Úlohy o kvadratických funkciách

RNDr. Beáta Varinčíková

U: V praxi sa neraz stretávame s úlohami vyžadujúcimi nájsť optimálne riešenie. Napríklad naplánovať výrobu podniku v snahe dosiahnuť maximálny zisk či minimálne náklady.

Ž: *Už tuším, že v tom bude mať prsty matematika.*

U: Samozrejme. V jednoduchých prípadoch si vystačíme aj s vedomosťami o kvadratickej funkcii. Tak si ich najprv pripomeňme.

Ž: *Kvadratickou funkciou nazývame každú funkciu danú rovnicou*

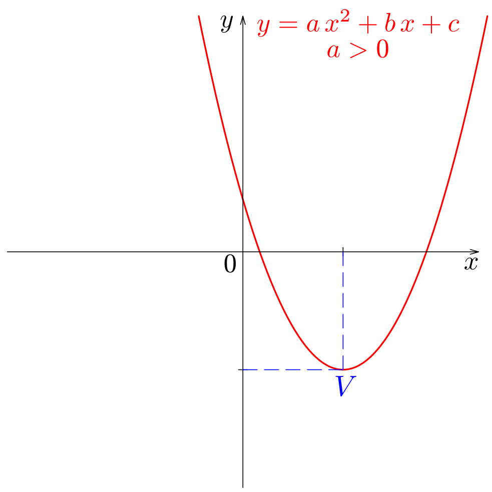
$$f : y = ax^2 + bx + c,$$

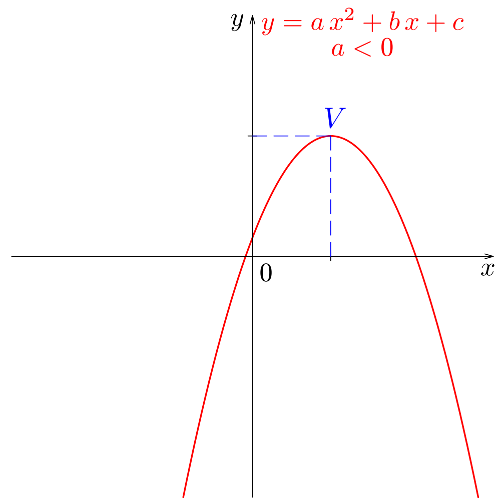
kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. *Jej definičným oborom je množina* $\mathbb{R}$.

U: Veľmi dobre, ešte mi povedz niečo o grafe kvadratickej funkcie.

Ž: *Grafom je krivka, ktorá sa nazýva parabola. Môže byť obrátená nahor alebo nadol, podľa toho, či koeficient* a *je kladný alebo záporný.*

U: Na nasledujúcom obrázku máme ukážky grafov kvadratických funkcií:





V oboch prípadoch má funkcia iba jeden extrém – buď minimum alebo maximum.

Ž: *Ten extrém je určite vo vrchole paraboly. Jeho súradnice sa však počítajú dosť zložito, nepamätám si to.*

U: Dá sa odvodiť, že pre súradnice vrcholu paraboly platí

$$V\left[-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} + c\right].$$

Nemusíš si to však pamätať, užitočnejšie je vedieť, akou metódou môžeme nájsť súradnice vrcholu.

Ž: *Tak to náhodou viem – úpravou na štvorec!*

U: Výborne. Skúsime vyriešiť slovnú úlohu, ktorá sa dá popísať kvadratickou funkciou. Jej optimálne riešenie bude súvisieť s vrcholom príslušnej paraboly.

Ž: *To neznie ťažko, poďme na to.*

U: Hokejový klub požiadal železničnú spoločnosť o vypravenie špeciálneho vlaku pre svojich fanúšikov. Železničná spoločnosť vypraví vlak, ak bude aspoň 200 cestujúcich. Pritom cestovné je 8 € na jednu osobu pri počte 200 cestujúcich a znižuje sa o 1 cent za každého cestujúceho nad počet 200. Pri akom počte cestujúcich bude mať železničná spoločnosť najväčší príjem?

Ž: *Zaujímavá úloha. Ak bude viac cestujúcich, iste zarobia viac eur. Lenže oni dali akciu – cena sa znižuje s počtom ľudí. Takže pri určitom počte ľudí sa už môže stať, že to pre nich nebude výhodné.*

U: To práve máme zistiť. Navrhujem zaviesť vhodné označenie.

Ž: *Počet cestujúcich označím x a zisk spoločnosti y. Teraz ešte potrebujem zistiť cenu lístka. Tá závisí od počtu ľudí nad 200 a tých je $x - 200$. A čo s tými centami?*

U: Cent je jedna stotina eura. Za každého z $x - 200$ ľudí sa cestovné zníži o jeden cent. Teda celkovo sa cena lístka zníži o

$$0{,}01 \cdot (x - 200)\,.$$

Ž: *To znamená, že nová cena za jeden lístok je*

$$8 - 0{,}01 \cdot (x - 200)\,.$$

Vynásobím to počtom cestujúcich a dostanem vyjadrenie pre celkovú sumu zisku

$$y = x \cdot [8 - 0{,}01 \cdot (x - 200)]\,.$$

Upravím to?

U: Samozrejme.

Ž: *Najprv odstránim okrúhle zátvorky*

$$y = x \cdot [8 - 0{,}01x + 2]\,,$$

odkiaľ

$$y = x \cdot [10 - 0{,}01x]\,.$$

Odstránim hranaté zátvorky a dostanem

$$y = 10x - 0{,}01x^2.$$

U: Našiel si závislosť medzi ziskom spoločnosti a počtom cestujúcich. Predstavuje ju kvadratická funkcia a teraz potrebuješ nájsť jej maximum.

Ž: *Budem ho hľadať dopĺňaním do úplného štvorca. Ale keďže koeficient pri x^2 nie je jednotka, začnem vyberaním pred zátvorku:*

$$y = 10x - 0{,}01x^2 = -0{,}01 \cdot \left(x^2 - 1000x\right).$$

Členy v zátvorke doplním do štvorca takto:

$$x^2 - 1000x = x^2 - 1000x + 500^2 - 500^2 = (x-500)^2 - 250\,000.$$

U: Zatiaľ úplne bez chyby, môžeš sa vrátiť k vyjadreniu celkového zisku.

