Logaritmická funkcia

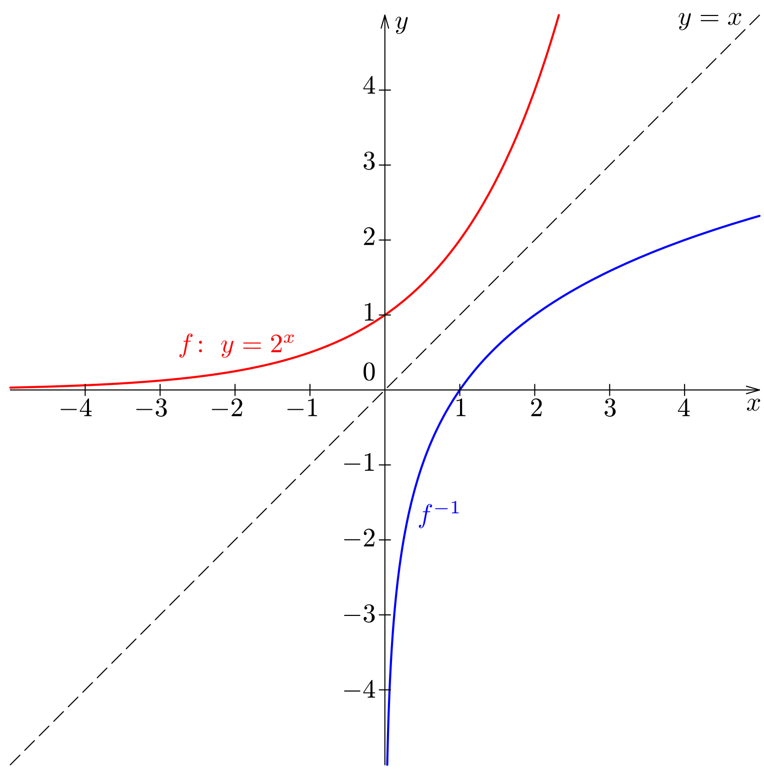
RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: Jednou z vlastností exponenciálnej funkcie je to, že je prostá. A jednou z vlastností prostých funkcií je to, že k nim existujú inverzné funkcie. Vedel by si načrtnúť graf funkcie f^{-1}, t. j. inverznej funkcie k exponenciálnej funkcii $f : y = 2^x$?

Ž: *Myslím, že by sa to dalo urobiť. Pamätám si totiž, že graf funkcie f a graf k nej inverznej funkcie f^{-1} sú krivky súmerne združené podľa priamky $y = x$.*

U: Veľmi dobre.

Ž: *Preto si najprv zostrojím exponenciálnu krivku, ktorá je grafom funkcie $f : y = 2^x$. Potom pridám priamku s rovnicou $y = x$. A podľa tejto priamky prenesiem osovo súmerne graf funkcie f. To, čo vzniklo, je graf inverznej funkcie f^{-1}. Celé to vidíme na obrázku.*



U: Výborne. Získali sme graf novej funkcie, ktorá je charakteristická práve tým, že je inverzná k exponenciálnej funkcii. Nazýva sa logaritmická funkcia. V našom prípade logaritmická funkcia so základom 2, čo zapisujeme takto:

$$f^{-1} : y = \log_2 x.$$

Ž: *Ten základ je rovný dvom preto, lebo exponenciálna funkcia mala základ dva?*

U: Áno, základ je ten istý. Všeobecne inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii

$$f : y = a^x$$

je logaritmická funkcia

$$f^{-1} : y = \log_a x.$$

Pravda, pre základ musia platiť isté podmienky.

Ž: *Ach áno, základ exponenciálnej funkcie musí byť číslo kladné, ale nesmie to byť jednotka. Zrejme tie isté podmienky platia aj pre základ logaritmickej funkcie.*

U: Pravdaže. Ešte by bolo dobré určiť definičný obor logaritmickej funkcie.

Ž: *Keď sa dívam na jej graf tak vidím, že celý leží napravo od osi x-ovej. Preto je logaritmická funkcia definovaná iba na množine kladných reálnych čísel.*

U: Máš pravdu. Zdôvodniť to môžeme aj tým, že definičný obor inverznej funkcie je rovný oboru hodnôt pôvodnej funkcie. Keďže exponenciálna funkcia nadobúda len kladné hodnoty, tak logaritmická funkcia je potom definovaná len pre kladné čísla.

Ž: *Na túto súvislosť som si veru nespomenul.*

U: Myslím, že je načase sformulovať presnú definíciu logaritmickej funkcie.
Logaritmickou funkciou so základom a ***nazývame funkciu inverznú k exponenciálnej funkcii***

$$f : y = a^x,$$

kde $a > 0$***,*** $a \neq 1$***. Jej definičný obor je interval*** $(0; \infty)$***. Zapisujeme ju***

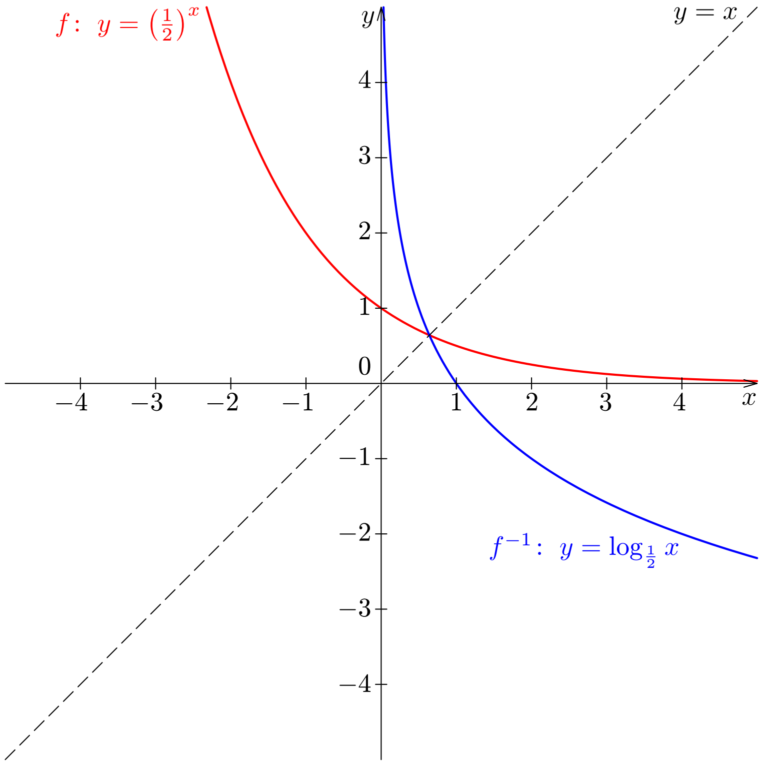
$$f^{-1} : y = \log_a x.$$

Grafom logaritmickej funkcie je logaritmická krivka.

