# Mocninové funkcie

***RNDr. Beáta Vavrinčíková***

**U**: V tejto téme sa budeme zaoberať jednou celou skupinou funkcií. Pripomeňme si, že funkcia popisuje určitú závislosť medzi dvoma veličinami. Na úvod mi povedz, ako závisí obsah štvorca od dĺžky strany štvorca.

**Ž**: *To je triviálne, platí*

$$S = a^2.$$

*Pritom $S$ je obsah štvorca, $a$ je jeho strana.*

**U**: Zrejme ľahko zvládneš aj závislosť objemu kocky od dĺžky jej hrany.

**Ž**: *Samozrejme, je daná vzťahom*

$$V = a^3,$$

*kde $V$ je objem kocky, $a$ je jej hrana.*

**U**: Výborne. Toto sú dve ukážky funkcií, s ktorými sa pomerne často stretávame. Ak prejdeme k obvyklému označeniu pomocou $x$ a $y$, tak ich predpisy môžeme vyjadriť takto:

$$y = x^2, \quad y = x^3.$$

**Ž**: *Dosť sa podobajú, nemohlo by ďalej ísť $y = x^4$?*

**U**: Mohlo, dokonca by som povedal, že si vystihol myšlienku. Budeme sa zaoberať funkciami, ktoré môžeme vyjadriť rovnicami typu

$$y = x^n.$$

Pretože sú vyjadrené v tvare mocniny so základom $x$, nazývame takéto funkcie mocninové. Vlastnosti týchto funkcií sa líšia podľa toho, aké číslo zvolíme za exponent $n$. Preto sa v ďalšom budeme zaoberať dvoma typmi mocninových funkcií. Najprv si povieme niečo o mocninových funkciách s prirodzeným exponentom a potom o mocninových funkciách so záporným celočíselným exponentom.

---

**Ž**: *Mocninové funkcie s prirodzeným exponentom budú určite tie, v ktorých je $n$ prirodzené číslo.*

**U**: Samozrejme. Aký je ich definičný obor?

**Ž**: *Keď sa pozriem na funkcie $y = x^2$ a $y = x^3$, tak vidím, že za $x$ môžem dosadiť akékoľvek číslo. Teda definičným oborom je celá množina reálnych čísel.*

**U**: Môžem teda povedať definíciu:
***Mocninovou funkciou s prirodzeným exponentom nazývame každú funkciu danú rovnicou***

$$f : y = x^n,$$

***kde $n \in \mathbb{N}$. Jej definičný obor je množina $\mathbb{R}$.***
Pre $n = 1$ dostávame špeciálny prípad, lineárnu funkciu $y = x$.

**Ž**: *A pre* $n = 2$ *zase kvadratickú funkciu* $y = x^2$.

**U**: Osobitné pomenovanie máme ešte aj pre funkciu s rovnicou $y = x^3$. Nazýva sa kubická funkcia.

**Ž**: *Ako vyzerá jej graf?*

**U**: To si o chvíľu ukážeme. Aby sme mohli porovnávať vlastnosti mocninových funkcií, pripravme si do tabuľky niektoré funkčné hodnoty. A to hneď pre prvých šesť funkcií, teda pre $y = x^n$, ak $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

**Ž**: *Vezmem si na pomoc kalkulačku a vyplňam. Niektoré hodnoty musím zaokrúhliť. V rámčeku je celá tabuľka.*

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $-0{,}25$ | $0$ | $0{,}25$ | $0{,}5$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x$ | $-2$ | $-1$ | $-0{,}5000$ | $-0{,}2500$ | $0$ | $0{,}2500$ | $0{,}5000$ | $1$ | $2$ |
| $y = x^2$ | $4$ | $1$ | $0{,}2500$ | $0{,}0625$ | $0$ | $0{,}0625$ | $0{,}2500$ | $1$ | $4$ |
| $y = x^3$ | $-8$ | $-1$ | $-0{,}1250$ | $-0{,}0156$ | $0$ | $0{,}0156$ | $0{,}1250$ | $1$ | $8$ |
| $y = x^4$ | $16$ | $1$ | $0{,}0625$ | $0{,}0039$ | $0$ | $0{,}0039$ | $0{,}0625$ | $1$ | $16$ |
| $y = x^5$ | $-32$ | $-1$ | $-0{,}0313$ | $-0{,}0009$ | $0$ | $0{,}0009$ | $0{,}0313$ | $1$ | $32$ |
| $y = x^6$ | $64$ | $1$ | $0{,}0156$ | $0{,}0002$ | $0$ | $0{,}0002$ | $0{,}0156$ | $1$ | $64$ |

---

**U**: Na základe tejto tabuľky skús objaviť niektoré vlastnosti mocninových funkcií.

**Ž**: *Hneď som si všimol, že v riadkoch* $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ *nie sú záporné hodnoty.*

**U**: Vedel by si vysvetliť prečo?

**Ž**: *Pravdaže, druhá mocnina ľubovoľného reálneho čísla je číslo nezáporné. To isté platí aj pre štvrtú a šiestu mocninu. A vlastne pre každú párnu mocninu.*

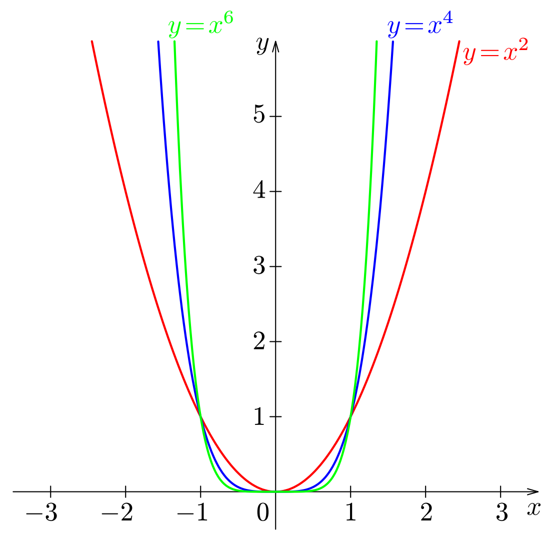
**U**: Tým si zdôvodnil, že obor hodnôt mocninovej funkcie s párnym prirodzeným mocniteľom je množina všetkých nezáporných čísel.

**Ž**: *Zatiaľ čo pre funkcie s nepárnym mocniteľom sú v tabuľke aj kladné aj záporné hodnoty. Myslím si, že oborom hodnôt tu bude celá množina reálnych čísel.*

**U**: Máš pravdu. Vzhľadom na uvedené odlišnosti si pripravme dva obrázky. Do prvého zostrojíme grafy funkcií

$$y = x^2, \quad y = x^4, \quad y = x^6.$$

Budeme hľadať ďalšie spoločné vlastnosti týchto funkcií pomocou nasledujúceho obrázka.




---

**Ž**: *Tak teraz to už pekne vidno! Grafy sú veľmi podobné. Všetky krivky sa stretávajú v bodoch* $[0;0]$, $[1;1]$ *a* $[-1;1]$. *Všetky funkcie sú najprv klesajúce na intervale* $(-\infty;0\rangle$ *a potom rastúce na intervale* $\langle 0;\infty)$.