Ž: *Dostanem*

$$y = -0{,}01 \cdot \left[(x-500)^2 - 250\,000\right] = -0{,}01 \cdot (x-500)^2 + 2500.$$

U: Z tohto zápisu už pekne vidieť, že zisk železničnej spoločnosti je suma 2500 € znížená o čiastku $0{,}01 \cdot (x-500)^2$.

Ž: *A preto maximálny zisk je* 2500 € *. To nastane vtedy, keď* $x = 500$, *pretože vtedy sa od sumy* 2500 *neodpočíta nič.*

U: Našli sme teda odpoveď na otázku. Najväčší zisk dosiahne spoločnosť pri 500 cestujúcich.

Ž: *Rozmýšľam nad tým, že ak bude viac cestujúcich, pre spoločnosť to síce nebude výhodné, ale pre cestujúcich áno. Veď cena lístka by klesla. A teoreticky by mohol nastať aj taký prípad, keď by už cestovali zadarmo!*

U: Samozrejme. A nie je ťažké vypočítať, že by to nastalo pre 1000 cestujúcich. Avšak železničná spoločnosť iste zamestnáva matematika, ktorý toto všetko vie. A ten im poradí, aby hokejovému klubu ponúkli, že odvezú maximálne 500 fanúšikov.

U: Teraz prejdeme na úplne iný typ úlohy – na grafy kvadratických funkcií s absolútnymi hodnotami. Skúsme zostrojiť graf funkcie

$$f: y = (x-2) \cdot |x-4|\,.$$

Ž: *Viem, že pri absolútnej hodnote treba rozlišovať, či výraz v jej vnútri je kladný alebo záporný.*

U: A nemohol by byť aj nulový?

Ž: *Aha, mohol. Takže najprv uvažujem o prípade, keď výraz vnútri absolútnej hodnoty je nezáporný, čiže*

$$x - 4 \geqq 0,$$

odkiaľ

$$x \geqq 4.$$

Potom platí $|x-4| = x-4$. *Predpis funkcie môžem vyjadriť v tvare*

$$f_1: y = (x-2)\,(x-4)\,; \quad x \in \langle 4; \infty)\,.$$

U: To už je predpis kvadratickej funkcie bez absolútnej hodnoty, nájdi jej nulové body a vrchol paraboly.

Ž: *Nulové body vidím okamžite, sú to $x = 2$ a $x = 4$. Vrchol nájdem doplĺňaním do úplného štvorca:*

$$y = (x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8 = \left(x^2 - 6x + 9\right) - 9 + 8 = (x-3)^2 - 1.$$

Vrchol má súradnice $[3; -1]$.

U: Perfektne, môžeš to zopakovať aj pre druhú časť riešenia.

Ž: *Teraz uvažujem o prípade, keď výraz vnútri absolútnej hodnoty je záporný, čiže*

$$x - 4 < 0,$$

odkiaľ

$$x < 4.$$

Potom platí $|x-4| = 4 - x$. *Predpis funkcie sa zmení na tvar*

$$f_2 : y = (x-2)(4-x), \quad x \in (-\infty; 4).$$

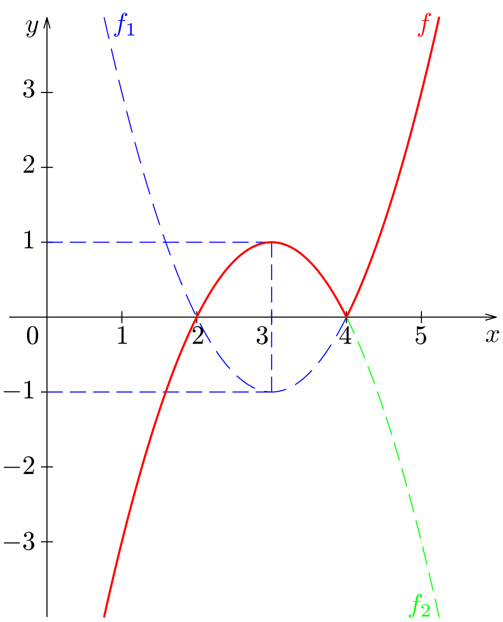
Nulové body sú tie isté, $x = 2$ *a* $x = 4$. *A hľadám vrchol paraboly:*

$$y = (x-2)(4-x) = -x^2 + 6x - 8.$$

U: V tomto kroku sa predpis funkcie f_2 líši od funkcie f_1 len znamienkom, preto po doplnení do štvorca vznikne

$$y = -(x-3)^2 + 1.$$

Ž: *Súradnice vrcholu druhej paraboly sú* $[3; 1]$. *Napokon už len graf. Ten získam tak, že zostrojím grafy funkcií* f_1 *aj* f_2 *do jedného obrázku. Červenou potom vyznačím, že pre* $x \geqq 4$ *berieme do úvahy časť grafu prvej funkcie a pre* $x < 4$ *časť grafu druhej funkcie.*



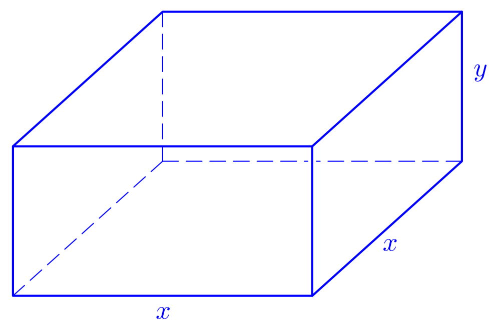
U: Výborne. Podobným rozborom iste zvládneš aj ďalšie úlohy.

Príklad 1: *Určte nasledujúce závislosti:*

1. *Vyrábame kartónové hranolové krabice bez vrchnáka so štvorcovou podstavou. Určte závislosť spotreby materiálu od dĺžky postavnej hrany x, ak $x \in \langle 30; 40\rangle$ cm a výška krabice je 20 cm.*

2. *Z plieškov v tvare kruhu s priemerom 3 cm a hrúbkou 2 mm vyrábame podložky v tvare medzikružia s rôznymi vnútornými polomermi r. Určte funkciu, ktorá udáva závislosť objemu V (v mm^3) podložky od polomeru r (v mm).*

Ž: *V prvej časti vyrábame hranolové krabice. Skúsim urobiť náčrt. V zadaní je povedané, že krabica má štvorcovú podstavu s hranou x. Výšku krabice môžem potom označiť y, náčrt vyzerá takto:*



U: Dobre. Potrebujeme vyjadriť spotrebu materiálu. S ktorou matematickou veličinou to bude súvisieť?