U: Aby sme mohli porovnávať vlastnosti rôznych logaritmických funkcií, priprav ešte graf funkcie

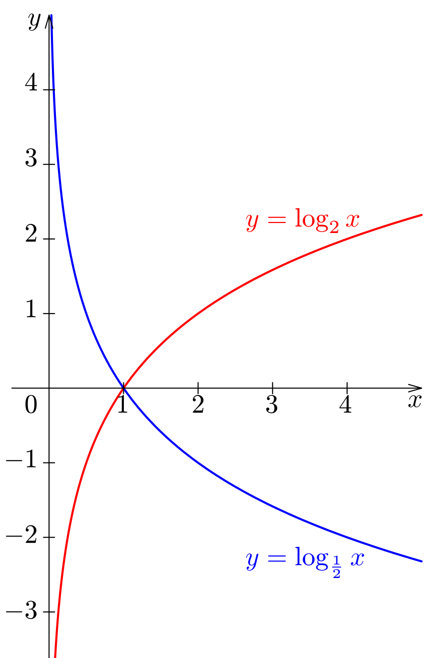
$$y = \log_{\frac{1}{2}} x.$$

Ž: *Postupujem ako pred chvíľou. Najprv zostrojím graf funkcie $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Je ním klesajúca exponenciála. Potom pridám priamku s rovnicou $y = x$. Napokon podľa tejto priamky prenesiem osovo súmerne graf funkcie f. Na nasledujúcom obrázku je výsledok – vznikol mi graf funkcie $f^{-1} : y = \log_{\frac{1}{2}} x$.*



U: Máš to dobre. Ak teraz nakreslíme do jedného obrázka grafy funkcií $y = \log_2 x$ a $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, určite objavíš jednoduchú súvislosť.

Ž: *Naprv si to nakreslím, tu to je:*



Myslím že je to dosť jasné – oba grafy sú súmerné podľa osi x-ovej.

U: Zovšeobecníme to: grafy funkcií $y = \log_a x$ a $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ sú súmerné podľa x-ovej osi.

Ž: *Na poslednom obrázku je zaujímavé to, že jeden graf predstavuje rastúcu funkciu a druhý klesajúcu.*

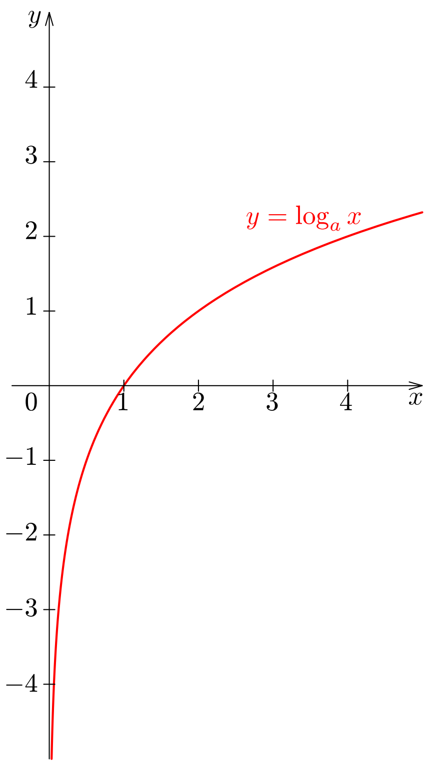
U: Tento rozdiel je – podobne ako u exponenciálnej funkcie – závislý od základu a. Ak pre základ logaritmickej funkcie platí $a > 1$, potom je funkcia rastúca. Ak $a \in (0; 1)$, je funkcia $y = \log_a x$ klesajúca. Monotónnosť je zároveň jediná vlastnosť, v ktorej sa logaritmické funkcie odlišujú v závislosti od základu. Vymenuj ďalšie vlastnosti týchto funkcií.

Ž: *Obor hodnôt je množina všetkých reálnych čísel. Funkcie nemajú žiadne extrémy, nie sú ohraničené , nie sú párne ani nepárne. Ale zato sú prosté. Všetky grafy prechádzajú bodom* $[1; 0]$.

U: Veľmi dobre. Ešte doplním, že y-ová os predstavuje asymptotu grafu funkcie. Prehľadne máme v rámčeku zhrnuté všetky vlastnosti logaritmických funkcií.

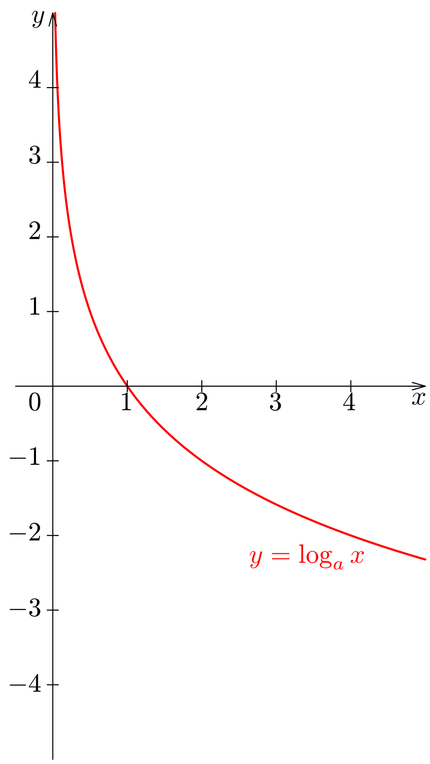
Vlastnosti logaritmickej funkcie $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$:

$a > 1$



1. grafom je logaritmická krivka;
2. definičný obor $\mathcal{D} = (0; \infty)$;
3. obor hodnôt $\mathcal{H} = \mathbb{R}$;
4. nie je párna ani nepárna;
5. je rastúca;
6. nemá extrémy;
7. nie je ohraničená;
8. je prostá;
9. $f(1) = 0$;
10. os y je asymptota grafu.

$0 < a < 1$



1. grafom je logaritmická krivka;
2. definičný obor $\mathcal{D} = (0; \infty)$;
3. obor hodnôt $\mathcal{H} = \mathbb{R}$;
4. nie je párna ani nepárna;
5. je klesajúca;
6. nemá extrémy;
7. nie je ohraničená;
8. je prostá;
9. $f(1) = 0$;
10. os y je asymptota grafu.

U: Na záver sa ešte pristavme pri tzv. prirodzenej logaritmickej funkcii.