**U**: Veľmi dobre, tým si zvládol monotónnosť funkcií, čo ďalej?

**Ž**: *Ďalej vidím, že všetky funkcie majú v bode nula lokálne minimum a sú zdola ohraničené.*

**U**: Sú prosté?

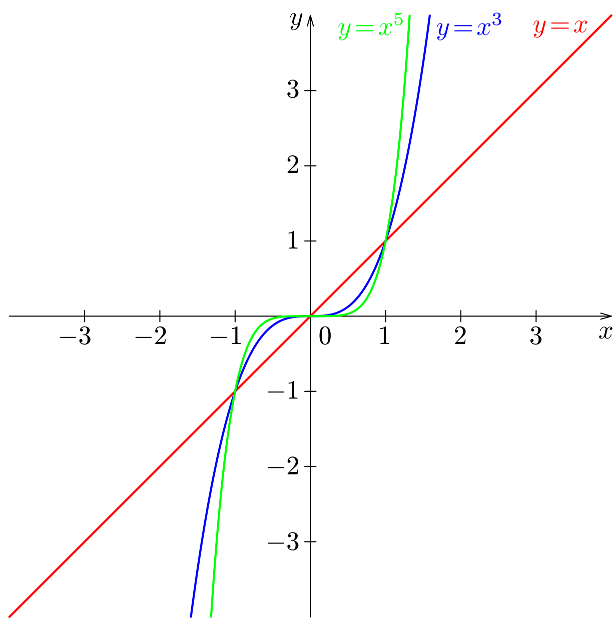
**Ž**: *Nie sú, pretože napríklad v bodoch* $1$ *a* $-1$ *majú rovnaké hodnoty. Všimol som si ale niečo iné – všetky grafy sú súmerné podľa osi* $y$. *Teda by to mali byť párne funkcie.*

**U**: Áno, a nie je ťažké to zdôvodniť. Pre ľubovoľné $x$ z definičného oboru je aj $-x$ z definičného oboru. Keďže exponent $n$ je párne číslo, tak platí

$$f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x).$$

Môžeme prejsť ku druhej skupinke, k funkciám s nepárnym prirodzeným mocniteľom. Najprv sa pozrime na grafy funkcií

$$y = x, \quad y = x^3, \quad y = x^5.$$




---

**Ž**: *Krivky $y = x^3$ a $y = x^5$ sú veľmi podobné, len tá priamka $y = x$ tam nesedí.*

**U**: Je to jediná priamka, všetky ďalšie grafy mocninových funkcií s nepárnym prirodzeným mocniteľom sú krivky podobného tvaru. Vlastnosti však majú všetky rovnaké.

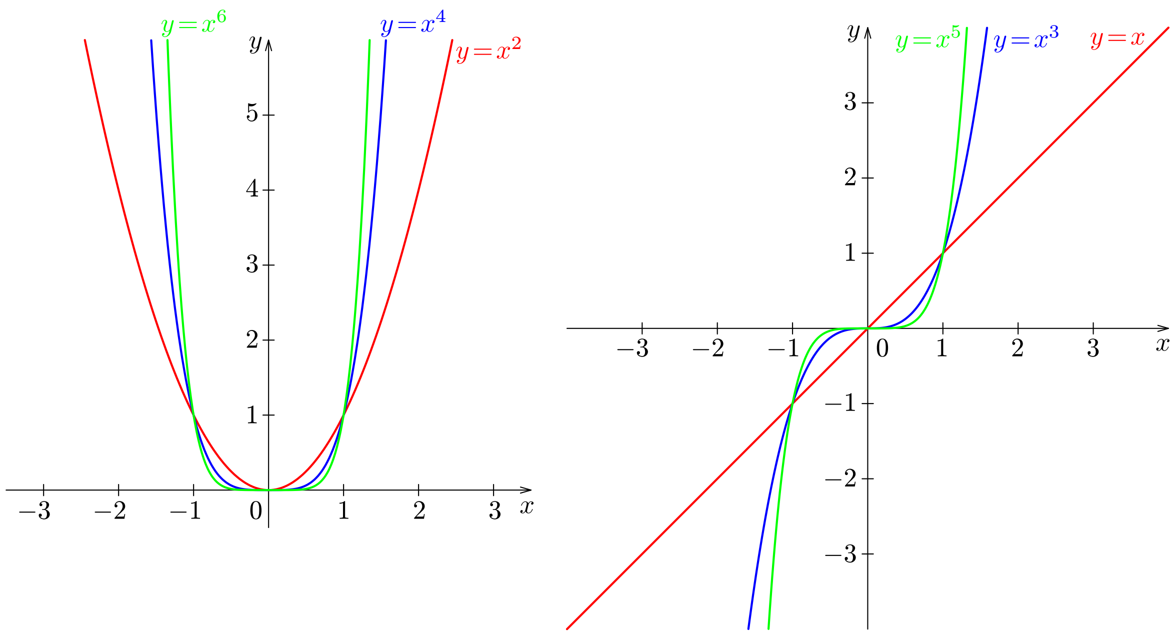
**Ž**: *Áno, všetky sú to rastúce funkcie, neohraničené, bez extrémov. Sú prosté a grafy prechádzajú bodmi $[0;0]$, $[1;1]$, $[-1;-1]$. Zabudol som na niečo?*

**U**: Ešte párnosť alebo nepárnosť.

**Ž**: *Aha. Grafy sú súmerné podľa bodu $[0;0]$, teda sú to nepárne funkcie. To sa bude ľahko pamätať – pre párne $n$ sú funkcie párne a pre nepárne $n$ sú nepárne.*

**U**: Tu kdesi tkvie aj pôvod pomenovania. Napokon v nasledujúcom prehľade zhrnieme všetko, čo sme zistili o mocninových funkciách s prirodzeným mocniteľom.

Vlastnosti mocninovej funkcie $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$:




| $n$ – párne | $n$ – nepárne |
|---|---|
| 1. definičný obor $\mathcal{D} = \mathbb{R}$; | 1. definičný obor $\mathcal{D} = \mathbb{R}$; |
| 2. obor hodnôt $\mathcal{H} = \langle 0; \infty)$; | 2. obor hodnôt $\mathcal{H} = \mathbb{R}$; |
| 3. párna; | 3. nepárna; |
| 4. je rastúca na intervale $\langle 0; \infty)$, klesajúca na intervale $(-\infty; 0\rangle$; | 4. je rastúca; |
| 5. má minimum v bode $x = 0$; | 5. nemá extrémy; |
| 6. je zdola ohraničená; | 6. nie je ohraničená; |
| 7. nie je prostá; | 7. je prostá; |
| 8. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$. | 8. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$. |

**U**: Teraz sa zaoberajme druhou veľkou skupinou, mocninovými funkciami so záporným celočíselným exponentom.

**Ž**: *Sú to funkcie ako* $y = x^{-1}$ *alebo* $y = x^{-2}$?

**U**: Presne tak. Čo by si vedel povedať o ich definičnom obore?

**Ž**: *Podľa pravidiel pre počítanie s mocninami môžem zapísať, že*

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

*Takisto*

$$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

*Odtiaľ už je jasné, že za $x$ nemôžem dosadiť nulu. Takže definičným oborom týchto funkcií bude množina všetkých reálnych čísel okrem nuly.*

**U**: Správne. Zhrniem definíciu:

***Mocninovou funkciou so záporným celočíselným exponentom nazývame každú funkciu danú rovnicou***

$$f : y = x^n,$$

***kde $n \in \mathbb{Z}^-$. Definičným oborom je množina $\mathbb{R} - \{0\}$.***

**Ž**: *Sú aj tu nejaké špeciálne prípady?*

**U**: Áno, pre $n = -1$ dostávame nepriamu úmernosť $y = \frac{1}{x}$. Aby sme sa mohli ďalej rozprávať o vlastnostiach týchto funkcií, pripravme si do tabuľky niektoré funkčné hodnoty. Urobme tak pre prvých šesť funkcií, teda pre $y = x^n$, ak $n \in \{-1; -2; -3; -4; -5; -6\}$.