Ž: *Krabicu vyrábame z kartónu, ktorý vytvorí jej povrch. Označím ho S.*

U: Celý zápis našej úlohy môže skrátene vyzerať takto:

$$x \in \langle 30; 40\rangle \ cm$$

$$y = 20\,cm$$

$$S = ?$$

Ž: *Povrch nie je ťažké vypočítať. Keďže krabica nemá vrchnák, tak počítam obsah len pre dolnú podstavu a pre bočné steny. Podstava je v tvare štvorca, teda jej obsah je x^2. Bočné steny sú štyri rovnaké obdĺžniky s obsahom xy. V súčte dostávam*

$$S = x^2 + 4xy.$$

Ešte môžem za y dosadiť hodnotu 20 cm a dostávam vyjadrenie

$$S = x^2 + 80x.$$

U: Ja už len doplním, že ide o kvadratickú závislosť definovanú na intervale $\langle 30; 40\rangle$ *cm*.

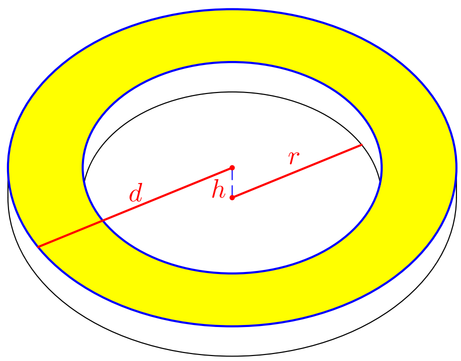
Ž: *V druhej časti máme pliešky v tvare kruhu. Z nich vyrežeme v strede ďalší kruh, takže nám vznikne podložka v tvare medzikružia. Priemer kruhu označím d a polomer otvoru označím r. Je logické, že tento polomer musí byť menší ako polomer celého kruhu.*

U: V zadaní je uvedená aj hrúbka.

Ž: *No áno, pliešky majú svoju hrúbku, označím ju h.*

U: To ale znamená, že by sme mali upresniť použitú terminológiu. Pliešky v skutočnosti nie sú kruhy, ale …

Ž: *… valce. Skúsim jeden taký nakresliť, tu je obrázok:*



Mám vypočítať objem podložky, označím ho V.

U: Celý zápis úlohy je takýto:

$$d = 3\,cm = 30\,mm$$

$$r \in (0; 15)\ mm$$

$$h = 2\,mm$$

$$V = ?$$

Ž: *Objem podložky vypočítam ako rozdiel objemu dvoch valcov – pôvodného a toho, čo sme vyrezali:*

$$V = V_1 - V_2.$$

Viem, že objem valca sa počíta podľa vzťahu

$$V = \pi r^2 v,$$

kde r je polomer a v je výška valca. V našom prípade teda

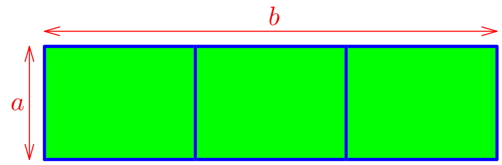
$$V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h - \pi r^2 h = \pi \cdot 15^2 \cdot 2 - \pi r^2 \cdot 2.$$

U: Úpravou získame výsledný vzťah

$$V = 2\pi \left(225 - r^2\right).$$

Opäť predstavuje kvadratickú závislosť, definovanú na otvorenom intervale $(0; 15)$.

Príklad 2: *Farmár chce použiť* $100\,m$ *pletiva na oplotenie troch rovnakých obdĺžnikových výbehov pre kurčatá. Výbehy majú spoločnú stranu, ktorú tiež tvorí pletivo. Ako má zvoliť rozmery celého oploteného pozemku, aby jeho obsah bol maximálny?*



Ž: *Na obrázku máme rozmery pozemku označené písmenami a, b. K dispozícii máme pletivo* $100\,m$ *dlhé. Tu však budeme pletivo dávať nielen okolo pozemku, ale aj dovnútra. Preto má platiť*

$$4a + 2b = 100.$$

Ďalej má platiť, že obsah pozemku má byť čo najväčší. Obsah obdĺžnika sa počíta $a \cdot b$*, ale ako to zapísať?*

U: Symbolicky môžeme zapísať

$$S = a \cdot b \to \max .$$

Ž: *Budeme teda hľadať maximum funkcie?*

U: Áno, budeme hľadať maximum funkcie, ktorá vyjadruje závislosť obsahu pozemku od jednej jeho strany. Zo vzťahu $4a + 2b = 100$ si vyjadríme $b = 50 - 2a$ a dosadíme do vyjadrenia obsahu

$$S = a \cdot b = a \cdot (50 - 2a) = 50a - 2a^2.$$

Získali sme kvadratickú funkciu. Skús nájsť maximum tejto funkcie.

Ž: *Budem to riešiť úpravou na štvorec. Ale keďže pred* a^2 *je koeficient* -2*, musím ho najprv vybrať pred zátvorku:*

$$S = 50a - 2a^2 = -2(a^2 - 25a).$$

Teraz už môžem dopĺňať:

$$S = -2\left[a^2 - 25a + \left(\frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2\right].$$

U: Veľmi dobre, prvé tri členy v hranatej zátvorke predstavujú druhú mocninu dvojčlena.

Ž: *Pokračujem v úpravách*

$$= -2\left[\left(a - \frac{25}{2}\right)^2 - \frac{625}{4}\right] = -2\,(a - 12{,}5)^2 + 312{,}5.$$

Ďalej viem, že $(a - 12{,}5)^2 \geqq 0$*, teda* $-2(a - 12{,}5)^2 \leqq 0$ *a napokon*

$$S = -2(a - 12{,}5)^2 + 312{,}5 \leqq 312{,}5.$$

Teda najväčší obsah bude $312{,}5\,m^2$.

U: Áno, a toto maximum nastane práve vtedy, keď

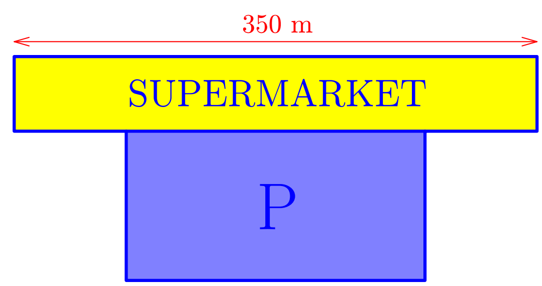
$$a = 12{,}5\,\mathrm{m},$$

čiže keď

$$b = 50 - 2a = 50 - 2 \cdot 12{,}5 = 25\,\mathrm{m}.$$

Teda pri rozmeroch pozemku $a = 12{,}5\,\mathrm{m}$, $b = 25\,\mathrm{m}$ budú mať všetky tri výbehy spolu najväčší obsah.