Ž: *Tak to bude určite inverzná funkcia k prirodzenej exponenciálnej funkcii*

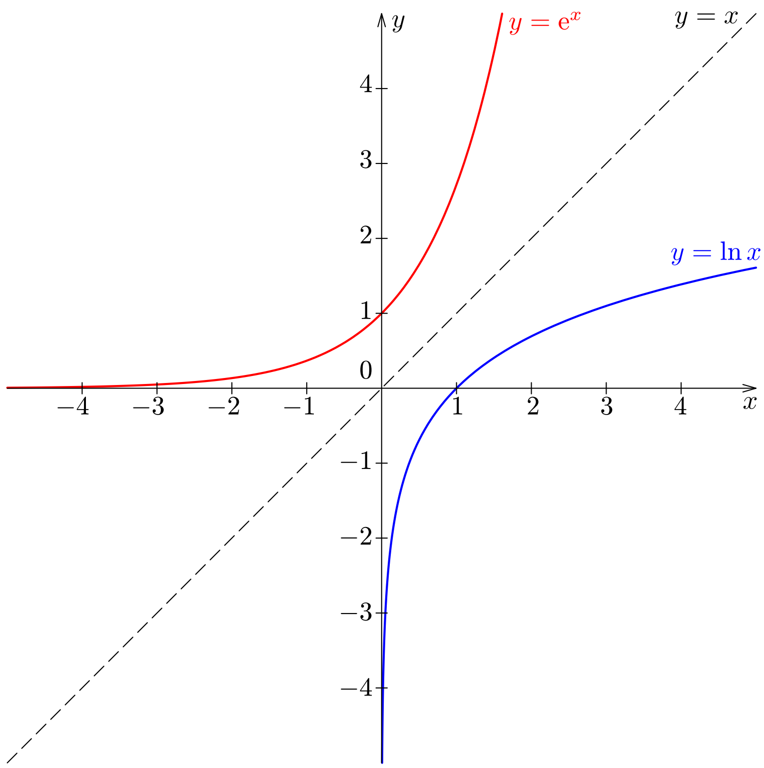
$$y = e^x,$$

kde e je Eulerovo číslo.

U: Máš pravdu, používame však pri nej trochu iné označenie. Namiesto logaritmu so základom e píšeme len

$$y = \ln x.$$

Na poslednom obrázku máme grafy oboch prirodzených funkcií – exponenciálnej $y = e^x$ aj logaritmickej $y = \ln x$.



Samostatné označenie sa zaužívalo aj pre tzv. dekadické logaritmy so základom 10. Vtedy jednoducho desiatku vynecháme. Čiže namiesto

$$y = \log_{10} x$$

píšeme

$$y = \log x.$$

Príklad 1: *Určte definičný obor funkcií:*

$$f_1: \quad y = \log\left(x^2 - x - 6\right),$$
$$f_2: \quad y = \frac{1}{\log(x-3)},$$
$$f_3: \quad y = 1 - \ln x,$$
$$f_4: \quad y = \sqrt{\log_2 \frac{x}{3}}.$$

Ž: *Určiť definičný obor funkcie znamená určiť podmienky pre neznámu x. A to tak, aby všetky výrazy, ktoré máme v predpise funkcie, mali zmysel.*

U: Správne. Všetky štyri funkcie v zadaní obsahujú logaritmy. Čo z toho vyplýva?

Ž: *Logaritmus je definovaný iba z kladného čísla, preto prvá podmienka bude obmedzovať argument funkcie len na kladné hodnoty.*

$$\boxed{\log x \quad \textit{existuje} \quad \Leftrightarrow \quad x > 0}$$

U: Dobre, môžeš to ukázať na prvej funkcii

$$f_1: y = \log\left(x^2 - x - 6\right).$$

Ž: *Ako som už povedal, základná podmienka pri logaritmoch je, že argument musí byť kladný. V tomto prípade musí platiť*

$$x^2 - x - 6 > 0.$$

To je kvadratická nerovnica. Pomocou Vietových vzťahov získam súčin

$$(x+2)(x-3) > 0.$$

U: Predpokladám, že budeš pokračovať metódou nulových bodov.

Ž: *Áno, tými sú čísla $x = -2$ a $x = 3$. Tie mi rozdelia celú množinu reálnych čísel na tri intervaly.*

U: Sú to $(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; \infty)$. Samotné nulové body do nich nepatria, pretože riešime ostrú nerovnicu.

Ž: *V každom z týchto intervalov si vyberiem jedno číslo, dosadím do výrazu $(x+2)(x-3)$, aby som zistil, či nadobudne kladnú alebo zápornú hodnotu. Začnem číslom -3. Po dosadení vznikne*

$$(-3+2)(-3-3) = (-1)(-6) = 6.$$

To je kladné číslo, napíšem plus nad interval $(-\infty; -2)$. Zopakujem to pre číslo nula z druhého intervalu:

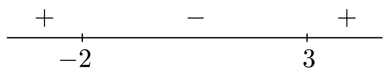
$$(0+2)(0-3) = 2(-3) = -6.$$

To je záporné číslo, napíšem mínus nad interval $(-2; 3)$. Do tretice si z posledného intervalu $(3; \infty)$ vyberiem číslo 5:

$$(5+2)(5-3) = 7 \cdot 2 = 14.$$

To je opäť kladné číslo, napíšem plus.

U: Dobre, na obrázku to máme zakreslené.



Ž: *Mňa zaujíma tá časť, kde výraz nadobúda kladné hodnoty. Preto*

$$x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)\,.$$

U: Môžeme teda napísať, že

$$\mathcal{D}(f_1) = (-\infty; -2) \cup (3; \infty).$$

Ž: *Pokračujem druhou funkciou*

$$f_2 : y = \frac{1}{\log{(x-3)}}.$$

Opäť tu vystupuje logaritmus, preto píšem podmienku pre argument

$$x - 3 > 0.$$

Odtiaľ $x > 3$, *čiže*

$$x \in (3; \infty)\,.$$

Hotovo.

U: Tak to veru ešte nie je všetko. Sústredil si sa na logaritmickú funkciu a tak tvojej pozornosti uniklo, že predpis funkcie je v tvare zlomku.

Ž: *Ach, jaj. A kde je zlomok, tam nesmie byť v menovateli nula.*

$$\boxed{\frac{1}{x} \quad \textit{existuje} \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0}$$

Musím teda dopísať podmienku

$$\log(x-3) \neq 0.$$

Čo s tým?

U: Nič zvláštne. Spomeň si, že grafy všetkých logaritmických funkcií prechádzajú bodom $[1; 0]$. Inými slovami logaritmus jednej je vždy rovný nule.

