máš.
Začni od definícií funkcií sínus a kosínus na jednotkovej kružnici.

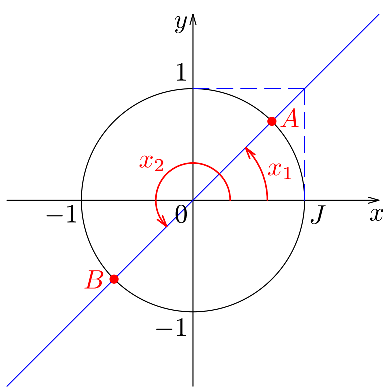
Ž: *Funkcia sínus reálnemu číslu x priraďuje y-ovú súradnicu a funkcia kosínus x-ovú súradnicu bodu M jednotkovej kružnice, ktorý je priradený číslu x. Keďže sa hodnoty funkcií sínus a kosínus rovnajú, tak sa rovnajú aj súradnice.*

U: Našou úlohou je teda nájsť na jednotkovej kružnici všetky body $X\,[x;\ y]$ tak, aby súradnice pre daný bod boli rovnaké, teda $y = x$. To je predpis funkcie ktorej pomenovanie a graf určite poznáš.

Ž: *Viem, že grafom je priamka, ale s pomenovaním mi musíte pomôcť.*

U: Je to špeciálny prípad lineárnej funkcie, a to priama úmernosť. Načrtni graf tejto funkcie do obrázka s jednotkovou kružnicou.

Ž: *Potrebujem dva body, ak $x = 0$, aj $y = 0$. Pre $x = 1$ je $y = 1$.*



U: Priamka, ktorú si zostrojil sa tiež nazýva osou I. a III. kvadrantu. Jej priesečníky s jednotkovou kružnicou sú nami hľadané body, ktorým priradíme reálne číslo x.

Ž: *Body sú v I. a v III. kvadrante. Keďže os rozdeľuje pravý uhol na polovicu, riešenia sú* $x_1 = \dfrac{\pi}{4};\ x_2 = \dfrac{5\pi}{4}$.

Úloha :
Určte všetky $x \in \langle 0;\ 2\pi)$, pre ktoré platí:

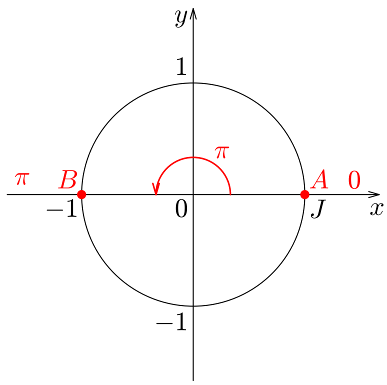
$$\cos x = -\sin x.$$

Výsledok: $x_1 = \dfrac{3\pi}{4};\ x_2 = \dfrac{7\pi}{4}$

Príklad 4:
Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré súčasne platí:

$$\sin x = 0 \quad a \quad \cos x = -1.$$

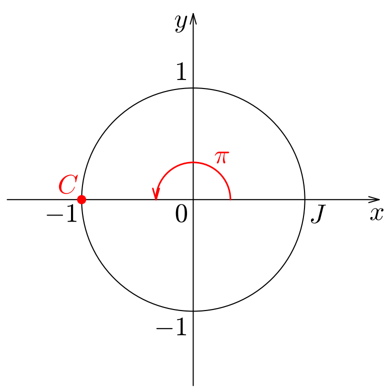
U: Vzhľadom na periodickosť funkcií sínus a kosínus s najmenšou periódou 2π, stačí vyriešiť obe podmienky pre $x \in \langle 0;\ 2\pi)$. Vyrieš najskôr $\sin x = 0$ tak, že využiješ jednotkovú kružnicu.



Ž: **Funkcia sínus** *reálnemu číslu x priradí y-ovú súradnicu bodov na kružnici. Keďže má byť nula, také body sú dva:*
$A\,[1;\ 0]$; $B\,[-1;\ 0]$. Sú priradené reálnym číslam $x_1 = 0$; $x_2 = \pi$.

U: Analogicky vyrieš podmienku $\cos x = -1$.

Ž: **Funkcia kosínus** *reálnemu číslu x priradí x-ovú súradnicu bodov na kružnici. Keďže má byť -1, taký bod je len jeden $C\,[-1;\ 0]$. Ten je priradený reálnemu číslu $x_3 = \pi$.*



U: Ktoré body jednotkovej kružnice vyhovujú obom podmienkam súčasne?

Ž: *Bod C je totožný s bodom B. Hľadané číslo je π.*

U: Zatiaľ je to tzv. základné riešenie v intervale $\langle 0;\ 2\pi)$. Všetky reálne čísla x vyhovujúce obom podmienkam súčasne vyjadríme pomocou čísla π pripočítaním ***celočíselných násobkov najmenšej periódy*** funkcií sínus a kosínus.