Úloha 2: *V meste stavajú nový supermarket. Hneď vedľa neho chcú naprojektovať parkovisko s pravouholníkovým pôdorysom. Jedna strana parkoviska má byť tvorená stenou obchodného domu, zvyšné strany musia byť oplotené. Akú najväčšiu rozlohu môže mať parkovisko, ak dĺžka plotu nesmie presiahnuť* 280 *metrov?*



Výsledok: $9800\,\mathrm{m}^2$

Príklad 3: *Realitná kancelária prenajíma* 80 *apartmánov. Nájomné za jeden mesiac v každom z apartmánov je* 180 e *. Podľa prieskumu by každé zvýšenie ceny o* 6 e *spôsobilo zmenšenie počtu obsadených apartmánov o jeden. Mesačné náklady na prevádzku jedného apartmánu sú* 18 e *. Pri akej cene za jeden apartmán dosiahne realitná kancelária maximálny zisk?*

Ž: *V zadaní je priveľa čísel, musím sa v tom najprv zorientovať. Apartmánov majú* 80 *a prenajímajú ich mesačne za* 180 e *. Zatiaľ je to jasné. Nerozumiem ale ďalšej vete. Podľa prieskumu by každé zvýšenie ceny o* 6 e *spôsobilo zmenšenie počtu obsadených apartmánov o jeden.*

U: Realitná kancelária by chcela mať väčší zisk, a preto chce zvýšiť cenu. Uvedomujú si však, že ak cena pôjde veľmi nahor, ľudia prestanú mať záujem o ich služby. Urobili preto prieskum trhu a výsledok je takýto: ak zvýšia cenu o 6 e , budú mať jeden apartmán voľný. Ak zvýšia cenu o 12 e , už budú neobsadené dva apartmány atď.

Ž: *Už tomu začínam rozumieť. Rozhodujúce je teda to, koľkokrát zvýšia cenu o* 6 e *.*

U: Presne tak, preto navrhujem ako neznámu x označiť práve počet zvýšení ceny. Potom nová cena za apartmán bude $180 + 6x$.

Ž: *A zároveň počet obsadených apartmánov klesne na* $80 - x$*.*

U: Zhrniem to:

počet apartmánov	...	80
nájomné	...	180 e
nové nájomné	...	$180 + 6x$ e
počet obsadených apartmánov	...	$80 - x$
náklady na apartmán	...	18 e
zisk	...	y e .

Ž: *Idem sa pustiť do vyjadrenia zisku. Na každom z obsadených* $80 - x$ *apartmánov zarobia mesačne* $180 + 6x$ e *, teda spolu zarobia*

$$(80 - x)\,(180 + 6x)\,.$$

U: Uvažuješ dobre, len nezabudni na náklady spojené s prenajímaním apartmánov.

Ž: *Náklady musím samozrejme odčítať, ale len za tie apartmány, ktoré sú obsadené. Preto*

$$y = (80 - x)\,(180 + 6x) - 18\,(80 - x)\,.$$

U: Výborne, po roznásobení zátvoriek a úprave dostaneme takúto závislosť medzi ziskom realitnej kancelárie a počtom zvýšení ceny:

$$y = -6x^2 + 318x + 12\,960.$$

Ž: *Nájdená závislosť je kvadratická funkcia. Keďže pri* x^2 *je záporný koeficient, jej grafom je parabola obrátená nahor. Preto má určite maximum.*

U: Uvažuješ výborne, tvojou úlohou je teraz nájsť to maximum.

Ž: *Tak začnem hľadať vrchol paraboly. Najprv vyberiem pred zátvorku ten záporný koeficient,*

$$y = -6x^2 + 318x + 12\,960 = -6(x^2 - 53x - 2160).$$

V zátvorke pokračujem úpravou na štvorec:

$$x^2 - 53x - 2160 = x^2 - 53x + \left(\frac{53}{2}\right)^2 - \left(\frac{53}{2}\right)^2 - 2160.$$

Ďalej si pomôžem kalkulačkou

$$y = -6(x - 26{,}5)^2 + 17\,173{,}5.$$

Odtiaľ už vidím, že funkcia nadobúda maximum pre $x = 26{,}5$.

U: S tým súhlasím. Než však dáme definitívnu odpoveď, zamysli sa nad reálnosťou výsledku.

Ž: *No asi nebudú cenu zvyšovať* 26 *a pol krát.*

U: A hlavne nemôžu prenajať pol apartmánu. Preto aj keď sme to na začiatku nezdôraznili, má pre nás zmysel uvažovať iba o prirodzených hodnotách premennej x.

Ž: *Tak čo s tým teraz?*

U: Uvedom si, že pracujeme s kvadratickou funkciou. Ako si sám povedal, jej grafom je parabola obrátená nadol. Zároveň je aj súmerná podľa priamky prechádzajúcej jej vrcholom a rovnobežnej s osou y. Preto namiesto maxima v bode 26,5 budeme uvažovať o najbližšej celočíselnej hodnote. Vzhľadom na súmernosť to môže byť číslo 26 aj 27.

Ž: *A v oboch prípadoch bude zisk realitky rovnaký. Už mi ostáva len vypočítať novú cenu apartmánov. Tá bude*

$$180 + 6 \cdot 26 = 336\,€$$

alebo

$$180 + 6 \cdot 27 = 342\,€.$$

U: V prvom prípade budú mať obsadených 54 apartmánov a v druhom len 53. Ich zisk bude 17 172 €.