Ž: *Teda ak ja chcem, aby sa logaritmus nerovnal nule, tak argument sa nesmie rovnať jednej. Dostanem podmienku*

$$x - 3 \neq 1,$$

odkiaľ

$$x \neq 4.$$

Môžem napísať odpoveď

$$\mathcal{D}(f_2) = (3; \infty) - \{4\}.$$

U: V poriadku, zapísať to môžeme aj takto: $\mathcal{D}(f_2) = (3; 4) \cup (4; \infty)$.

U: Prejdime k tretej funkcii

$$f_3 : y = 1 - \ln x.$$

Ž: *Tu niet veľmi o čom rozmýšľať. Prirodzená logaritmická funkcia*

$$y = \ln x$$

je definovaná iba na množine kladných čísel, preto píšem podmienku $x > 0$. *Teda*

$$\mathcal{D}(f_3) = (0; \infty).$$

U: V poriadku, ostala posledná funkcia

$$f_4 : y = \sqrt{\log_2 \frac{x}{3}}.$$

Ž: *Toto už vyzerá trochu zložitejšie. Začnem základnou podmienkou pre logaritmickú funkciu – argument musí byť kladný. Dostávam vzťah*

$$\frac{x}{3} > 0,$$

odkiaľ

$$x > 0.$$

Lenže vidím tu ešte druhú odmocninu a tá je definovaná len z nezáporných čísel.

$$\boxed{\sqrt{x} \quad \textit{existuje} \quad \Leftrightarrow \quad x \geqq 0}$$

Preto musí platiť

$$\log_2 \frac{x}{3} \geqq 0.$$

U: Graf logaritmickej funkcie $y = \log_2 x$ prechádza bodom $[1; 0]$. Zároveň je to rastúca funkcia, keďže jej základ je väčší ako jedna.

Ž: *Potom musí platiť*

$$\frac{x}{3} \geqq 1,$$

odkiaľ

$$x \geqq 3.$$

A máme to,

$$\mathcal{D}(f_4) = \langle 3; \infty).$$

Úloha 1: *Určte definičný obor funkcií:* $g_1 : y = \dfrac{1}{\log_3(x-2)}$; $g_2 : y = \ln(3 - x^2)$; $g_3 : y = \log \frac{x-2}{x+1}$.

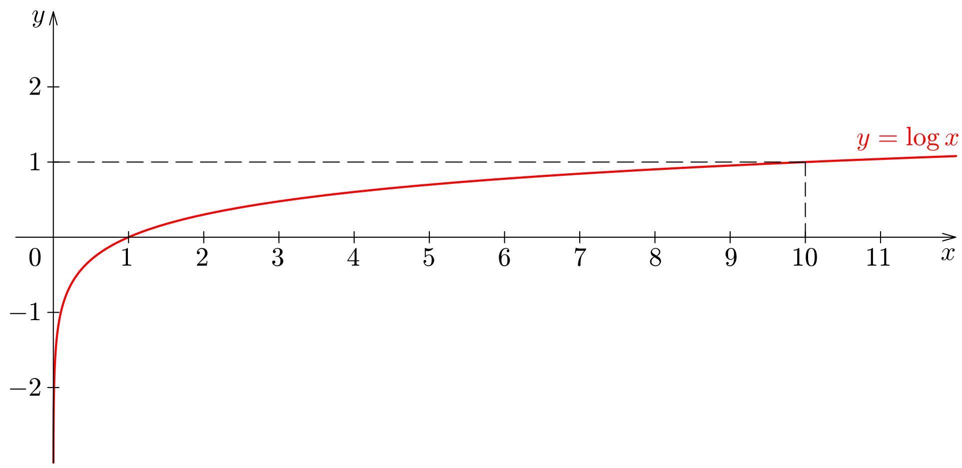
Výsledok: $\mathcal{D}(g_1) = (2; \infty) - \{3\}$; $\mathcal{D}(g_2) = \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$; $\mathcal{D}(g_3) = (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$

Príklad 2: *Pomocou grafu funkcie $f : y = \log x$ zostrojte grafy funkcií $g : y = -\log x$, $h : y = \log(x-1)$, $i : y = |\log(x-1)|$.*

Ž: *Grafom funkcie*

$$f : y = \log x$$

je logaritmická krivka. Prechádza bodom $[1; 0]$ tak, že os y je jej asymptotou. Táto funkcia je rastúca, pretože jej základom je číslo 10, čo je viac ako 1. Graf je na obrázku:

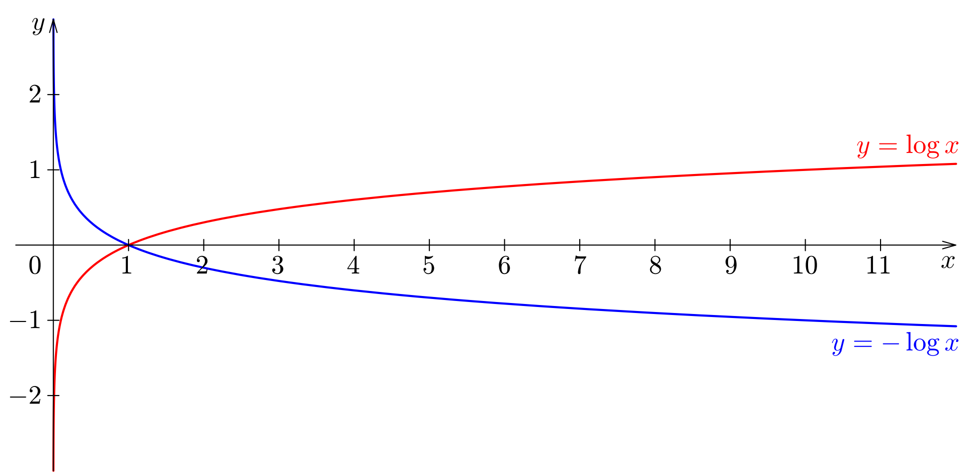


U: Začal si bezchybne. Teraz do toho istého obrázka pridaj graf funkcie

$$g : y = -\log x.$$

Ž: *Od funkcie f sa líši iba znamienkom. To znamená, že všetky hodnoty funkcie g budú opačné čísla k hodnotám funkcie f. To, čo bolo kladné, bude záporné a naopak. Preto sa celý graf preklopí podľa osi x.*

U: Dôjde teda k zobrazeniu grafu funkcie f v osovej súmernosti podľa x-ovej osi. Výsledok je na obrázku:



Ž: *Tretia funkcia má predpis*

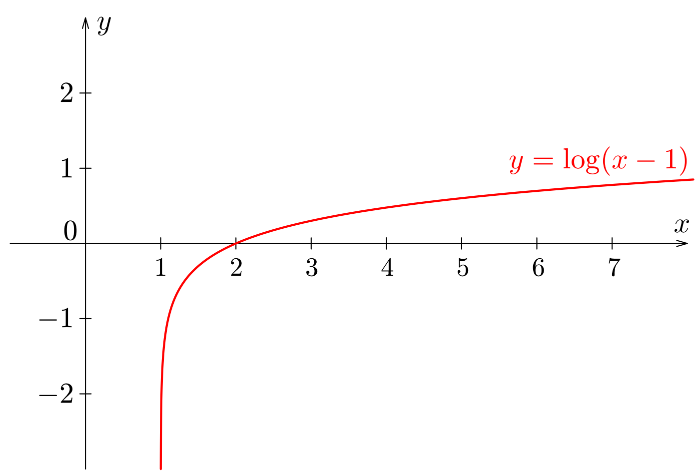
$$h : y = \log(x-1).$$

Nie som si istý, ale myslím, že graf by sa mal posunúť.

U: Áno, graf funkcie h bude posunutý o jeden dielik doprava v smere osi x-ovej. To preto, lebo hodnota funkcie h napríklad v bode 3 bude taká istá ako hodnota funkcie f v bode 2. Hodnota funkcie h v bode 5 bude taká istá ako hodnota funkcie f v bode 4 atď. Ukážeme si to na priesečníku s osou x. Už si povedal, že pre funkciu f je to bod $[1;0]$. No a pre funkciu h je to bod $[2;0]$, pretože

$$h(2) = \log(2-1) = \log 1 = 0.$$

Teda graf funkcie h má takýto tvar:



Asymptotou grafu funkcie teraz nie je os y, ale priamka $x = 1$.

Ž: *Idem na poslednú funkciu*

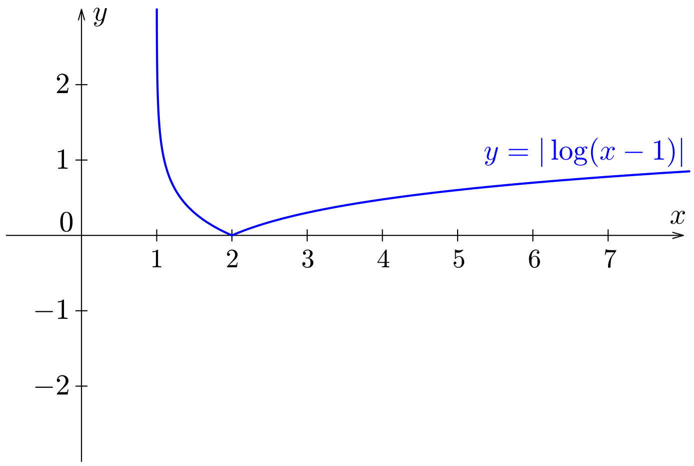
$$i : y = |\log(x-1)|.$$

U: Tu môžeš výhodne využiť graf funkcie h.

Ž: *Výraz* $\log(x-1)$ *sa nachádza v absolútnej hodnote. To spôsobí, že tá časť grafu funkcie h, ktorá leží nad osou x sa nezmení. To preto, lebo absolútna hodnota kladného čísla je to isté číslo.*

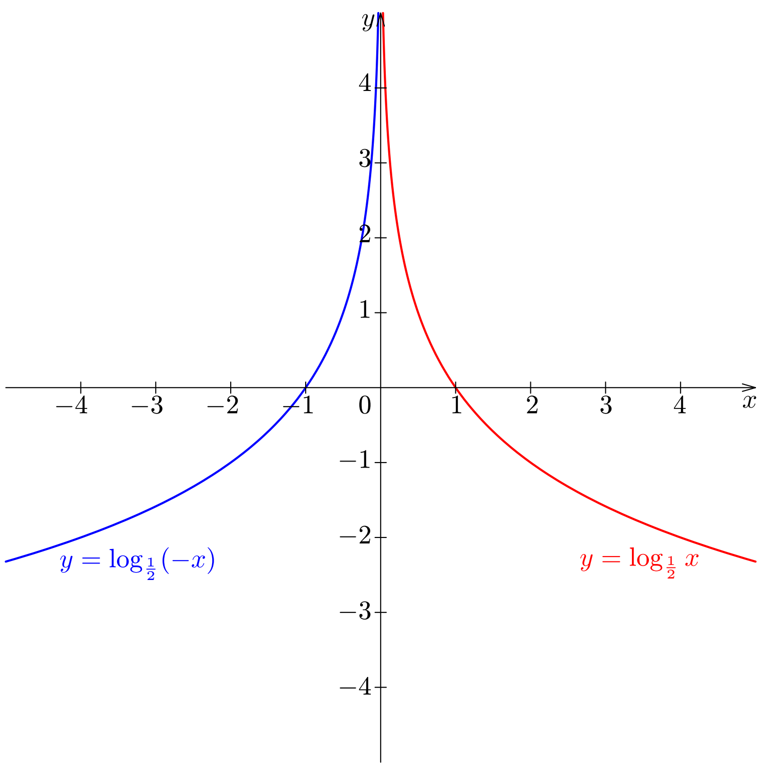
U: Zatiaľ uvažuješ veľmi dobre. Ako to bude so zápornými hodnotami?

Ž: *Viem, že absolútna hodnota záporného čísla je číslo k nemu opačné. Preto tá časť grafu funkcie h, ktorá ležala pod osou x, sa zobrazí nahor v osovej súmernosti podľa osi x. Na ďalšom obrázku je vyznačený výsledný graf.*



Úloha 2: *Pomocou grafu funkcie* $f : y = \log_{\frac{1}{2}} x$ *zostrojte graf funkcie* $g : y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$.

Výsledok:



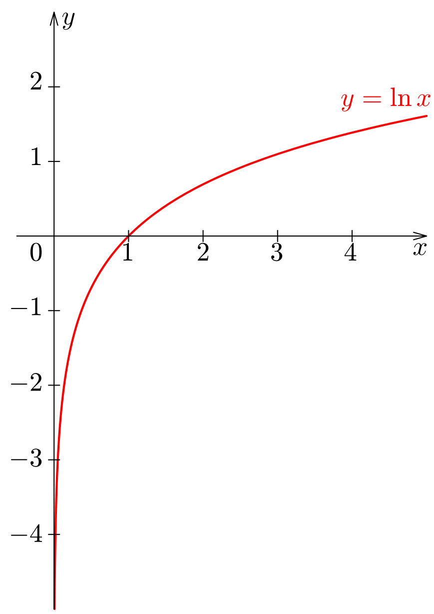
Príklad 3: *Zostrojte grafy funkcií* $f: y = \ln x$, $g: y = 1 - \ln x$, $h: y = 2\ln x$, $i: y = \ln|x|$.