**Ž**: *Zase si pomôžem kalkulačkou, budem aj zaokrúhľovať. V rámčeku je tabuľka so šiestimi hodnotami pre každú funkciu.*

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0{,}5$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^{-1}$ | $-0{,}500$ | $-1$ | $-2$ | $2$ | $1$ | $0{,}500$ |
| $y = x^{-2}$ | $0{,}250$ | $1$ | $4$ | $4$ | $1$ | $0{,}250$ |
| $y = x^{-3}$ | $-0{,}125$ | $-1$ | $-8$ | $8$ | $1$ | $0{,}125$ |
| $y = x^{-4}$ | $0{,}063$ | $1$ | $16$ | $16$ | $1$ | $0{,}063$ |
| $y = x^{-5}$ | $-0{,}031$ | $-1$ | $-32$ | $32$ | $1$ | $0{,}031$ |
| $y = x^{-6}$ | $0{,}016$ | $1$ | $64$ | $64$ | $1$ | $0{,}016$ |

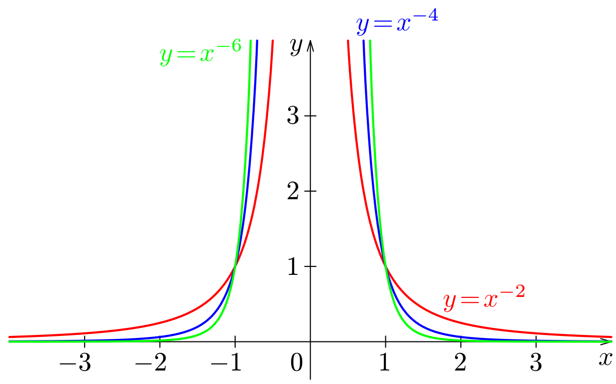
---

**Ž**: *Z tabuľky je jasné, že inak sa správajú funkcie s párnym a inak s nepárnym mocniteľom.*

**U**: Máš pravdu, preto si aj ich grafy rozdelíme. Pomocou hodnôt v tabuľke najprv zostrojme grafy funkcií

$$y = x^{-2}, \quad y = x^{-4}, \quad y = x^{-6}.$$

Máme ich na nasledujúcom obrázku.




**U**: Z grafu urč vlastnosti týchto mocninových funkcií s párnym záporným celočíselným mocniteľom.

**Ž**: *Funkcie nadobúdajú iba kladné hodnoty. Na intervale* $(-\infty; 0)$ *sú rastúce, na intervale* $(0; \infty)$ *sú klesajúce. Ďalej sú ohraničené zdola, nemajú extrémy. Nie sú prosté, zato sú párne. To sa ale dalo čakať, keď hovoríme o párnom exponente.*

**U**: Môžeme si všimnúť aj polohu grafov voči súradnicovým osiam.

**Ž**: *Grafy sa približujú k obom osiam, ale nikdy sa ich nedotknú.*

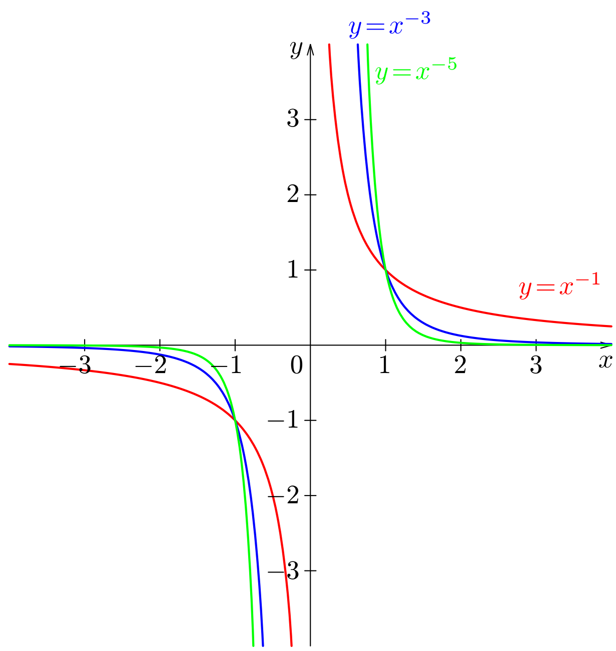
**U**: Presne tak. Osi $y$-ovej sa nedotknú preto, lebo naše funkcie nie sú definované pre $x = 0$. Osi $x$-ovej sa nedotknú preto, lebo prevrátená hodnota kladného čísla nie je nikdy rovná nule. V takomto prípade hovoríme, že súradnicové osi predstavujú asymptoty grafu funkcie. Ešte sa pozri, či vidíš nejaké význačné body, ktorými prechádzajú všetky grafy.

**Ž**: *Ale áno, sú to body* $[1; 1]$ *a* $[-1; 1]$.

---

**U**: Ostáva nám posledná skupina – mocninové funkcie so záporným nepárnym celočíselným mocniteľom. Najprv si pripravíme obrázok s grafmi funkcií

$$y = x^{-1}, \qquad y = x^{-3}, \qquad y = x^{-5}.$$

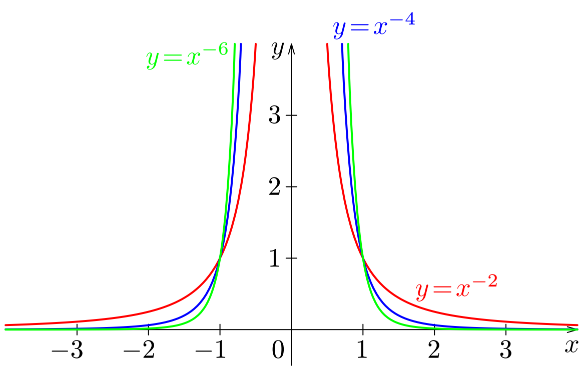


**Ž**: *Tak sa môžem pustiť do vlastností. Oborom hodnôt je celá množina reálnych čísel s výnimkou nuly. Všetky funkcie sú nepárne, klesajúce na intervaloch* $(-\infty; 0)$ *a* $(0; \infty)$. *Ďalej sú prosté, nie sú ohraničené a nemajú extrémy. Všetky prechádzajú bodmi* $[1; 1]$ *a* $[-1; -1]$.