Ž: *Zaujímavé, to by som dopredu nepovedal. Zhruba tretinu apartmánov majú prázdnu a aj tak sa im to najviac oplatí.*

Úloha 3: *Cestovná kancelária organizuje zájazd pre najmenej* 25*-členné turistické skupiny. Ak má skupina presne* 25 *členov, zájazd pre jednu osobu stojí* 300 €*. Za každú ďalšiu osobu navyše cestovná kancelária znižuje cenu zájazdu pre jednu osobu o* 10 €*. Pri akom počte osôb na zájazde dosiahne cestovná kancelária najvyšší príjem?*

Výsledok: 27 alebo 28 osôb

Príklad 4: *Teleso je vrhnuté zo zeme zvisle nahor začiatočnou rýchlosťou v_0 v čase $t = 0\,s$. Z fyziky je známa závislosť vzdialenosti s od miesta vrhu na čase t vzťahom $s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, pričom g je tiažové zrýchlenie. Zistite maximálu výšku, do ktorej teleso vyletí.*

Ž: *Ak tomu dobre rozumiem, tak vyhodím zvisle nahor nejaké teleso, napríklad kameň. On bude chvíľu stúpať, ale potom začne padať naspäť na zem. A ja mám určiť do akej výšky vyletí.*

U: Vystihol si to dobre. V zadaní máme určenú závislosť medzi vzdialenosťou a časom pomocou vzťahu

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Pritom čas meriame od nuly až po tzv. dobu výstupu t_h, teda $t \in \langle 0; t_h \rangle$. Vedel by si povedať, o aký typ závislosti tu ide?

Ž: *Samozrejme, je to kvadratická funkcia.*

U: Určiť najväčšiu vzdialenosť telesa od zeme vlastne znamená nájsť maximum tejto funkcie.

Ž: *Maximum kvadratickej funkcie môžem určiť úpravou na štvorec.*

U: Dobre, tak sa do toho pusťme. Najprv vyber koeficient $-\frac{1}{2}g$ pred zátvorku, aby si dostal pri t^2 koeficient jedna.

Ž: *Vyberám:*

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}g\left(t^2 - \frac{2v_0}{g}t\right).$$

U: Výborne. Teraz vezmime členy v zátvorke a skúsme ich doplniť do štvorca. Použijeme známy vzorec

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2.$$

Ak ho porovnáš s našimi členmi, tak vidíš, že

$$A = t, \qquad 2AB = \frac{2v_0}{g}t.$$

Odtiaľ dostaneme

$$B = \frac{v_0}{g}.$$

Ďalej môžeš pokračovať aj sám.

Ž: *Potrebujem ešte doplniť B^2. Preto tam pridám a hneď aj odoberiem $B^2 = \left(\frac{v_0}{g}\right)^2$. Teda*

$$t^2 - \frac{2v_0}{g}t = t^2 - \frac{2v_0}{g}t + \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \left(\frac{v_0}{g}\right)^2.$$

U: Zatiaľ veľmi dobre, pokračuj.

Ž: *V ďalšom kroku už prvé tri členy nahradím podľa vzorca druhou mocninou. Je to zapísané v rámčeku.*

$$\boxed{t^2 - \frac{2v_0}{g}t + \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 - \left(\frac{v_0}{g}\right)^2.}$$

U: Môžeme sa vrátiť k vyjadreniu vzdialenosti.

Ž: *Dostanem tvar*

$$s = -\frac{g}{2}\left[\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 - \left(\frac{v_0}{g}\right)^2\right].$$

Odstránim zátvorku

$$s = -\frac{g}{2}\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

U: Keďže druhá mocnina reálneho čísla je vždy číslo nezáporné, tak platí

$$\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 \geqq 0,$$

odkiaľ

$$-\frac{g}{2}\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 \leqq 0.$$

Potom však pre vzdialenosť telesa od zeme platí

$$s \leqq \frac{v_0^2}{2g}.$$

Ž: *Takže teleso vyletí do výšky*

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

U: Vedel by si určiť dobu výstupu?

Ž: *Áno, je to* $t_h = \frac{v_0}{g}$. *Vtedy totiž výraz* $-\frac{g}{2}\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2$ *nadobúda najmenšiu hodnotu – nulu.*

U: Na záver si ešte ukážme, ako by sa táto úloha dala riešiť fyzikálnymi úvahami. Už sme spomenuli vzťah medzi vzdialenosťou a časom pri vrhu zvisle nahor:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Okrem toho však vo fyzike poznáme aj závislosť medzi rýchlosťou vrhnutého telesa a časom:

$$v = v_0 - gt.$$

Aká bude rýchlosť telesa v momente, keď dosiahne najvyšší bod svojej dráhy?

Ž: *Bude nulová, pretože sa vlastne na okamih zastaví a potom začne padať smerom dole.*

U: Teda pre čas výstupu platí

$$0 = v_0 - gt_h,$$

odkiaľ

$$t_h = \frac{v_0}{g}.$$

Výšku výstupu potom dostaneme jednoduchým dosadením do vzťahu na výpočet vzdialenosti. Uvedené to máme v rámčeku.

$$\boxed{h = v_0 t_h - \frac{g}{2} t_h^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}.}$$

Ž: *A dostali sme rovnaký výsledok,* $h = \frac{v_0^2}{2g}$.

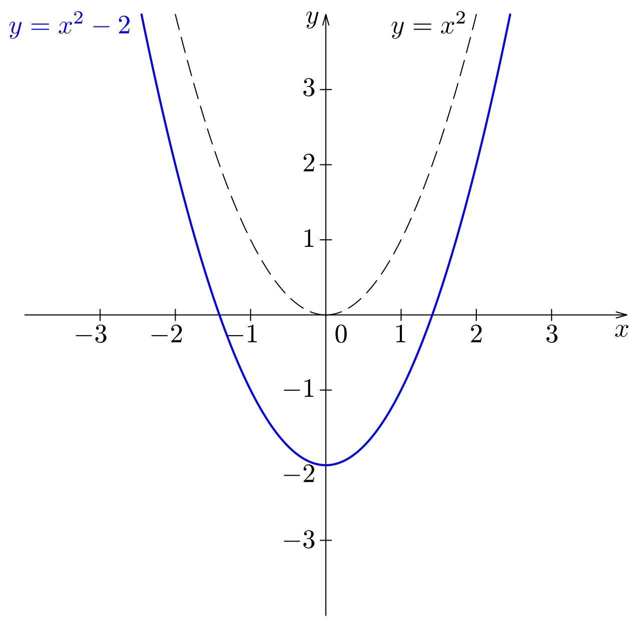
Príklad 5: *Zostrojte grafy funkcií* $f : y = |x^2 - 2|$ *a* $g : y = x^2 + 2|x|$.