U: Máme začať tzv. prirodzenou logaritmickou funkciou

$$f: y = \ln x.$$

Ž: *Je to vlastne logaritmická funkcia so základom* e*, čo je Eulerovo číslo. Má hodnotu približne* $2{,}71$*, preto je to rastúca funkcia. Jej grafom je logaritmická krivka.*

U: Dva význačné body na tejto krivke sú $[1;0]$ a $[e;1]$. Jej graf je na obrázku.

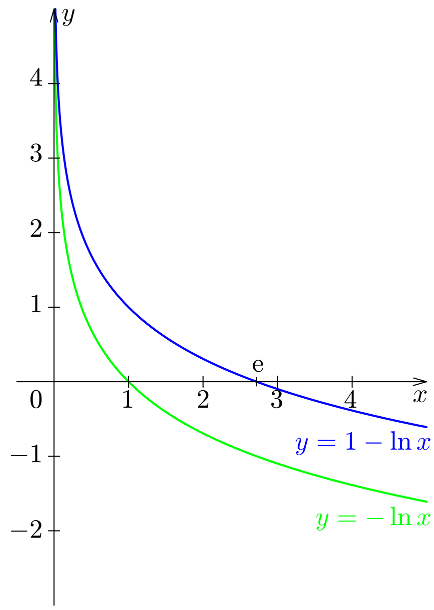


Ž: *Ako ďalší v poradí mám zostrojiť graf funkcie*

$$g: y = 1 - \ln x.$$

Tak to si rozdelím na dva kroky. Najprv zostrojím graf funkcie $y = -\ln x$*. Ten získam preklopením grafu funkcie* f *osovo súmerne podľa osi* x*-ovej. Tento graf potom ešte posuniem nahor o jeden dielok pozdĺž osi* y*-ovej.*

U: Vidím, že transformácie grafov funkcií ovládaš veľmi dobre. Na nasledujúcom obrázku je zelenou farbou vyznačený graf funkcie $y = -\ln x$ a modrou farbou výsledný graf funkcie $y = 1 - \ln x$.

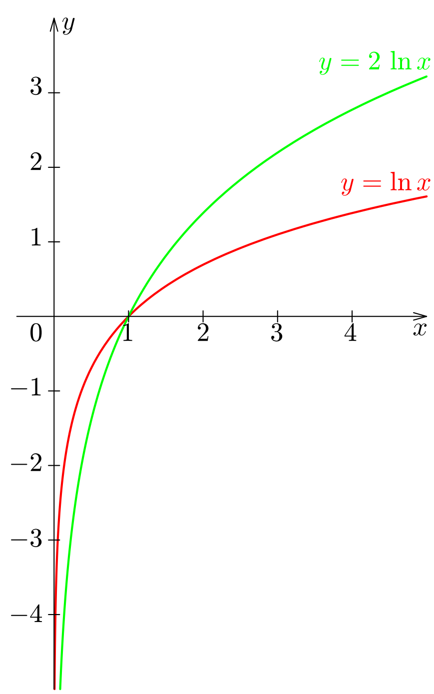


Ž: *Tretia v poradí je funkcia*

$$h : y = 2 \ln x.$$

S tým nebude veľa práce. Jej predpis hovorí, že mám všetky hodnoty funkcie $y = \ln x$ *zväčšiť na dvojnásobok. Preto sa celý graf dvojnásobne „natiahne“ v smere osi* x*-ovej.*

U: Veľmi dobre. Pre porovnanie máme na obrázku červenou farbou graf pôvodnej logaritmickej funkcie $y = \ln x$ a zelenou farbou graf „natiahnutej“ funkcie $y = 2 \ln x$.



Ž: *Ostala mi posledná funkcia*

$$i : y = \ln|x|.$$

U: V jej predpise vystupuje absolútna hodnota. Zopakujme si najprv, čo to je.

Ž: *Označujeme ju* $|x|$ *a funguje to tak, že ak je číslo* x *kladné, tak* $|x| = x$ *a ak je číslo* x *záporné, tak* $|x| = -x$*, teda číslo opačné.*

U: Pozabudol si na nulu.

Ž: *To je triviálne, absolútna hodnota nuly je nula.*

$$\boxed{\begin{array}{lll} x \geqq 0 & \Rightarrow & |x| = x \\ x < 0 & \Rightarrow & |x| = -x \end{array}}$$

U: V poriadku, vráťme sa k našej funkcii. Aký je jej definičný obor?

Ž: *Obyčajná logaritmická funkcia je definovaná len pre kladné čísla. Tu však vďaka absolútnej hodnote môžeme dosadzovať aj záporné čísla.*

U: Preto definičným oborom funkcie $i : y = \ln|x|$ je množina $\mathbb{R} - \{0\}$.

Ž: *Myslím, že by sme predpis tejto funkcie mohli rozdeliť na dve časti. Pre kladné* x *je to to isté ako funkcia* $y = \ln x$*, ale pre záporné* x *je to to isté ako funkcia* $y = \ln(-x)$.

U: V rámčeku je uvedený symbolický zápis toho, čo si povedal.

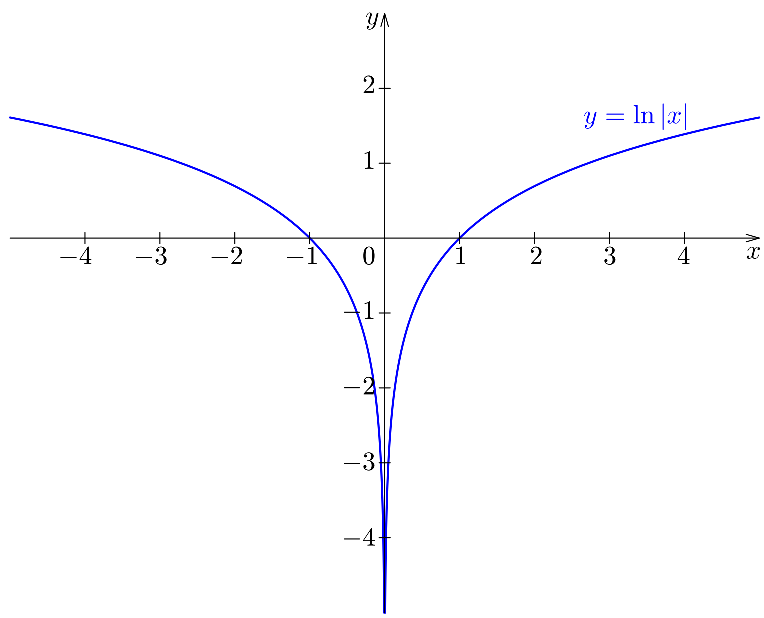
$$\boxed{\ln|x| = \begin{cases} \ln x; & \text{pre } x > 0 \\ \ln(-x); & \text{pre } x < 0 \end{cases}}$$

Ž: *To potom znamená, že aj graf sa bude skladať z dvoch častí. Pre* $x > 0$ *je to graf funkcie* $y = \ln x$.