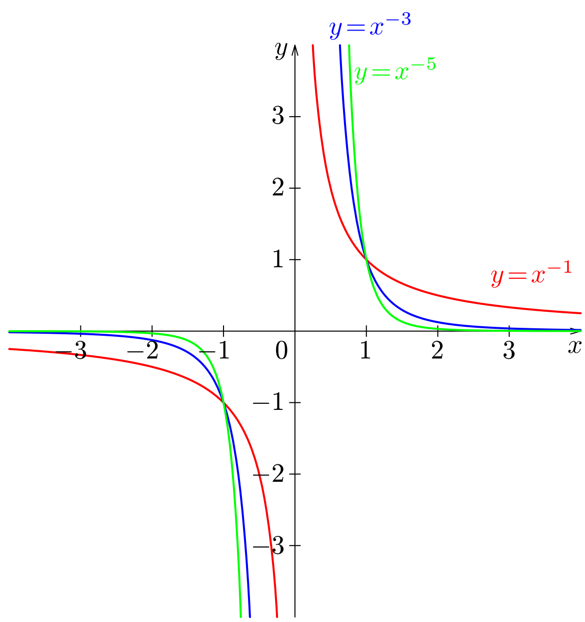
**U**: Zvládol si to vynikajúco. Už len dodám, že obidve súradnicové osi opäť predstavujú asymptoty. Všetko, čo sme povedali o mocninových funkcách so záporným celočíselným exponentom, zhrnieme v nasledujúcom prehľade.

Vlastnosti mocninovej funkcie $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}^-$:

$n$ – párne




$n$ – nepárne




| $n$ – párne | $n$ – nepárne |
|---|---|
| 1. definičný obor $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$; | 1. definičný obor $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$; |
| 2. obor hodnôt $\mathcal{H} = (0; \infty)$; | 2. obor hodnôt $\mathcal{H} = \mathbb{R} - \{0\}$; |
| 3. párna; | 3. nepárna; |
| 4. je rastúca na intervale $(-\infty; 0)$, klesajúca na intervale $(0; \infty)$; | 4. je klesajúca na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$; |
| 5. nemá extrémy; | 5. nemá extrémy; |
| 6. je zdola ohraničená; | 6. nie je ohraničená; |
| 7. nie je prostá; | 7. je prostá; |
| 8. $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$; | 8. $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$; |
| 9. súradnicové osi sú asymptoty. | 9. súradnicové osi sú asymptoty. |

**U**: Hovorili sme o funkciách typu $y = x^n$, ak $n$ bolo kladné alebo záporné celé číslo. Porozmýšľaj, ako by to dopadlo, ak by bolo $n = 0$.

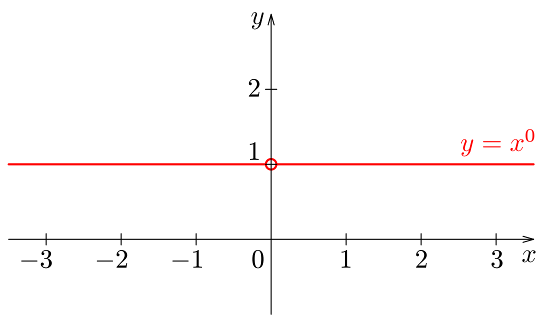
**Ž**: *Vznikla by funkcia s rovnicou*

$$y = x^0.$$

*To je ľahké. Keďže $x^0 = 1$, vznikla konštantná funkcia a jej grafom je priamka.*

**U**: Veruže nemáš úplnú pravdu. Mocnina s exponentom nula je totiž definovaná iba pre nenulové čísla. Preto definičným oborom funkcie $y = x^0$ je $\mathbb{R} - \{0\}$.

**Ž**: *Potom ale grafom musí byť priamka bez jedného bodu, na obrázku je znázornený prázdnym krúžkom.*



**Príklad 1**:

1. *Určte číselnú hodnotu koeficienta* $a$*, pre ktorú graf funkcie* $f: y = ax^3$ *prechádza bodom* $[2; 10]$.
2. *Pre funkciu* $g: y = x^4$ *určte všetky hodnoty premennej* $x$*, pre ktoré platí* $g(x) = 81$.

**U**: V prvej úlohe je daná kubická funkcia

$$f: y = ax^3.$$

Hodnotu koeficienta $a$ máš určiť tak, aby graf tejto funkcie prechádzal bodom $[2; 10]$.

**Ž**: *To by nemalo byť ťažké, pretože ak graf prechádza bodom* $[2; 10]$*, tak do rovnice funkcie dosadím za* $x$ *číslo* 2 *a za* $y$ *číslo* 10*. Dostávam takúto rovnicu:*

$$10 = a \cdot 2^3.$$

*Teda*

$$10 = a \cdot 8,$$

*odkiaľ*

$$a = \frac{5}{4}.$$

**U**: Výborne. V druhej časti je daná mocninová funkcia

$$g: y = x^4.$$

Máš určiť všetky hodnoty premennej $x$, pre ktoré platí $g(x) = 81$.

**Ž**: *Začnem zápisom* $g(x) = 81$*, ktorý prepíšem do tvaru*

$$x^4 = 81.$$

*A hneď vidím, že riešením je číslo* 3*, pretože* $3^4 = 81$.

**U**: Počkaj, počkaj, priveľmi si sa rozbehol. Súhlasím s tým, že $3^4 = 81$, je to však jediné riešenie? Vráťme sa pekne k rovnici $x^4 = 81$ a začnime ju upravovať. Najprv prenesieme číslo 81 na ľavú stranu.

**Ž**: *Dostanem rovnicu*

$$x^4 - 81 = 0.$$

*Čo ďalej?*

**U**: Použi známy vzorec

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

**Ž**: *Teda ľavú stranu rozložím na súčin*

$$(x^2 + 9)(x^2 - 9) = 0.$$

*Ešte raz použijem ten istý vzorec a dostávam*

$$(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3) = 0.$$

*Rovnica* $x^2 + 9 = 0$ *ale nemá reálne korene. Preto vznikli len dve riešenia* $x = 3$ *a* $x = -3$.

**U**: Tentoraz to je v poriadku. Existujú dve hodnoty reálnej premennej $x$, pre ktoré funkcia $g$ nadobúda hodnotu 81.

**Úloha 1**: *Pre funkciu* $f : y = x^3$ *určte všetky hodnoty premennej* $x$*, pre ktoré platí:*
*a)* $f(x) = 64$
*b)* $f(x) = -8.$

**Výsledok**: a) 4; b) $-2$

**Príklad 2**:

1. *V továrni na hračky vyrábajú kocky z borovicového dreva s hustotou* $\varrho = 0{,}5\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. *Zapíšte funkciu, ktorá vyjadruje závislosť hmotnosti kocky od dĺžky jej hrany. Načrtnite jej graf.*

2. *V továrni na konzervy vyrábajú valcové plechovky s objemom* 500 *ml. Zapíšte funkciu, ktorá vyjadruje závislosť výšky v plechovky od polomeru r jej podstavy. Načrtnite jej graf.*

**Ž**: *V prvej úlohe je reč o drevených kockách z dreva s hustotou* $0{,}5\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. *Ak si dobre pamätám, tak hustota* $\varrho$ *sa počíta podľa vzťahu*

$$\varrho = \frac{m}{V},$$

*kde* $m$ *je hmotnosť a* $V$ *je objem telesa.*

**U**: Pamätáš si to dobre.

**Ž**: *To som rád. V našom prípade potrebujeme objem kocky. Ten je daný vzťahom*

$$V = a^3,$$

*kde* $a$ *je dĺžka hrany kocky. Ak to spojím, dostanem vyjadrenie*

$$\varrho = \frac{m}{a^3}.$$

*Odtiaľ*

$$m = \varrho\, a^3.$$

*Hustotu borovicového dreva máme danú, preto hľadaná funkcia je*

$$m = 0{,}5\, a^3.$$

**U**: Zdôrazním, že hrana kocky je v tomto prípade daná v centimetroch a hmotnosť kocky v gramoch. Získali sme kubickú funkciu, máš načrtnúť jej graf. Najprv si však uvedom, aký je definičný obor tejto funkcie.