Ž: *Pri prvej funkcii*

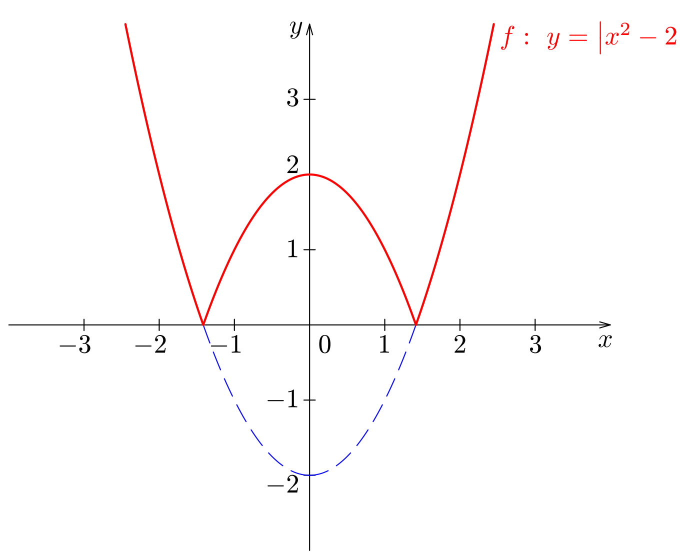
$$f : y = \left|x^2 - 2\right|$$

nebude ťažké graf zostrojiť. Celý predpis funkcie je totiž v absolútnej hodnote. Preto si najprv pripravím graf funkcie $y = x^2 - 2$. *Je to parabola, ktorej vrchol je posunutý do bodu* $[0; -2]$.

U: Je len upresním, že si posunul základnú parabolu $y = x^2$, ako to vidíme na obrázku.



Ž: *Teraz príde na rad absolútna hodnota. Tá spôsobí, že všetky kladné hodnoty ostanú zachované. Ale všetky záporné hodnoty sa zmenia na kladné. Preto tá časť grafu, ktorá leží pod osou* x *sa preklopí nahor podľa tejto osi. Výsledok je takýto:*



U: Je to dobre, šikovne si využil jednu z transformácií grafu funkcie. Konkrétne túto:
Graf funkcie $y = |f(x)|$ splýva s tou časťou grafu funkcie $y = f(x)$, kde $f(x) \geqq 0$. Tam, kde $f(x) < 0$, je graf funkcie $y = |f(x)|$ osovo súmerný s grafom funkcie $y = f(x)$ podľa osi x-ovej.

Ž: *Pri druhej funkcii*

$$g : y = x^2 + 2|x|$$

už nemôžem postupovať rovnako, lebo nie je celý predpis v absolútnej hodnote. Tak si riešenie rozdelím na dva prípady.

U: Aké?

Ž: *Prvý prípad je ten, keď výraz v absolútnej hodnote je nezáporný, teda keď*

$$x \geqq 0.$$

Vtedy môžem absolútnu hodnotu odstrániť, lebo $|x| = x$. *Predpis funkcie bude*

$$g_1 : y = x^2 + 2x.$$

U: Ak chceš zostrojiť graf tejto kvadratickej funkcie, urč jej nulové body a vrchol paraboly.

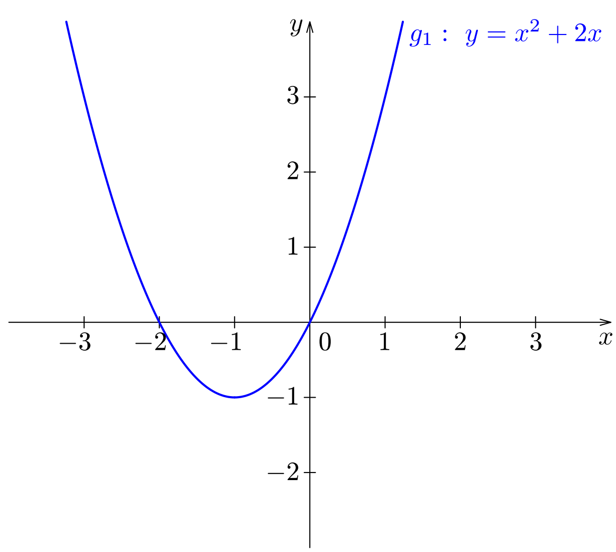
Ž: *Z rozkladu*

$$y = x^2 + 2x = x(x + 2)$$

ľahko určím nulové body. Sú to $x = 0$ *a* $x = -2$. *Súradnice vrcholu paraboly určím pomocou úpravy na štvorec:*

$$y = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x + 1)^2 - 1.$$

Odtiaľ $V[-1; -1]$. *Graf je na nasledujúcom obrázku:*



U: Ide ti to ako po masle, predpokladám, že nebudeš mať problémy ani s druhou časťou.

Ž: *Myslím, že nie. V druhom prípade je výraz v absolútnej hodnote záporný, teda*

$$x < 0.$$

Vtedy platí

$$|x| = -x,$$

preto predpis funkcie bude

$$g_2 : y = x^2 - 2x.$$

U: Opäť potrebuješ nulové body a vrchol.

Ž: *Z rozkladu*

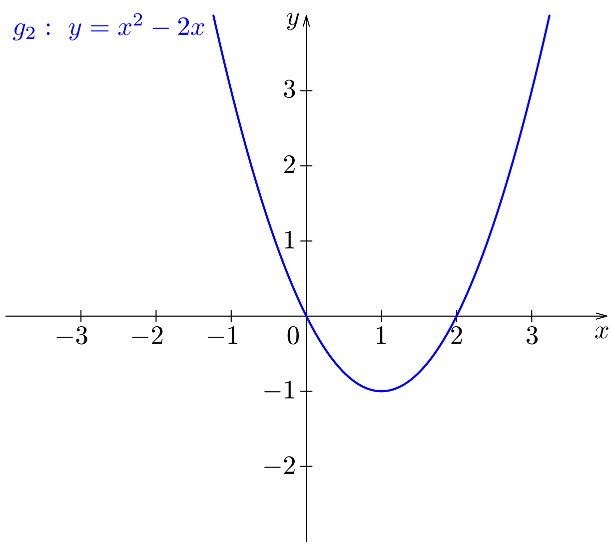
$$y = x^2 - 2x = x(x - 2)$$

určím nulové body. Sú to $x = 0$ a $x = 2$. Ešte potrebujem súradnice vrcholu paraboly. Postupujem ako predtým:

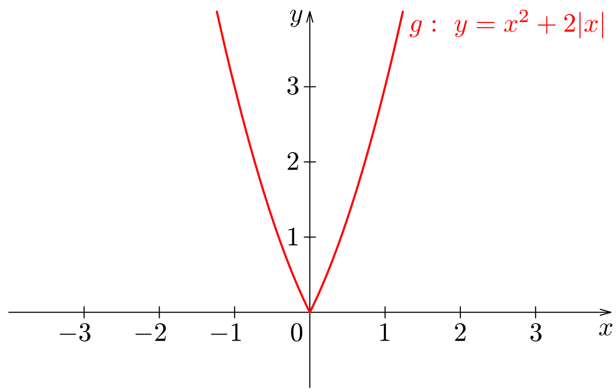
$$y = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1.$$

Vrchol je v bode $V[1; -1]$.