U: Ten sme už zostrojovali. Ako podľa teba vyzerá graf funkcie $y = \ln(-x)$?

Ž: *V bode* -3 *táto funkcia nadobudne hodnotu* $\ln 3$*, v bode* -5 *hodnotu* $\ln 5$ *atď. Tak si myslím, že graf funkcie* $y = \ln(-x)$ *je len osovo súmerne podľa osi* y *zobrazený graf funkcie* $y = \ln x$.

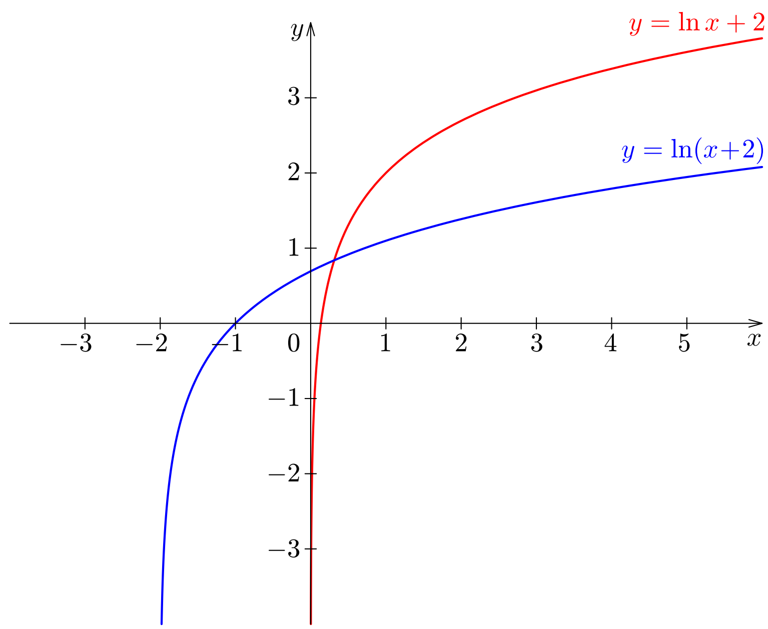
U: Súhlasím s tebou. Na poslednom obrázku je zostrojený graf funkcie $i : y = \ln|x|$, ktorý – ako si práve vysvetlil – sa skladá z dvoch častí.



Graf tejto funkcie si mohol zostrojiť aj trochu šikovnejšie, ak by si využil jej párnosť.

Úloha 3: *Zostrojte grafy funkcií* $f : y = \ln x + 2$, $g : y = \ln(x + 2)$.

Výsledok:



Príklad 4: *DDT (dichlordifenyltrichloretán), pre človeka veľmi škodlivá látka, sa dostáva potravinovým reťazcom do mlieka a ďalších potravín. Jej koncentrácia vo výške $5 \cdot 10^{-6}\,\%$ je v súčasnej dobe ešte tolerovaná, do budúcnosti je však požadované znížiť ju na $2 \cdot 10^{-6}\,\%$. Používanie DDT je dnes takmer vo všetkých štátoch zakázané. Chemický rozklad DDT však prebieha len veľmi pomaly, polčas rozkladu je zhruba 30 rokov. Za aký čas bude dosiahnutá požadovaná nižšia koncentrácia?*

Ž: *Zaujímavá téma, avšak vôbec netuším, ako by sa niečo také dalo počítať.*

U: Keďže v zadaní sa hovorí o polčase rozkladu, budeme predpokladať, že DDT sa rozpadá podobne ako rádioaktívne látky. Potom pre závislosť hmotnosti m látky od času t platí vzťah

$$m = m_0 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{T}},$$

kde m_0 je začiatočná hmotnosť látky v čase 0 rokov a T je tzv. polčas rozpadu. To je doba, za ktorú sa pôvodná hmotnosť m_0 zmenší na jednu polovicu. Vedel by si povedať, s akým typom závislosti tu pracujeme?

Ž: *Musím sa na to ešte raz pozrieť, je tu veľa premenných. Čiže hovoríme o závislosti hmotnosti m od času t. Ale premenná t sa nachádza v exponente mocniny, preto to je exponenciálna funkcia.*

U: Výborne. Jej základ – číslo 0,5 – je menší ako jedna, takže táto funkcia je klesajúca.

Ž: *To je logické, ak sa DDT už nepoužíva, tak jeho množstvo postupne klesá.*

U: Poďme sa pustiť do počítania.

Ž: *Zatiaľ mi je jasné, že za polčas rozpadu T dosadím 30 rokov. Ale v zadaní nie sú hmotnosti, len koncentrácie.*

U: Správny postreh. Do vzorca môžeme dosadiť koncentráciu, pretože tá udáva, akú časť určitej základnej hmotnosti zaberá naša jedovatá látka. Dôležité je, aby sme na oboch stranách rovnice použili rovnaké fyzikálne jednotky.

Ž: *Teda do vzorca*

$$m = m_0 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{T}}$$

dosadím za počiatočnú hmotnosť m_0 hodnotu $5 \cdot 10^{-6}$?

U: Áno. A za výslednú hmotnosť m dosaď hodnotu $2 \cdot 10^{-6}$.

Ž: *Dostanem vzťah*

$$2 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{30}}\,.$$

Obe strany predelím číslom $5 \cdot 10^{-6}$ a mám

$$0{,}4 = (0{,}5)^{\frac{t}{30}}\,.$$

Čo ďalej?

U: Potrebujeme vyjadriť exponent. Pripomeňme si, že inverznou funkciou k exponenciálnej funkcii je . . .

Ž: *. . . funkcia logaritmická.*

U: Pritom platí
$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y,$$
kde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

Ž: *Aha, takže podľa toho môžem písať*
$$\frac{t}{30} = \log_{0,5} 0{,}4.$$
Ešte prenásobím číslom 30 *a mám výsledok v tvare*
$$t = 30 \cdot \log_{0,5} 0{,}4.$$
To už je práca pre kalkulačku.

U: Skús to!

Ž: *Skúšam. Oj, tu je nejaká zrada. Neviem naťukať logaritmus so základom* 0,5.

U: To preto, že na kalkulačke máme len dekadický a prirodzený logaritmus. Pomôžeme si vzorcom, ktorý slúži na prevod logaritmu z jedného základu na iný:
$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}.$$
Pritom $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $u \in \mathbb{R}^+$.

Ž: *Najľahšie je asi použiť dekadický logaritmus, teda* $b = 10$. *Potom dostanem*
$$t = 30 \cdot \frac{\log 0{,}4}{\log 0{,}5},$$
odkiaľ pomocou kalkulačky vyjde výsledok
$$t \doteq 39{,}66.$$

U: Teda prírode potrvá ešte takmer 40 rokov, kým sa spamätá z toho, ako sme ju zamorili DDT.

Úloha 4: *Krátko po vypití pohára whisky stúpne hladina alkoholu v krvi u osoby na svoju maximálnu hodnotu* 0,3 mg/ml. *Potom hladina alkoholu v krvi postupne klesá podľa vzorca* $0,3 \cdot (0{,}5)^t$, *kde t je čas v hodinách po dosiahnutí maximálnej hodnoty. Ako dlho trvá, kým smie osoba viesť auto, ak bežne zistiteľná hranica je* 0,08 mg/ml*?*

Výsledok: približne 1,9 hodiny

Príklad 5: *Rozhodnite, ktoré z uvedených výrokov sú pravdivé:*

a) $\log_3 5 < \log_3 8$;

b) $\log_{0,5} 7 \leqq \log_{0,5} 8$;

c) $\log_3 10 > \log_{\frac{1}{3}} 10$;

d) $\log_{0,4} 7 < \log_{0,4} 6$.

Využite poznatky o vlastnostiach logaritmických funkcií.

U: Čo si pamätáš o logaritmickej funkcii?

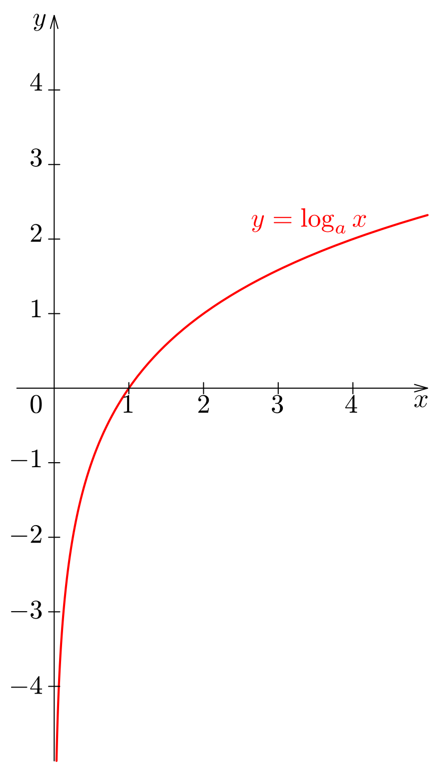
Ž: *Je definovaná trochu zvláštne – ako inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii* $y = a^x$. *Zapisuje sa v tvare*

$$y = \log_a x,$$

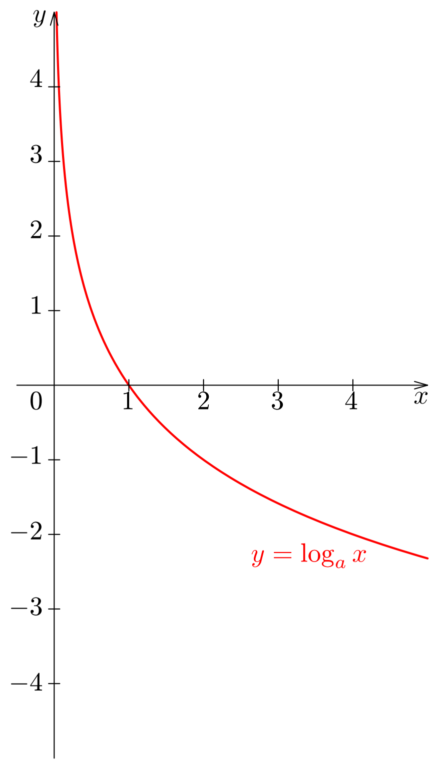
kde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. *Definovaná je na množine kladných reálnych čísel.*

U: Výborne, budeme ešte potrebovať monotónnosť.

Ž: *Tá závisí od základu. Pre* $a > 1$ *je logaritmická funkcia rastúca, jej graf je na obrázku:*



Pre $a \in (0; 1)$ *je logaritmická funkcia klesajúca, môžeme to vidieť na grafe:*



U: Tvojou úlohou je rozhodnúť, či platia výroky v zadaní.

Ž: *V prvom tvrdení*

$$\log_3 5 < \log_3 8$$

pracujem s funkciou $y = \log_3 x$*. Tá má základ* 3*, preto je rastúca. Keďže* $5 < 8$*, tak aj* $\log_3 5 < \log_3 8$*. Prvé tvrdenie platí.*

U: Výborne, pokračuj druhým tvrdením

$$\log_{0,5} 7 \leqq \log_{0,5} 8.$$

Ž: *Tu pre zmenu použijem klesajúcu funkciu* $y = \log_{0,5} x$*. Platí* $7 < 8$*, preto* $\log_{0,5} 7 > \log_{0,5} 8$*. Tvrdenie neplatí.*

U: Ide ti to ako po masle. Čo povieš na tretí výrok

$$\log_3 10 > \log_{\frac{1}{3}} 10?$$

Ž: *Tu už mám rôzne základy, nepôjde to tak ako doteraz.*

U: Poradím ti – porovnaj obidve čísla s nulou, pomôž si grafmi.

Ž: *Funkcia* $y = \log_3 x$ *je rastúca, v čísle* 10 *nadobudne kladnú hodnotu. Ale funkcia* $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ *je klesajúca a v čísle* 10 *nadobudne zápornú hodnotu. Tak to je jasné, výrok je pravdivý.*

U: Ostal posledný výrok

$$\log_{0,4} 7 < \log_{0,4} 6.$$

Ž: *To je ľahké, to sme tu už mali. Funkcia* $y = \log_{0,4} x$ *je klesajúca. Platí* $7 > 6$*, preto* $\log_{0,4} 7 < \log_{0,4} 6$*. Tvrdenie je pravdivé.*

Úloha 5: *Rozhodnite, ktoré z uvedených čísel sú kladné: a)* $\log_{0,5} 6$*; b)* $-\log_{14} 11$*; c)* $\log_7 8$.

Výsledok: iba c)