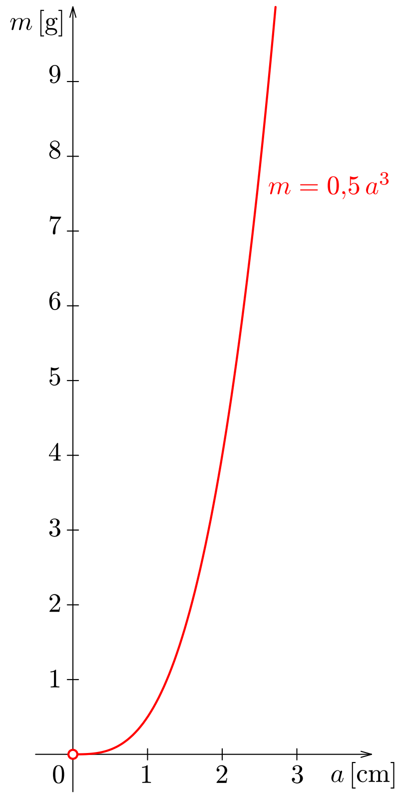
**Ž**: *Zrejme hrana kocky nemôže byť záporné číslo a ani nula. Teoreticky by hrana kocky mohla byť ľubovoľne veľká, ale prakticky ...*

**U**: Máš pravdu, veľmi veľké kocky by nikto nevyrábal, už aj pre ich hmotnosť. Nám však stačí teoretický pohľad.

**Ž**: *Tak si pripravím do tabuľky niekoľko hodnôt, uvedené sú v rámčeku.*

| $a$ [cm] | 0,8 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m = 0{,}5\, a^3$ [g] | 0,256 | 0,5 | 1,69 | 4 | 7,81 | 13,5 |

*Hodnoty z tabuľky potom nanesiem do súradnicovej sústavy a zostrojím graf funkcie. Tu to je:*




---

**U**: Zvládol si to veľmi dobre, poďme na druhú časť.

**Ž**: *Tentokrát sú to plechovky v tvare valca s objemom* 500 *ml. Viem, že objem valca sa počíta podľa vzťahu*

$$V = \pi r^2 v,$$

*kde $r$ je polomer podstavy a $v$ je výška valca.*

**U**: Asi by bolo vhodné použiť iné jednotky pre objem.

**Ž**: *Ak by polomer aj výška boli dané v centimetroch, tak objem bude v cm$^3$. Lenže mililitre a centimetre kubické predstavujú to isté. Preto naše plechovky majú objem* 500 *cm$^3$.*

**U**: Dobre. Vráťme sa k vzorcu na výpočet objemu valca. Tvojou úlohou je vyjadriť výšku valca ako funkciu polomeru.

**Ž**: *To nie je ťažké,*

$$v = \frac{V}{\pi r^2}.$$

*Ešte dosadím za objem valca danú hodnotu a mám výsledok:*

$$v = \frac{500}{\pi r^2}.$$

**U**: Opäť poznamenajme, že táto funkcia je definovaná len pre kladné čísla.

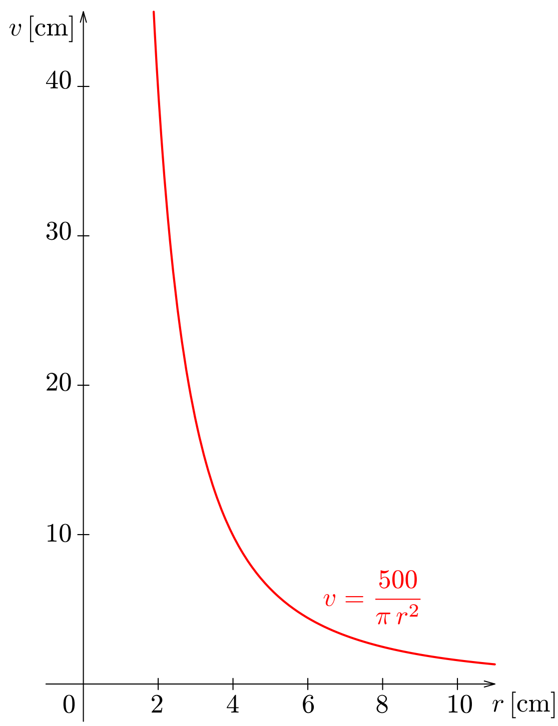
**Ž**: *Aký je to typ funkcie?*

**U**: Môžeme ju zaradiť medzi mocninové funkcie. Jej rovnicu zapíšem v tvare $v = \frac{500}{\pi} \cdot r^{-2}$. Potom je zrejmé, že je to mocninová funkcia so záporným celočíselným mocniteľom, ktorá však obsahuje navyše koeficient $\frac{500}{\pi}$. Ten spôsobí, že graf sa bude trochu líšiť od grafu funkcie $y = x^{-2}$.

**Ž**: *Tak si za pomoci kalkulačky pripravím tabuľku s niekoľkými hodnotami:*

| $r$ [cm] | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v = \frac{500}{\pi} \cdot r^{-2}$ [cm] | 159,1 | 39,79 | 9,95 | 4,42 | 2,49 | 1,59 |

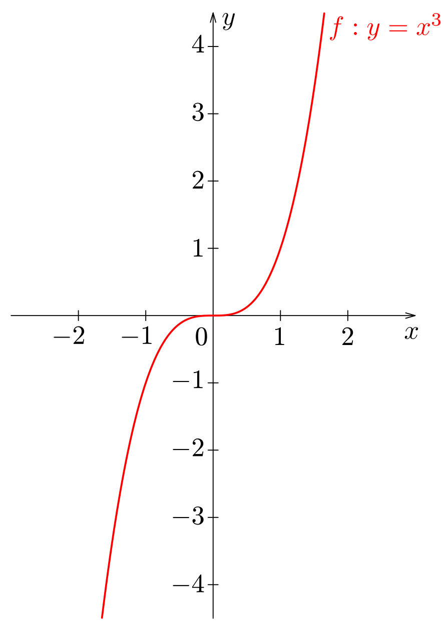
**U**: Ostáva nám už len graf, je na nasledujúcom obrázku:



**Príklad 3**: *Pomocou grafu funkcie $f : y = x^3$ zostrojte grafy funkcií $f_1 : y = x^3 - 2$, $f_2 : y = (x-2)^3$, $f_3 : y = -x^3$ a $f_4 : y = |x^3|$.*