U: Veľmi dobre, na obrázku máme graf tejto druhej funkcie.



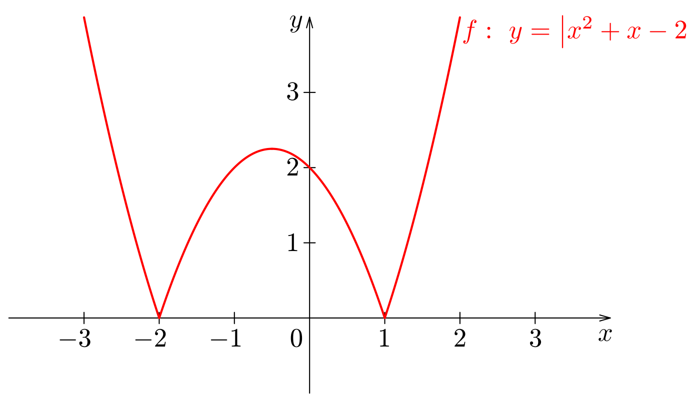
Ž: *Už to treba iba dokončiť. Takže červenou vyfarbím graf funkcie g_1 pre x nezáporné. A naopak graf funkcie g_2 vyznačím pre x záporné. Vznikne takýto výsledok:*

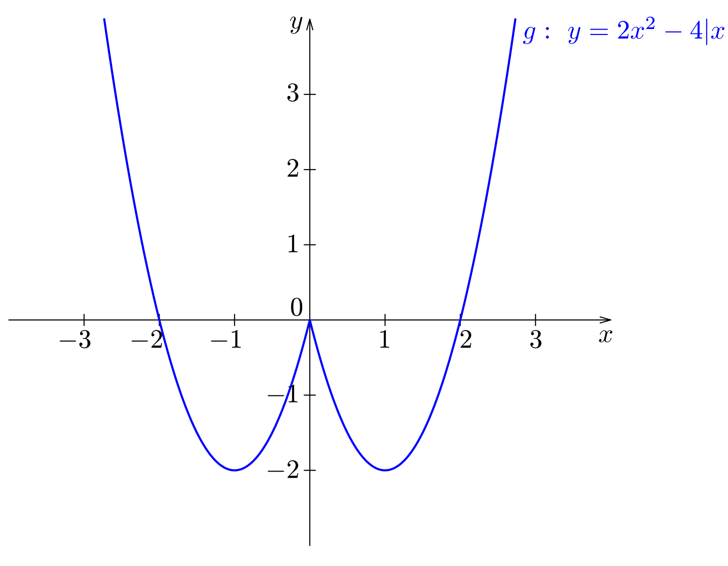


U: Na záver dodám, že sme pri zostrojovaní grafu funkcie $g: y = x^2 + 2\,|x|$ mohli vuyžiť aj to, že je to párna funkcia. Potom by stačilo zostrojiť graf funkcie g_1 pre nezáporné x a zobraziť ho osovo súmerne podľa osi y-ovej.

Úloha 5: *Zostrojte grafy funkcií* $f: y = |x^2 + x - 2|$ *a* $g: y = 2x^2 - 4\,|x|$.

Výsledok:





Príklad 6: *Zostrojte graf funkcie* $f : y = \left|x^2 - 4|x| - 5\right|$.

Ž: *To vyzerá poriadne zložito, absolútna hodnota v absolútnej hodnote.*

U: Výsledkom však bude celkom zaujímavý graf. Odkiaľ navrhuješ začať s riešením úlohy?

Ž: *Asi od vnútornej absolútnej hodnoty, tá sa zvykne odstraňovať ako prvá.*

U: Súhlasím.

Ž: *Rozdelím si to na dve časti. Najprv si poviem, že x je nezáporné a potom, že je záporné. Teda ak platí, že*

$$x \geqq 0,$$

tak platí aj to, že

$$|x| = x.$$

To znamená, že funkcia bude mať rovnicu

$$y = \left|x^2 - 4x - 5\right|.$$

U: Vieš zostrojiť graf takejto funkcie?

Ž: *S vašou pomocou určite. Najprv zostrojím graf funkcie*

$$f_1 : y = x^2 - 4x - 5.$$

K tomu potrebujem jej nulové body, ktoré nájdem pomocou Vietových vzťahov:

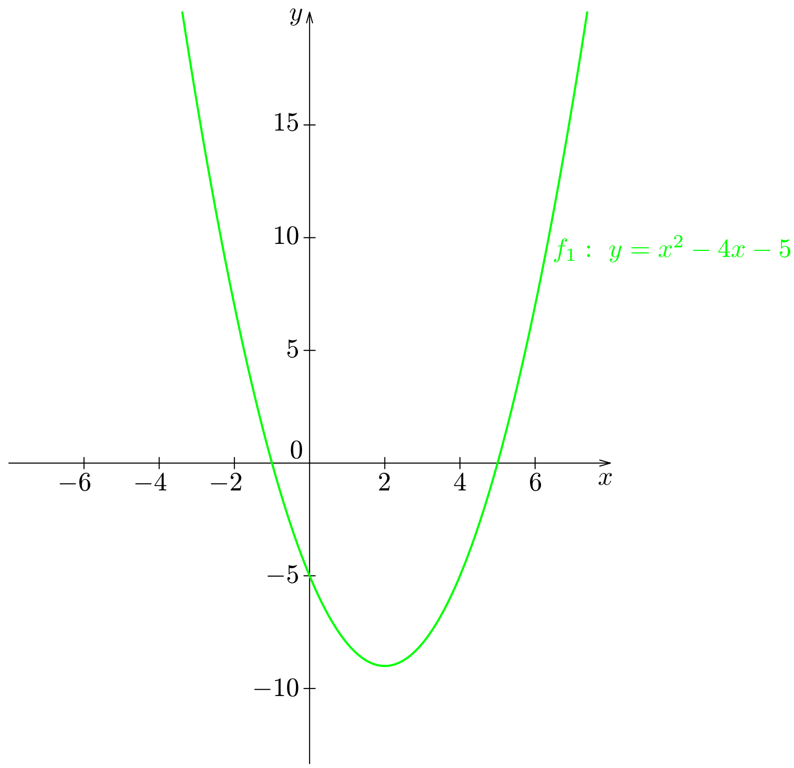
$$y = x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5).$$