Ž: *Úlohe teda vyhovujú všetky reálne čísla v tvare $x = \pi + 2k\pi$; kde k je celé číslo.*

Úloha :
Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré súčasne platí:

$$\sin x = -1 \quad a \quad \cos x = 1.$$

Výsledok: $x \in \emptyset$.

Príklad 5:
Máme rozhodnúť o pravdivosti výroku:
Pre všetky reálne čísla x, y platí: ak $\sin x = \sin y$, tak $x = y$.

Ž: *Neviem sa zorientovať vo význame symbolov x a y.*

U: Obe premenné sú použité vo význame argumentu, čiže nezávislej premennej. Ako keby si použil x_1, x_2.

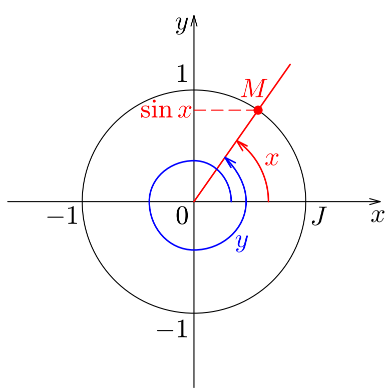
Ž: *Mám teda dokázať výrok:*
Pre všetky x_1; x_2 z intervalu $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ platí: ak $\sin x_1 = \sin x_2$, tak $x_1 = x_2$.

U: Áno. Výrok o pravdivosti, ktorého máme rozhodnúť sa nazýva ***implikácia***. Prvá časť výroku je predpoklad. Uvažujeme, že platí. Druhá časť je tvrdenie.
Zadaný výrok bude pravdivý, ak tvrdenie je pravdivé. Opäť si môžeš pomôcť jednotkovou kružnicou.

Ž: **Funkcia sínus** *reálnemu číslu x priradí y-ovú súradnicu bodov M jednotkovej kružnice.*
Predpoklad $\sin x = \sin y$ znamená, že reálnym číslam x a y bol na jednotkovej kružnici priradený ten istý bod.

U: Musia byť tieto čísla rovnaké?

Ž: *Nie, veď množina všetkých reálnych čísel, ktorým je priradený ten istý bod jednotkovej kružnice je nekonečná.*

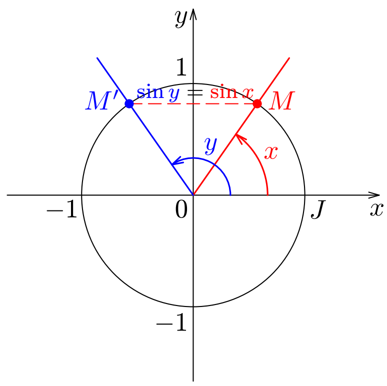


U: Z toho vyplýva, že môže platiť $y = x + 2k\pi$; kde k je celé číslo. To si využil periodickosť funkcie sínus.

Ž: *Teda výrok neplatí.*

U: Áno. Na zdôvodnenie, že výrok neplatí, sa dá využiť aj iný argument.
Pozri sa ešte raz na obrázok. Koľko bodov na jednotkovej kružnici má tebou zvolenú y-ovú súradnicu?

Ž: *Aha! Mohol som vyznačiť aj* **bod v II. kvadrante**.



U: Aj teraz platí, že $x \neq y$. Využili sme vlastnosť, že funkcia sínus nie je v základnom intervale prostá.

Výsledkom úlohy je: ***výrok neplatí***.

Úloha :

Rozhodnite o pravdivosti výroku:

Pre všetky reálne čísla x, y *z intervalu* $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ *platí, ak* $\sin x = \sin y$, *tak* $x = y$.

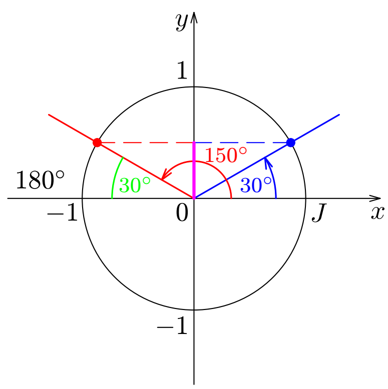
Výsledok: výrok platí

Príklad 6:
Vypočítajte:
a) $\sin 150°$,
b) $\sin \dfrac{16\pi}{3}$.

U: Podstata úlohy spočíva v tom, aby si zistil, do ktorého kvadrantu patrí argument. Potom ho vyjadríš pomocou zodpovedajúcej hodnoty z I. kvadrantu, zohľadníš kladnosť, reps. zápornosť v príslušnom kvadrante.

Ž: $150°$ *je viac ako* $90°$ *a menej ako* $180°$*, takže* **II. kvadrant**.

U: $150°$ prepíšeme cez hodnotu zodpovedajúcu bodu v I. kvadrante. Medzná hranica pre prepis v II. kvadrante je $180°$.



Ž: *Dá sa to vyjadriť v tvare*

$$150° = 180° - 30°.$$

U: Samotné riešenie zapíšeme v tvare
$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \dfrac{1}{2}$,
lebo v II. kvadrante je hodnota funkcie sínus kladná.

Ž: *V úlohe po b) je* $\dfrac{16\pi}{3}$ *viac ako* 2π*.*

U: Áno. Funkcia sínus je však periodická s najmenšou periódou 2π. Preto číslo $\dfrac{16\pi}{3}$ prepíšeme ako súčet dvoch zlomkov. Platí

$$\sin\frac{16\pi}{3} = \sin\left(\frac{12\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}.$$

Ž: *Hodnotu zlomku* $\dfrac{12\pi}{3} = 4\pi$ *môžeme pre ďalší výpočet zanedbať.*

U: Dá sa to takto povedať. Číslo 4π predstavuje dve otáčky o plný uhol 2π, takže

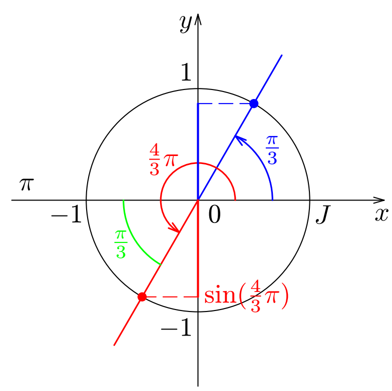
$$\sin\frac{16\pi}{3} = \sin\left(\frac{12\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}.$$

Ž: *Teda sme sa dostali do východiskového bodu jednotkovej kružnice. Podstatné sú* $\frac{4}{3}$ *čísla* π.

U: Alebo sa to dá povedať tak, že sme využili spomínanú periodickosť. Pokračuj ďalej.

Ž: *Číslo* $\frac{4\pi}{3}$ *patrí do* **III. kvadrantu**. *Vyjadrím ho ako súčet čísel* π *a* $\frac{\pi}{3}$. *Viem, že sínus je v III. kvadrante záporný a poznám hodnotu* $\sin\frac{\pi}{3}$.

$$\boxed{\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\frac{3\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



U: Pri prechode z III. kvadrantu do I. kvadrantu si správne zohľadnil znamienko mínus. Pozor, aby si ho nepísal až vo výsledku. Všetky zápisy musia byť korektné.

Úloha :

Vypočítajte $\sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$.

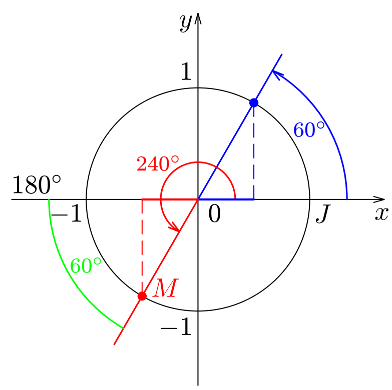
Výsledok: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Príklad 7:
Vypočítajte:
a) $\cos 240°$,
b) $\cos\left(\frac{-10\pi}{3}\right)$.

U: Podstata úlohy spočíva v tom, aby si zistil, do ktorého kvadrantu patrí argument. Potom ho vyjadríš pomocou zodpovedajúcej hodnoty z I. kvadrantu, zohľadníš kladnosť, reps. zápornosť v príslušnom kvadrante.

Ž: $240°$ *je v* **III. kvadrante**, *lebo* $180° < 240° < 270°$.

U: $240°$ prepíšeme cez hodnotu zodpovedajúcu bodu v I. kvadrante. Medzná hranica pre prepis v III. kvadrante je $180°$.



Ž: *Teda:* $240° = 180° + 60°$.

U: V ***III. kvadrante*** je hodnota funkcie kosínus ***záporné číslo***, ale v absolútnej hodnote rovnaké ako $\cos 60°$ v I. kvadrante.

Ž: *Preto platí*

$$\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}.$$

U: Vyrieš analogicky úlohu po b).

Ž: *Číslo* $\left(\frac{-10\pi}{3}\right)$ *obsahuje otáčky v zápornom smere.*

U: Áno, funkcia kosínus je periodická s najmenšou periódou 2π. Argument funkcie kosínus upravíme. Koľko otáčok v zápornom smere vyjadruje číslo $-\frac{10\pi}{3}$?

Ž: *Iba jednu, lebo číslo* -2π *sa dá zapísať ako* $-\frac{6\pi}{3}$. *Zostane* $-\frac{4\pi}{3}$, *čo nie je celá druhá otáčka.*

U: Koľko chýba do druhej celej otáčky?

Ž: *Treba pridať číslo* $-\frac{2\pi}{3}$.

U: Čo pridáme, to budeme musieť ubrať. Hodnotu zadaného argumentu funkcie kosínus nemôžeme zmeniť.

Ž: *Aha! Začínam chápať. Vy chcete dokončiť druhú otáčku v zápornom smere, a potom sa vrátiť v kladnom smere.*

U: Vieš, o koľko sa vrátime v kladnom smere?

Ž: *Predsa o číslo* $\frac{2\pi}{3}$, *lebo to sme pridali do zápornej otáčky.*

U: Vidím, že si pochopil. Doterajší postup riešenia máš celý zhrnutý v rámčeku.

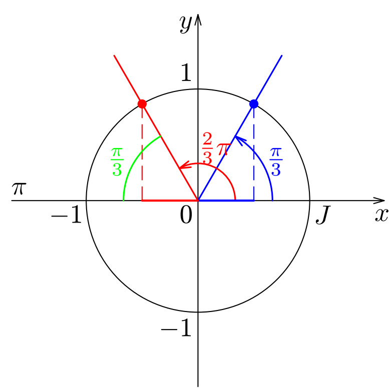
$$\boxed{\cos\frac{-10\pi}{3} = \cos\frac{(-12+2)\pi}{3} = \cos\left(\frac{-12\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-4\pi + \frac{2\pi}{3}\right)}$$

Ž: *Keďže číslo* -4π *vyjadruje dve otáčky v zápornom smere, môžem ho zanedbať.*

U: Hovoríme tomu, že sme využili periodickosť funkcie kosínus s najmenšou periódou 2π. Pokračuj ďalej.

Ž: *Číslo* $\frac{2\pi}{3}$ *zodpovedá bodu v II. kvadrante, vyjadrím ho pomocou čísla* π. *Preto platí*

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right).$$



Ž: *V* **II. kvadrante** *je hodnota funkcie kosínus* **záporná** *a hodnota* $\cos\frac{\pi}{3}$ *je* $\frac{1}{2}$. *Na základe toho dostávam*

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Úloha :

Vypočítajte $\cos\frac{35\pi}{4}$.

Výsledok: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Príklad 8:
Vypočítajte hodnoty sínus a kosínus pre 45°.

U: Použijeme goniometrické funkcie v pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C, kde naviac jeden ostrý uhol je 45°.

Ž: *Keďže poznáme dva uhly a súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°, zvyšný uhol je tiež 45°. Trojuholník je aj rovnoramenný. Ale nepoznám žiadnu stranu.*

U: To je pravda, ale trojuholník ABC je ***rovnoramenný***, tak $a = b$. Naviac je pravouhlý. Vyjadrenie prepony c by nemal byť problém.

Ž: *Použijem Pytagorovu vetu:* $c^2 = a^2 + b^2$.

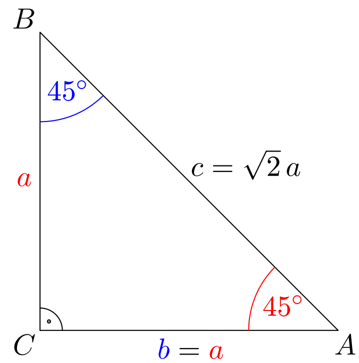
U: Keďže vieme, že $a = b$, za premennú b stačí dosadiť premennú a

$$c^2 = a^2 + a^2.$$

Ž: *Mocniny sčítam a nakoniec odmocním. Pre preponu c mám*

$$c = \sqrt{2}a.$$

U: Teraz už máme vyjadrené všetky strany pravouhlého trojuholníka. Vyjadri teda hodnoty goniometrických funkcií v pravouhlom trojuholníku.



Ž: *Viem, že hodnota funkcie* **sínus** *ostrého uhla α je daná pomerom protiľahlej odvesny a prepony. Po dosadení získam*

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pre funkciu kosínus to bude analogické. Do pomeru teraz zoberiem priľahlú odvesnu k uhlu α a preponu

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

U: Zlomok $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ prepíš tak, aby neobsahoval odmocninu v menovateli.

Ž: *Môžete mi pripomenúť, ako to urobiť?*

U: Rozšíriš zlomok $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ číslom $\sqrt{2}$.

Ž: *Aha! Vynásobím čitateľa, aj menovateľa číslom* $\sqrt{2}$ *a mám*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

U: Zaujímavý výsledok. Hodnoty funkcií sínus a kosínus sú pre uhol 45 stupňov rovnaké.