**U**: Pri riešení tejto úlohy môžeš šikovne využiť svoje vedomosti o transformáciách funkcií.

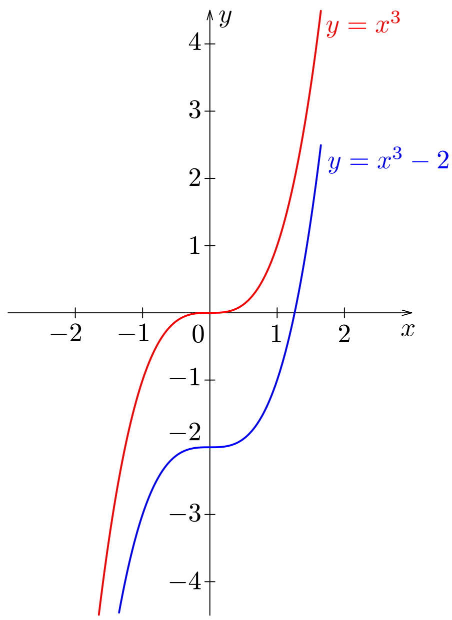
**Ž**: *Graf funkcie $f : y = x^3$ poznám, je to mocninová funkcia s nepárnym prirodzeným mocniteľom. Jej graf prechádza bodom $[0; 0]$ a je na nasledujúcom obrázku:*




**U**: Dobre, a teraz skús do toho istého obrázka prikresliť graf funkcie

$$f_1 : y = x^3 - 2.$$

**Ž**: *To nie je ťažké, pretože funkcia $f_1$ priradí každému reálnemu číslu hodnotu o 2 menšiu než funkcia $f$. To znamená, že graf funkcie $f_1$ vznikne posunutím grafu funkcie $f$ o 2 dieliky nadol pozdĺž osi $y$-ovej. Vyzerá to takto:*




---

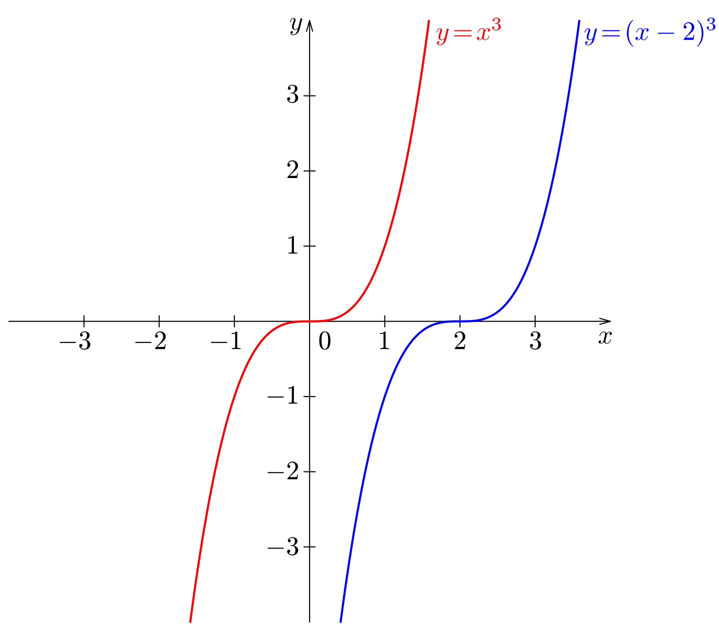
**U**: Veľmi dobre. Ktorú transformáciu použiješ pri zostrojovaní grafu funkcie

$$f_2 : y = (x-2)^3?$$

**Ž**: *Tentokrát posuniem graf funkcie $f$ v smere osi $x$-ovej. Ak v predpise funkcie $f$ nahradím $x$ výrazom $x - 2$, tak dostanem predpis funkcie $f_2$. To znamená, že graf funkcie $f_2$ dostanem tak, že posuniem o dva dieliky doprava graf červenej funkcie.*

**U**: Čiže graf funkcie $f_2$ nebude prechádzať bodom $[0; 0]$, ale bodom $[2; 0]$. O tom sa môžeme ľahko presvedčiť dosadením do predpisu funkcie.

**Ž**: *Na ďalšom obrázku už je zostrojený modrý graf funkcie $f_2$:*



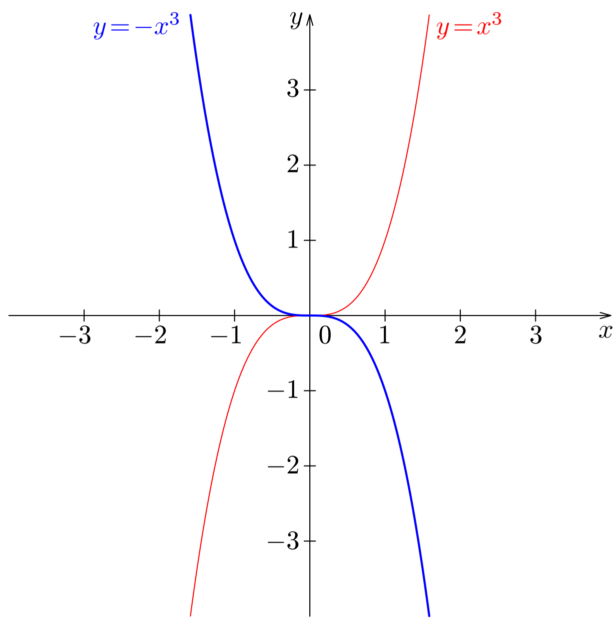
**U**: Tretia funkcia v poradí má pomerne jednoduchý predpis

$$f_3 : y = -x^3.$$

**Ž**: *Od funkcie $f$ sa líši iba znamienkom. To znamená, že všetky hodnoty funkcie $f_3$ budú opačné čísla k hodnotám funkcie $f$. To, čo bolo kladné, bude záporné a naopak. Preto sa celý graf preklopí podľa osi $x$. Čo bolo nad ňou, bude pod ňou a naopak.*

**U**: Dôjde teda k zobrazeniu grafu funkcie $f$ v osovej súmernosti podľa $x$-ovej osi.

**Ž**: *Výsledok je na obrázku:*




---

**U**: Ostáva nám ešte posledný graf pre funkciu

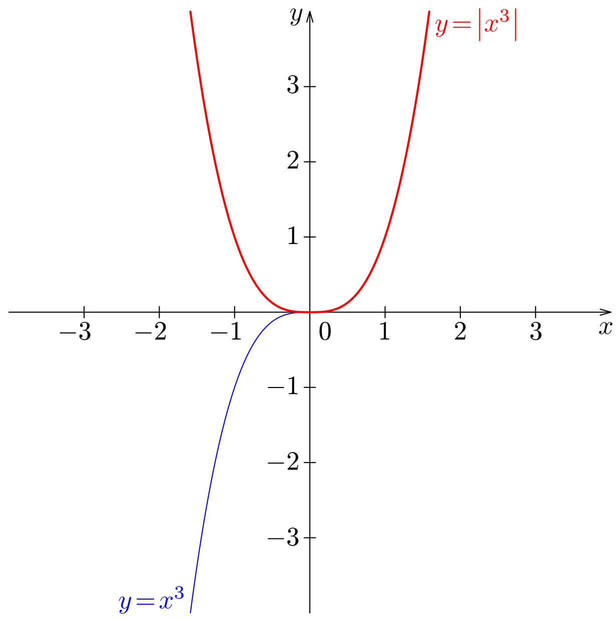
$$f_4 : y = \left|x^3\right|.$$

**Ž**: *Výraz $x^3$ sa nachádza v absolútnej hodnote. To spôsobí, že tá časť grafu funkcie $f$, ktorá leží nad osou $x$ sa nezmení. To preto, lebo absolútna hodnota kladného čísla je to isté číslo.*

**U**: Zatiaľ uvažuješ veľmi dobre. Ako to bude so zápornými hodnotami?

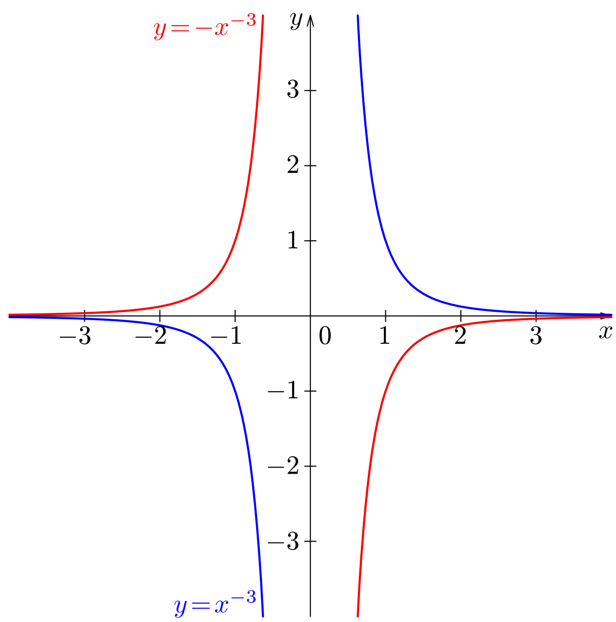
**Ž**: *Viem, že absolútna hodnota záporného čísla je číslo k nemu opačné. Preto tá časť grafu funkcie $f$, ktorá ležala pod osou $x$, sa zobrazí nahor v osovej súmernosti podľa osi $x$.*

**U**: Áno. Mohli by sme to povedať aj tak, že graf funkcie $f_4 : y = |x^3|$ je zložený z dvoch častí. Pre nezáporné $x$ z grafu funkcie $f : y = x^3$ a pre záporné $x$ z grafu funkcie $f_3 : y = -x^3$. Výsledok je na poslednom obrázku:




**Úloha 3**: *Pomocou grafu funkcie* $f : y = x^{-3}$ *zostrojte graf funkcie* $g : y = -x^{-3}$.

**Výsledok**:



**Príklad 4**: *Rozhodnite o pravdivosti nasledovných tvrdení:*

*a) funkcia* $f : y = |x^3|$ *je párna;*
*b) funkcia* $g : y = x^{-3}$ *nemá extrémy;*
*c) funkcia* $h : y = -x^4$ *je zhora ohraničená;*
*d) funkcia* $i : y = x^5$ *je prostá.*

**U**: V tejto úlohe máš rozhodnúť o niektorých vlastnostiach mocninových funkcií.

**Ž**: *V časti a) je daná funkcia*

$$f : y = \left|x^3\right|.$$

*Mám zistiť, či je párna. Ak by tam nebola absolútna hodnota, tak by to bola určite nepárna funkcia. Ale takto neviem.*

**U**: Poďme na to cez definíciu. Ak má byť funkcia $f$ párna, musia byť splnené dve podmienky. Prvá o tom, že pre každé $x$ z definičného oboru aj $-x$ patrí do definičného oboru.

**Ž**: *To platí, pretože definičným oborom funkcie $f$ je množina všetkých reálnych čísel.*

**U**: Druhá podmienka hovorí o tom, že pre každé $x$ z definičného oboru má platiť $f(-x) = f(x)$. Over to.

**Ž**: *Použijem jednoduché úpravy, uvedené sú v rámčeku.*

$$\boxed{f(-x) = \left|(-x)^3\right| = \left|-x^3\right| = x^3 = f(x).}$$

*Vyšlo to, takže funkcia $f$ je párna.*

---

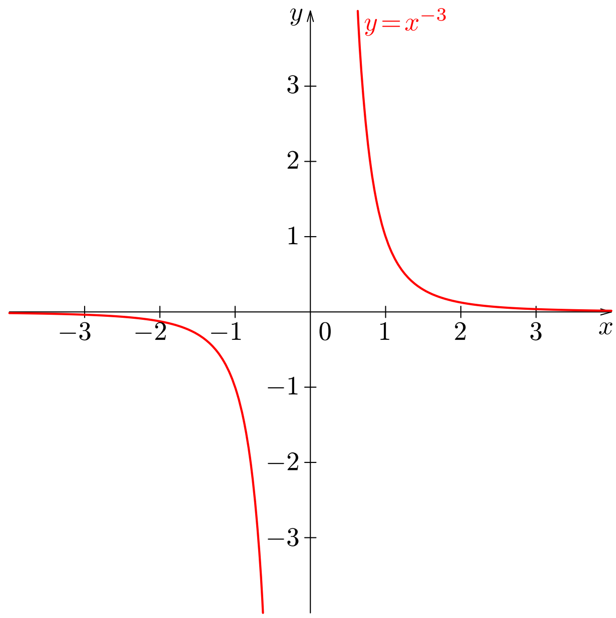
**U**: V časti b) máme tvrdenie, že funkcia

$$g : y = x^{-3}$$

nemá extrémy.

**Ž**: *Toto je prípad mocninovej funkcie so záporným celočíselným mocniteľom a tie nikdy nemajú extrémy. Takže je to pravda.*

**U**: Overiť si to môžeme na grafe tejto funkcie:




**Ž**: *V časti c) mám rozhodnúť, či funkcia*

$$h : y = -x^4$$

*je zhora ohraničená. Najprv začnem funkciou $y = x^4$. Je to mocninová funkcia s párnym prirodzeným mocniteľom a tie sú vždy zdola ohraničené.*

**U**: Vedel by si povedať hodnotu dolného ohraničenia?

**Ž**: *Je to číslo nula, pretože párna mocnina akéhokoľvek reálneho čísla je vždy číslo nezáporné. Lenže vo funkcii h je v predpise ešte mínus. Preto všetky hodnoty tejto funkcie budú čísla menšie nanajvýš rovné nule. To znamená, že funkcia $h : y = -x^4$ je zhora ohraničená číslom nula.*

**U**: Výborne. Ostáva posledná funkcia

$$i : y = x^5.$$

Máš rozhodnúť, či je prostá.

**Ž**: *Je, pretože všetky mocninové funkcie s nepárnym mocniteľom sú prosté.*

**Úloha 4**: *Rozhodnite o pravdivosti nasledovných tvrdení:*

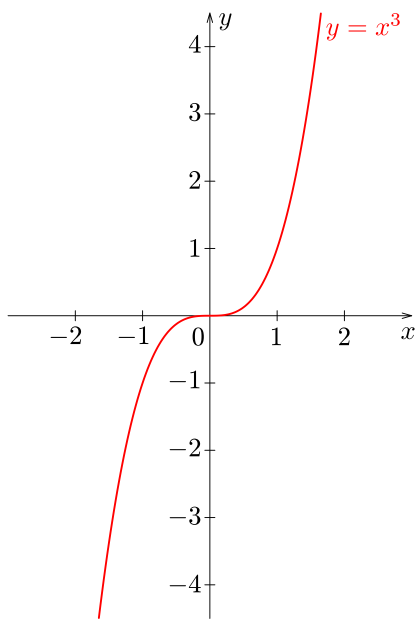
*a) funkcia $f : y = x^7$ je nepárna;*
*b) funkcia $g : y = x^{-2}$ nemá extrémy;*
*c) funkcia $h : y = x^4$ je zdola ohraničená;*
*d) funkcia $i : y = x^5$ je klesajúca;*
*e) funkcia $i : y = |x^{11}|$ je prostá.*

**Výsledok**: a) áno; b) áno; c) áno; d) nie; e) nie

**Príklad 5**: *Porovnajte podľa veľkosti nasledujúce dvojice čísel. Využite pri tom grafy mocninových funkcií.*
*a)* $0{,}5^3$, $(-0{,}5)^3$;
*b)* $\left(-\frac{1}{4}\right)^5$, $\left(-\frac{1}{5}\right)^5$;
*c)* $(7{,}1)^{-4}$, $(7{,}2)^{-4}$;
*d)* $(-4{,}8)^{-3}$, $(4{,}8)^{-3}$.

**Ž**: *Mám využiť graf mocninovej funkcie na porovnanie čísel* $0{,}5^3$ *a* $(-0{,}5)^3$. *Bude to graf funkcie* $y = x^3$?

**U**: Áno, pretože obe čísla sú v tvare tretej mocniny. Uvažujeme preto o mocninovej funkcii s nepárnym prirodzeným exponentom, na obrázku je jej graf.




**Ž**: *Je to rastúca funkcia. Preto z nerovnosti*

$$0{,}5 > -0{,}5$$

*vyplýva nerovnosť*

$$0{,}5^3 > (-0{,}5)^3.$$

**U**: Súhlasím. Mohli sme to zdvôvodniť aj tým, že táto kubická funkcia pre kladné $x$ nadobúda kladné hodnoty, ale pre záporné $x$ záporné hodnoty. A tie – ako vieme – sú menšie než kladné.
Poďme na ďalšiu dvojicu, čísla $\left(-\frac{1}{4}\right)^5$ a $\left(-\frac{1}{5}\right)^5$.

**Ž**: *Teraz si pomôžem funkciou* $y = x^5$. *Je to opäť mocninová funkcia s nepárnym prirodzeným mocniteľom, preto jej graf je veľmi podobný grafu funkcie* $y = x^3$. *Nemusím ho ani kresliť, stačí zase využiť skutočnosť, že je to rastúca funkcia. A keďže*

$$-\frac{1}{4} < -\frac{1}{5},$$

*tak platí*

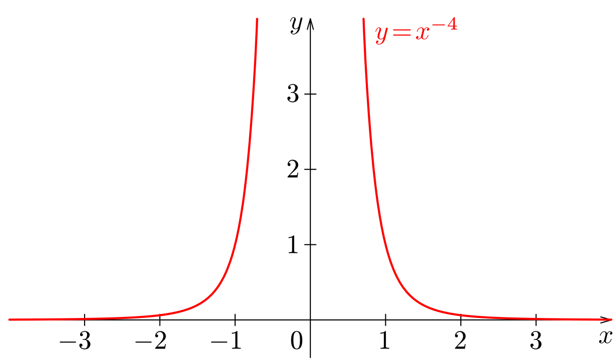
$$\left(-\frac{1}{4}\right)^5 < \left(-\frac{1}{5}\right)^5.$$

---

**U**: Pokračujeme treťou dvojicou čísel $(7{,}1)^{-4}$ a $(7{,}2)^{-4}$.

**Ž**: *Obidve čísla sú umocnené na mínus štvrtú. Preto si vezmem na pomoc funkciu* $y = x^{-4}$.

**U**: Správne. Je to mocninová funkcia so záporným párnym exponentom, jej graf je na nasledujúcom obrázku.




**Ž**: *Mám porovnať hodnoty v číslach* 7,1 *a* 7,2. *To sú čísla kladné a vidím na grafe, že tam je táto funkcia klesajúca. Preto síce je*

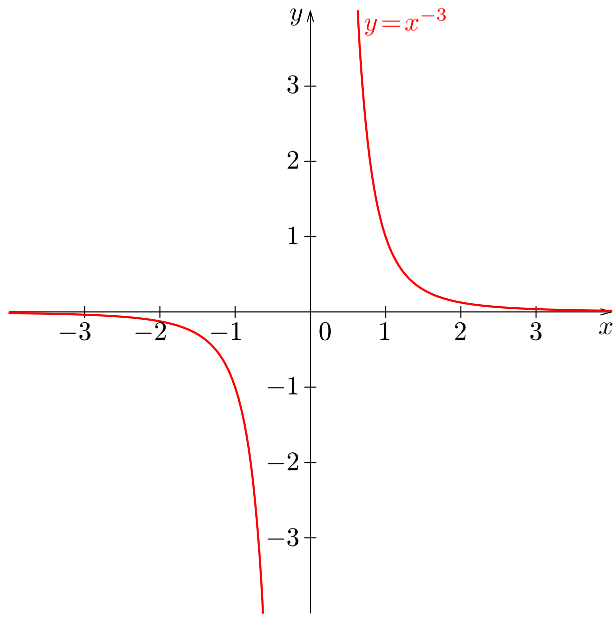
$$7{,}1 < 7{,}2,$$

*ale po umocnení bude*

$$(7{,}1)^{-4} > (7{,}2)^{-4}.$$

**U**: Veľmi dobre, ostala posledná dvojica čísel $(-4{,}8)^{-3}$ a $(4{,}8)^{-3}$.

**Ž**: *Postupujem analogicky. Začnem od grafu funkcie* $y = x^{-3}$.




*Tentoraz mám do činenia s mocninovou funkciou s nepárnym záporným exponentom. Vidím na grafe, že pre záporné $x$ nadobúda záporné hodnoty, ale pre kladné $x$ nadobúda kladné hodnoty. Preto platí*

$$(-4{,}8)^{-3} < (4{,}8)^{-3}.$$

**Úloha 5**: *Porovnajte podľa veľkosti nasledujúce dvojice čísel. Využite pri tom grafy mocninových funkcií.*

*a)* $\left(\frac{2}{3}\right)^5$, $\left(\frac{2}{7}\right)^5$;
*b)* $(0{,}5)^{-2}$, $(-0{,}5)^{-2}$;
*c)* $(-3{,}1)^{-4}$, $(-3{,}2)^{-4}$;
*d)* $(-4{,}8)^3$, $4{,}8^3$.

**Výsledok**:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 > \left(\frac{2}{7}\right)^5$;
b) $(0{,}5)^{-2} = (-0{,}5)^{-2}$;
c) $(-3{,}1)^{-4} > (-3{,}2)^{-4}$;
d) $(-4{,}8)^3 < 4{,}8^3$