Takže nulové body sú $x = -1$ a $x = 5$. Ešte pohľadám vrchol paraboly pomocou úpravy na štvorec:

$$y = x^2 - 4x - 5 = x^2 - 4x + 4 - 4 - 5 = (x - 2)^2 - 9.$$

Vrchol je v bode $[2; -9]$.

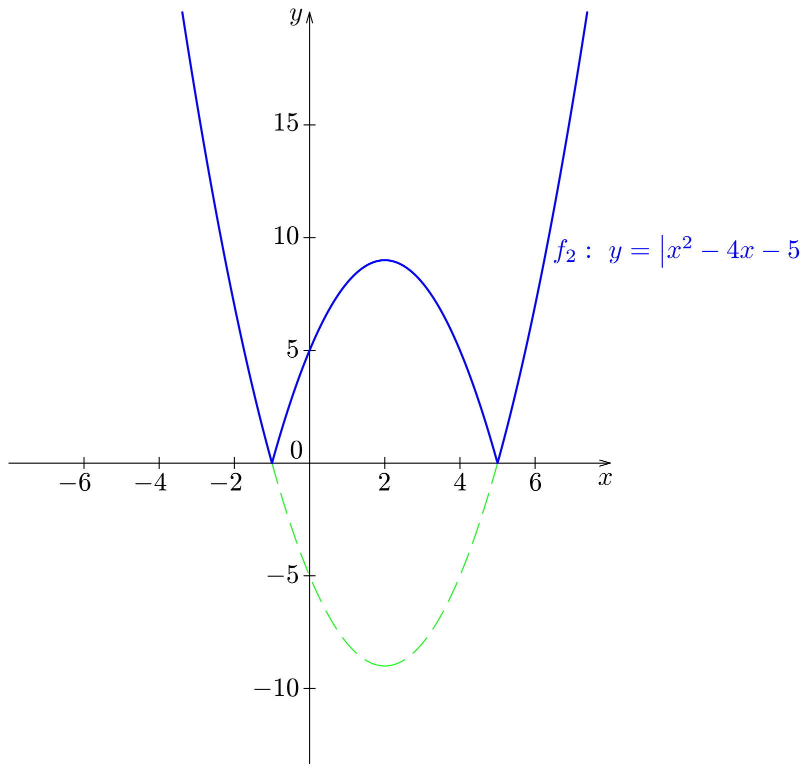
U: Výborne, na nasledujúcom obrázku máme graf tejto prvej funkcie.



My však potrebujeme graf s absolútnou hodnotou, nech teda

$$f_2 : y = \left|x^2 - 4x - 5\right| .$$

Graf tejto funkcie sa zhoduje s grafom funkcie f_1 v tej časti, ktorá sa nachádza nad osou x. Teda tam, kde platí $f_1(x) \geqq 0$. Ale v tej časti, kde je $f_1(x) < 0$, budú hodnoty funkcie f_2 nadobúdať opačné znamienka. A tak sa vlastne táto časť grafu zobrazí osovo súmerne podľa osi x. Graf funkcie f_2 je na ďalšom obrázku:



Ž: *Tým máme hotovú prvú časť a môžem ísť na druhú, kde to bude veľmi podobné. Uvažujem teraz o zápornom x. Ale ak platí, že*

$$x < 0,$$

tak platí, že

$$|x| = -x.$$

Preto funkcia bude mať rovnicu

$$y = \left|x^2 + 4x - 5\right|.$$

U: Uvažuješ veľmi dobre, zrejme by si rovnakým postupom ako pred chvíľou úlohu dokončil. Ja ťa však zastavím, pretože ti chcem ukázať rýchlejší postup.

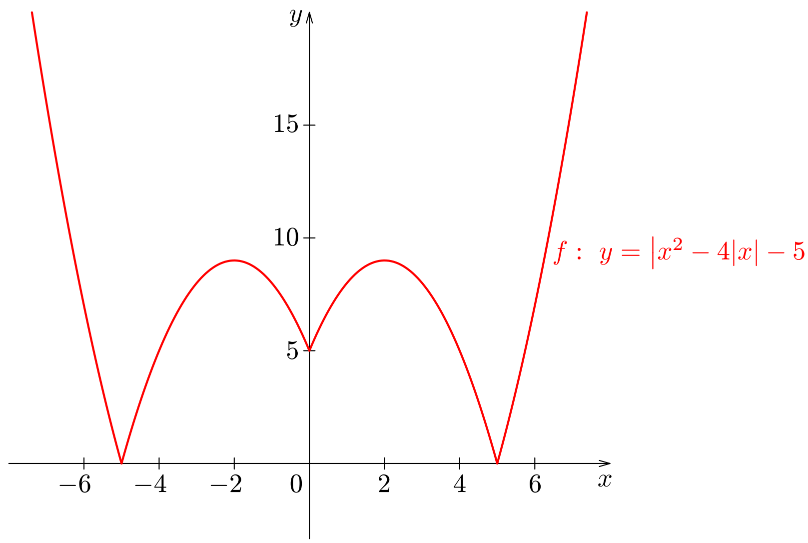
Ž: *Aký?*

U: Využijeme skutočnosť, že funkcia

$$f : y = \left|x^2 - 4\,|x| - 5\right|$$

je párna. To znamená, že jej graf je osovo súmerný podľa osi y. A my jednu polovicu grafu, tú pre nezáporné x, už máme.

Ž: *Už tomu rozumiem. Z posledného grafu funkcie f_2 vezmeme tú časť, ktorá je napravo od osi y-ovej. A zobrazíme ju osovo súmerne podľa osi y. Vznikne takéto čudo:*



Úloha 6: *Zostrojte graf funkcie* $g : y = \left|x^2 - 4\,|x| + 3\right|$.

Výsledok: