Lineárne lomená funkcia

RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: Zaoberajme sa ďalším druhom funkcií, konkrétne lineárne lomenou funkciou. V jej názve je slovíčko „lomená“. Čo by si z toho usúdil o jej predpise?

Ž: *Nuž zlomená asi nebude ... Mohol by tam ale byť nejaký zlomok, pretože vtedy hovoríme čitateľ lomené menovateľ.*

U: Správne, predpis lineárne lomenej funkcie bude v tvare zlomku. A keďže v názve je aj slovo „lineárne“, tak čitateľ aj menovateľ budú lineárne dvojčleny. Preto zápis bude takýto

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Skús uviesť nejaké príklady.

Ž: *Povedzme*

$$y = \frac{3x + 7}{2x + 5}, \qquad y = \frac{8x - 9}{-5x + 2}.$$

U: Dobre. Koeficienty a, b, c, d v rovnici funkcie môžu byť ľubovoľné reálne čísla. Aby sme však dostali naozaj lineárne lomenú funkciu, nie iba lineárnu, musia spĺňať ešte aj nejaké podmienky.

Ž: *Jednu podmienku by som aj videl. Ak by som dal $c = 0$, vzniklo by napríklad*

$$y = \frac{3x + 7}{0x + 5} = \frac{3x + 7}{5} = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}.$$

A to by bola lineárna funkcia.

U: Veľmi dobre, získali sme prvú podmienku

$$c \neq 0.$$

Ďalšia situácia, ktorá nám nevyhovuje, je napríklad predpis

$$y = \frac{4x - 2}{2x - 1}.$$

Ten sa totiž dá upraviť takto

$$y = \frac{2\,(2x - 1)}{2x - 1} = 2.$$

Ž: *Tým by sme dostali konštantnú funkciu.*

U: Áno, s podmienkou $x \neq 0,5$. Aby sme sa takejto situácii s konštantnou funkciou vyhli, potrebujeme druhú podmienku. Je ňou požiadavka, aby

$$bc \neq ad.$$

Ž: *A to už prečo?*

U: Ukážme si to – nech platí $bc = ad$. O koeficiente c sme už povedali, že je nenulový. Môžeme ním preto predpis funkcie rozšíriť, dostávame

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{acx+bc}{c\,(cx+d)}.$$

Teraz výraz bc v čitateli nahradíme výrazom ad:

$$y = \frac{acx+ad}{c\,(cx+d)}.$$

V čitateli vyberieme a pred zátvorku a krátime:

$$y = \frac{a\,(cx+d)}{c\,(cx+d)} = \frac{a}{c}.$$

Ž: *Takže sme zase dospeli ku konštantnej funkcii.*

U: Ešte sa pozrime na definičný obor našej funkcie.

Ž: *Výraz v menovateli nesmie byť rovný nule, preto*

$$cx + d \neq 0,$$

odkiaľ

$$x \neq -\frac{d}{c}.$$

Definičný obor tvoria všetky reálne čísla okrem čísla $-\frac{d}{c}$.

U: Zhrniem všetko, čo sme doposiaľ povedali:
Lineárne lomenou funkciou nazývame každú funkciu danú rovnicou

$$f : y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$***,*** $c \neq 0$***,*** $bc \neq ad$***. Jej definičným oborom je množina*** $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$***.***

Ž: *Ako vyzerá jej graf?*

U: Grafom lineárne lomenej funkcie je hyperbola.

Ž: *Hyperbola? Ako pri nepriamej úmernosti?*

U: Áno, ibaže tentokrát bude hyperbola posunutá. Vyplýva to z toho, že rovnicu lineárne lomenej funkcie vieme prepísať do tvaru

$$y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}.$$

Ukážme si to na konkrétnej funkcii

$$f : y = \frac{3x - 5}{x - 2}.$$

Ž: *Mám tento predpis prepísať do vášho tvaru. Tak to vôbec neviem ako.*

U: Začneme úpravou čitateľa a to tak, že v čitateli „vyrobíme“ násobok menovateľa. Keďže v čitateli máme $3x$ a v menovateli len x, chceme teraz v čitateli získať trojnásobok menovateľa.

Ž: *Trojnásobok menovateľa je výraz* $3x - 6$.

U: A presne ten potrebujeme v čitateli, preto pridáme nulu v tvare $-6 + 6$. Vyzerá to takto:

$$y = \frac{3x - 5}{x - 2} = \frac{3x - 6 + 6 - 5}{x - 2}.$$

Ďalšou úpravou dostaneme tvar

$$y = \frac{3\,(x - 2) + 1}{x - 2}.$$

Zlomok „rozdelíme“ na dva zlomky

$$y = \frac{3\,(x - 2)}{x - 2} + \frac{1}{x - 2}.$$

Napokon získame tvar

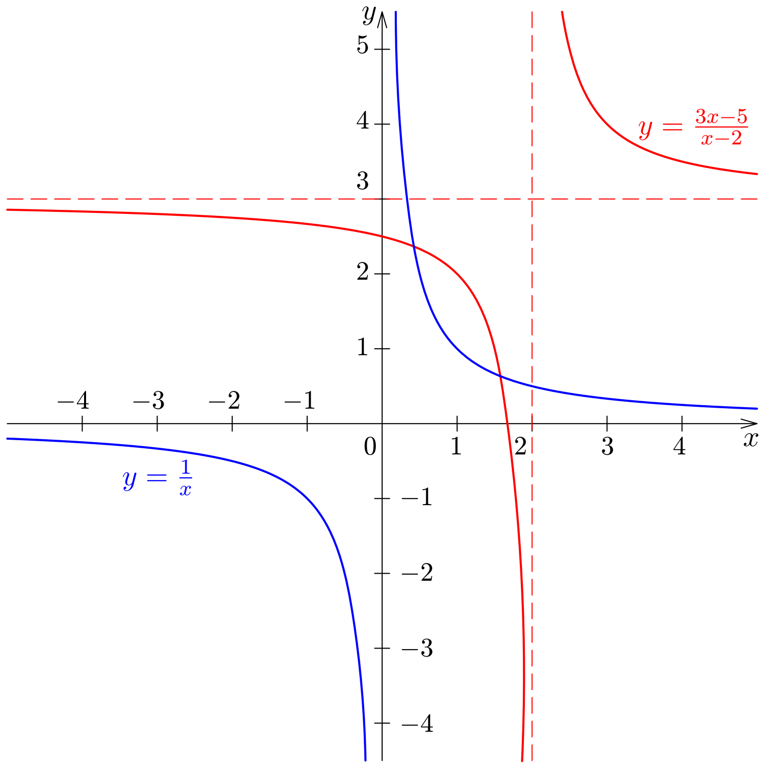
$$y = 3 + \frac{1}{x - 2}.$$

Ž: *Stále tam nevidím hyperbolu.*

U: Akože nie? Len si spomeň na transformácie grafov funkcií. Východiskom je hyperbola $y = \frac{1}{x}$.

Ž: *Aha, a tá je teraz posunutá o tri dieliky nahor pozdĺž osi y-ovej a potom ešte o dva dieliky doprava pozdĺž osi x-ovej.*

U: Výborne, celá situácia je znázornená na obrázku:



U: Pozri sa, čo sa stalo so stredom hyperboly, ktorý bol pôvodne v bode $[0; 0]$.

Ž: *Stred hyperboly sa posunul do bodu* $[2; 3]$.

U: Dobre. Ešte mi povedz niečo o asymptotách grafu funkcie.

Ž: *Asymptoty sú také priamky, ku ktorým sa graf funkcie približuje, ale nikdy sa ich nedotkne. Pre nepriamu úmernosť sú asymptotami súradnicové osi, ale tu sa to celé posunulo. Preto asymptotami sú teraz priamky* $x = 2$ *a* $y = 3$.

U: Výborne. Skúsme si všimnúť súvislosti. Asymptotami sú priamky $x = x_0$ a $y = y_0$. Dajú sa zistiť aj priamo z predpisu funkcie

$$f : y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Ž: *Jednu by som aj videl. Keďže funkcia nie je definovaná pre číslo* $-\frac{d}{c}$, *tak* $x_0 = -\frac{d}{c}$. *Ale druhá asymptota ...*

U: Tá sa dá odvodiť z toho, ako sme predpis funkcie upravovali. Vyjde $y_0 = \frac{a}{c}$.

U: Na záver zhrniem postup pri zostrojovaní grafu lineárne lomenej funkcie:

1. Rovnicu funkcie **upravíme** na tvar $y = y_0 + \dfrac{k}{x - x_0}$. Môžeme si pomôcť výpočtami $x_0 = -\dfrac{d}{c}$, $y_0 = \dfrac{a}{c}$.
2. Zostrojíme priamky $x = x_0$, $y = y_0$ rovnobežné so súradnicovými osami, ktoré budú **asymptotami** nového grafu.
3. Zostrojíme **hyperbolu** $y = \dfrac{k}{x}$. Pre $k > 0$ leží v I. a III. kvadrante, pre $k < 0$ leží v II. a IV. kvadrante.
4. **Posunieme** hyperbolu tak, aby jej stredom bol bod $[x_0; y_0]$.

Príklad 1: *Daná je funkcia* $f: y = \dfrac{2x-3}{x-1}$.

a) Zostrojte jej graf.
b) Určte jej definičný obor a obor hodnôt.
c) Vypočítajte $f(0)$, $f(-3)$, $f(2)$.
d) Určte všetky hodnoty premennej x*, pre ktoré platí* $f(x) = 0$, $f(x) = -3$, $f(x) = 2$.

Ž: *Mám zostrojiť graf funkcie*

$$f: y = \frac{2x-3}{x-1}.$$

Tá patrí medzi lineárne lomené funkcie, preto jej grafom bude hyperbola.

U: Súhlasím. Najprv treba určiť súradnice stredu hyperboly. K tomu je vhodné upraviť predpis funkcie do tvaru

$$f: y = y_0 + \frac{k}{x-x_0}.$$

Ž: *S tým mi asi budete musieť pomôcť.*

U: Začni upravovať predpis funkcie tak, aby si v čitateli dostal násobok menovateľa. Keďže v čitateli je $2x$ a v menovateli len x, bude to dvojnásobok.

Ž: *Dvojnásobok menovateľa je výraz* $2x - 2$. *Aby mi vznikol v čitateli, tak tam odpočítam a hneď pripočítam dvojku:*

$$y = \frac{2x - 2 + 2 - 3}{x-1}.$$

V ďalšom kroku vznikne

$$y = \frac{2(x-1)-1}{x-1}.$$

U: Ak tento zlomok rozdelíme na dva zlomky, máme už požadovaný tvar

$$y = 2 - \frac{1}{x-1}.$$

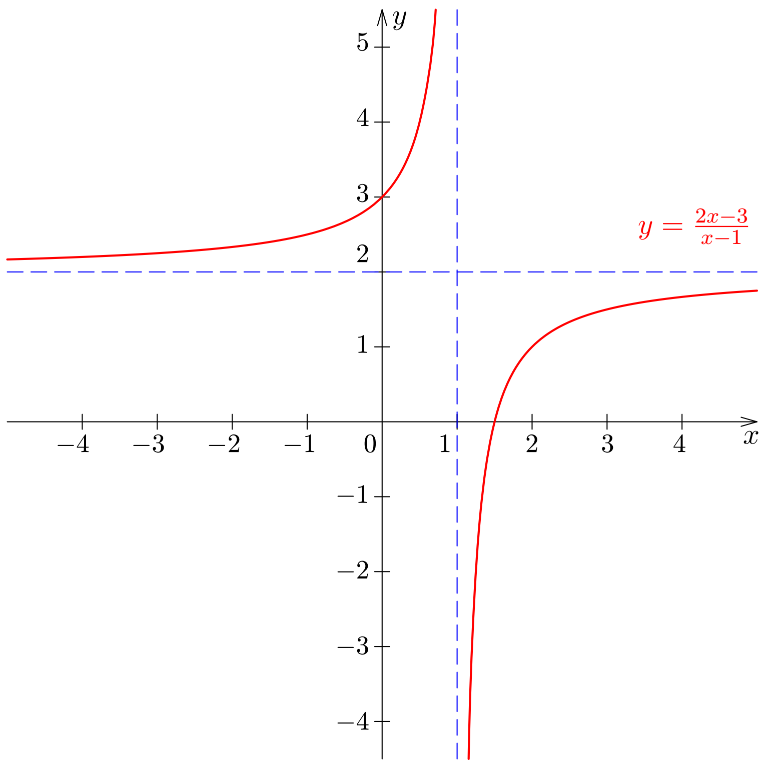
Ž: *Keďže stred hyperboly má súradnice* $[x_0; y_0]$, *tak v tomto prípade to bude bod* $[1; 2]$.

U: Z toho už hneď môžeš určiť asymptoty.

Ž: *Áno, sú to priamky prechádzajúce stredom rovnobežne so súradnicovými osami. Preto ich rovnice sú* $x = 1$ *a* $y = 2$.

U: Môžeme prejsť ku grafu. Keďže koeficient k nám vyšiel rovný -1, tak začneme od hyperboly $y = -\dfrac{1}{x}$.

Ž: *Tá leží v II. a IV. kvadrante. Ja už ju len posuniem tak, aby mala stred v bode* $[1; 2]$. *Výsledný graf je na obrázku:*



U: Graf si zvládol výborne. Nemal by si mať problém ani s definičným oborom a oborom hodnôt.

Ž: *To už je teraz ľahké, pretože mi tu pomôžu súradnice stredu hyperboly. Tie totiž udávajú práve tie hodnoty, ktoré musím vynechať. Preto*

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{1\}, \quad \mathcal{H} = \mathbb{R} - \{2\}.$$

U: V ďalšej časti máš vypočítať hodnoty funkcie v určitých bodoch.

Ž: *Tu stačí do predpisu funkcie dosadiť za* x *dané čísla. Dostanem*

$$f(2) = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 1,$$

$$f(-3) = \frac{2 \cdot (-3) - 3}{-3 - 1} = \frac{9}{4},$$

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 3}{0 - 1} = 3.$$

U: Posledným výpočtom si vlastne našiel priesečník grafu funkcie s y-ovou osou. Je ním bod $[0; 3]$.

Ž: *Nakoniec ma čaká posledná časť – mám zistiť, pre ktoré x nadobúda funkcia dané hodnoty. Začnem prvou. Ak má platiť $f(x) = 0$, tak môžem napísať, že*

$$0 = \frac{2x-3}{x-1}.$$

Zlomok sa rovná nule len vtedy, ak sa čitateľ rovná nule, čiže musí byť

$$x = \frac{3}{2}.$$

U: Bod $\left[\frac{3}{2}; 0\right]$, ktorý si takto našiel, predstavuje priesečník grafu funkcie s osou x-ovou. Môžeš pokračovať ďalšími výpočtami.

Ž: *Postupujem podobne. Podmienku $f(x) = -3$, môžem napísať ako*

$$-3 = \frac{2x-3}{x-1}.$$

Vynásobím menovateľom

$$-3x + 3 = 2x - 3,$$

odkiaľ

$$-5x = -6.$$

Výsledok je

$$x = \frac{6}{5}.$$

U: Veľmi dobre. Ostáva ešte nájsť x, pre ktoré platí $f(x) = 2$.

Ž: *Chceli ste ma nachytať, ale ja sa nedám. Obor hodnôt tejto funkcie neobsahuje číslo 2, preto neexistuje také x!*

Úloha 1: *Určte definičné obory a obory hodnôt funkcií $f : y = \dfrac{x-5}{x+1}$ a $g : y = \dfrac{x+1}{3x-1}$.*

Výsledok: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; $\quad \mathcal{D}(g) = \mathcal{H}(g) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

Príklad 2: *Daná je funkcia* $f: y = \dfrac{x+1}{3x-2}$. *Zostrojte jej graf a popíšte jej vlastnosti.*

Ž: *Mám zostrojiť graf funkcie*

$$f: y = \frac{x+1}{3x-2}.$$

Bude to posunutá hyperbola, pretože ide o lineárne lomenú funkciu. Najprv však musím upraviť jej predpis, aby som našiel súradnice stredu.

U: Správne, pokúsime sa predpis funkcie upraviť na tvar

$$f: y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}.$$

Ž: *Začíname tým, že v čitateli „vyrobíme" násobok menovateľa. Lenže v čitateli je* x *a v menovateli až* $3x$. *Mám urobiť tretinový násobok?*

U: Zlomkom sa nevyhneme. Aby sme to však veľmi neskomplikovali, navrhujem celý zlomok rozšíriť tromi:

$$y = \frac{3}{3} \cdot \frac{x+1}{3x-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x+3}{3x-2}.$$

Môžeš pokračovať.

Ž: *V čitateli pridám nulu v tvare* $-2+2$, *aby mi v ňom vznikol ten istý výraz ako je v menovateli:*

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x - 2 + 2 + 3}{3x-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x - 2 + 5}{3x-2}.$$

U: Ostáva už len druhý zlomok rozdeliť na dva a odstrániť zátvorku

$$y = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{5}{3x-2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{5}{9x-6}.$$

Ž: *To teda boli úpravy!*

U: Pomohli však k tomu, aby sme vedeli zostrojiť graf funkcie.

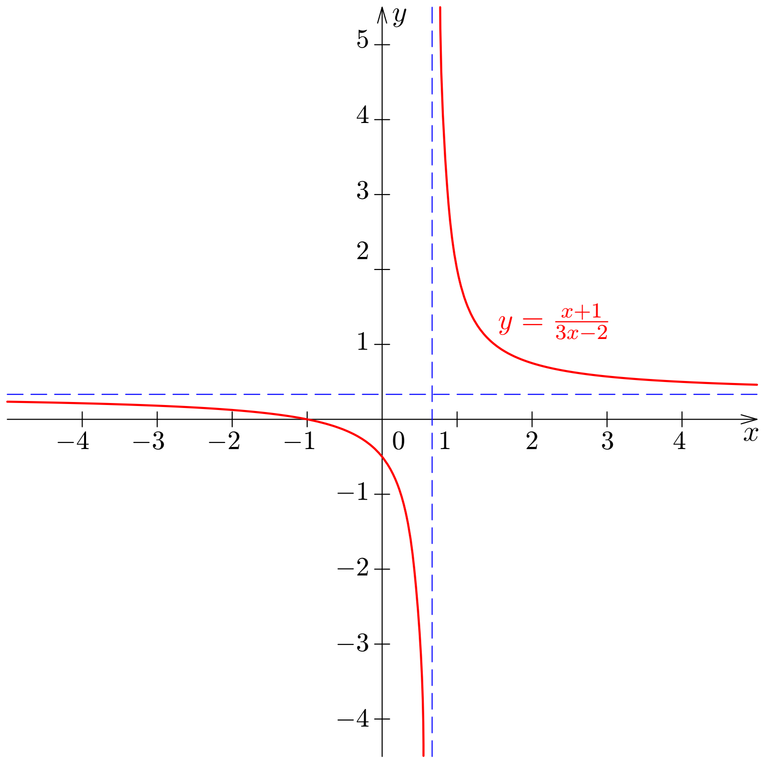
Ž: *Z menovateľa určím podmienku* $9x - 6 \neq 0$, *odkiaľ* $x \neq \frac{2}{3}$. *Stred hyperboly je v bode*

$$\left[\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right].$$

Do tohto stredu posunieme hyperbolu $y = \frac{5}{9x}$. *Tá leží v I. a III. kvadrante, keďže koeficient* k *má kladný. Priamky, ku ktorým sa graf približuje, teda asymptoty, majú rovnice*

$$x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1}{3}.$$

U: Hotový graf je na nasledujúcom obrázku aj s vyznačenými asymptotami.

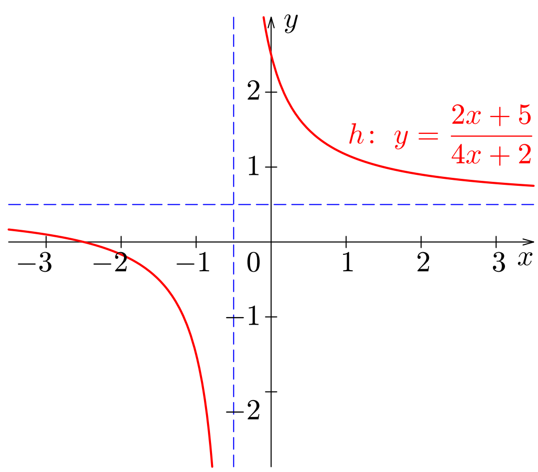


Ž: *Ešte popíšem vlastnosti tejto funkcie, pomocou grafu to nebude ťažké. Definičným oborom je množina* $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$, *oborom hodnôt množina* $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$. *Funkcia je klesajúca na intervaloch* $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ *a* $\left(\frac{2}{3}; \infty\right)$. *Ďalej môžem povedať, že nemá extrémy, nie je ohraničená, nie je ani párna ani nepárna. Ale zato je prostá.*

U: Bez chybičky.

Úloha 2: *Zostrojte graf funkcie* $f: y = \dfrac{2x+5}{4x+2}$.

Výsledok:



Príklad 3: *Pre ktoré čísla k je graf danej funkcie časťou priamky?*

a) $f: y = \dfrac{kx-7}{3x+14}$, *b)* $g: y = \dfrac{3x+2}{kx+12}$.

Ž: *Predpisy týchto funkcií vyzerajú ako lineárne lomené funkcie. A tie majú grafy v tvare hyperboly, tak ako to môže byť časť priamky? Nerozumiem tomu.*

U: Ale pointu si vystihol slovami „vyzerajú ako“. Myslím, že bude dobré najprv si zopakovať definíciu lineárne lomenej funkcie.

Ž: *Lineárne lomenou funkciou nazývame každú funkciu danú rovnicou*

$$f: y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $bc \neq ad$. *Definovaná je na množine* $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

U: V tejto definícii si uviedol dve dôležité podmienky. Ak by totiž platilo $c = 0$, vznikla by lineárna funkcia. A vieme, že jej grafom je priamka. Ak by platilo $bc = ad$, vznikla by konštantná funkcia. Lenže jej definičný obor by neobsahoval jedno reálne číslo, preto grafom by bola priamka bez jedného bodu.

Ž: *Celá úloha je teda vlastne o podmienkach? To by som mal zvládnuť. Začnem prvou funkciou*

$$f: y = \frac{kx-7}{3x+14}.$$

Koeficient c má hodnotu 3, teda prvá podmienka je splnená. Ak graf má byť časťou priamky, môže to nastať len vtedy, ak bude platiť

$$bc = ad.$$

V našom prípade to znamená

$$-7 \cdot 3 = k \cdot 14,$$

odkiaľ

$$k = -\frac{21}{14} = -\frac{3}{2}.$$

U: Veľmi dobre, môžeš sa pustiť do druhej funkcie

$$g: y = \frac{3x+2}{kx+12}.$$

Ž: *Urobím to isté, podmienku $bc = ad$ zapíšem v tvare*

$$2 \cdot k = 3 \cdot 12.$$

Odtiaľ

$$k = 18.$$

A je to.

U: Veru to ešte nie je koniec. Sústredil si sa na podmienku $bc = ad$ a ušla ti podmienka $c = 0$. V našom prípade $k = 0$.

Ž: *Takže grafom funkcie g bude celá priamka, ak $k = 0$, a časť priamky, ak $k = 18$.*

Úloha 3: *Pre ktoré čísla k je graf funkcie $h : y = \dfrac{2x - 3}{5x + k}$ časťou priamky?*

Výsledok: $k = -\dfrac{15}{2}$

Príklad 4: *Nájdite predpis lineárne lomenej funkcie, ak viete, že jej graf prechádza bodom* $[5;-7]$*, číslo* 4 *nepatrí do jej definičného oboru a číslo* -2 *nepatrí do jej oboru hodnôt.*

U: Zopakujme si, akým predpisom je daná lineárne lomená funkcia.

Ž: *Je to predpis v tvare*

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

pričom všetky koeficienty sú reálne čísla. Navyše musí platiť $c \neq 0$, $bc \neq ad$.

U: Takýto predpis lineárne lomenej funkcie sa však vždy dá upaviť na tvar

$$y = y_0 + \frac{k}{x-x_0}.$$

Tento tvar je pre nás výhodnejší. Jednak sa v ňom vyskytuje menej neznámych koeficientov, jednak vidíme súvislosť s definičným oborom a oborom hodnôt.

Ž: *Áno, pretože platí*

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{x_0\}\,,\ \mathcal{H} = \mathbb{R} - \{y_0\}\,.$$

O našej funkcii vieme, že číslo 4 *nepatrí do jej definičného oboru, teda* $x_0 = 4$*. Ďalej číslo* -2 *nepatrí do jej oboru hodnôt, preto* $y_0 = -2$*. Predpis funkcie je zatiaľ v tvare*

$$y = -2 + \frac{k}{x-4}.$$

U: Chýba nám už len koeficient k.

Ž: *Ten získam dosadením súradníc daného bodu* $[5;-7]$ *do predpisu funkcie. Dostávam*

$$-7 = -2 + \frac{k}{5-4}.$$

Odtiaľ

$$k = -5.$$

Naša funkcia má predpis

$$y = -2 - \frac{5}{x-4}.$$

U: Prípadne ju po jednoduchej úprave môžeme zapísať aj takto:

$$y = \frac{-2x+3}{x-4}.$$

Úloha 4: *Nájdite predpis lineárne lomenej funkcie, ak viete, že jej graf prechádza bodom* $\left[1;-\frac{3}{2}\right]$*, číslo* $-\frac{1}{3}$ *nepatrí do jej definičného oboru a číslo* $\frac{1}{3}$ *nepatrí do jej oboru hodnôt.*

Výsledok: $y = \dfrac{x-7}{3x+1}$

Príklad 5: *Zostrojte grafy funkcií* $f: y = \left|\frac{x+1}{x-3}\right|$ *a* $g: y = \frac{|x|+3}{|x+3|}$.

Ž: *Predpis funkcie*

$$f: y = \left|\frac{x+1}{x-3}\right|$$

je celý v absolútnej hodnote. Preto najprv zostrojím graf funkcie bez absolútnej hodnoty, teda $f_1: y = \frac{x+1}{x-3}$.

U: Ku ktorému typu funkcií by si ju zaradil?

Ž: *Je to lineárne lomená funkcia, preto jej grafom je hyperbola. Na nájdenie jej stredu použijem úpravy predpisu funkcie, ktoré sú v rámčeku.*

$$\boxed{y = \frac{x+1}{x-3} = \frac{x-3+3+1}{x-3} = \frac{x-3+4}{x-3} = 1 + \frac{4}{x-3}}$$

U: Vďaka nim si získal predpis funkcie f_1 v tvare

$$y = 1 + \frac{4}{x-3}.$$

Čo ďalej?

Ž: *Z tohto zápisu viem zistiť, že asymptoty grafu funkcie sú priamky* $x = 3$ *a* $y = 1$. *Stred hyperboly je v bode* $[3; 1]$.

U: Vedel by si určiť priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami?

Ž: *Pravdaže. Priesečník s osou* y *sa hľadá ľahko, stačí do predpisu funkcie dosadiť za* x *nulu. Dostanem* $y = \frac{0+1}{0-3} = -\frac{1}{3}$. *Priesečník je bod*

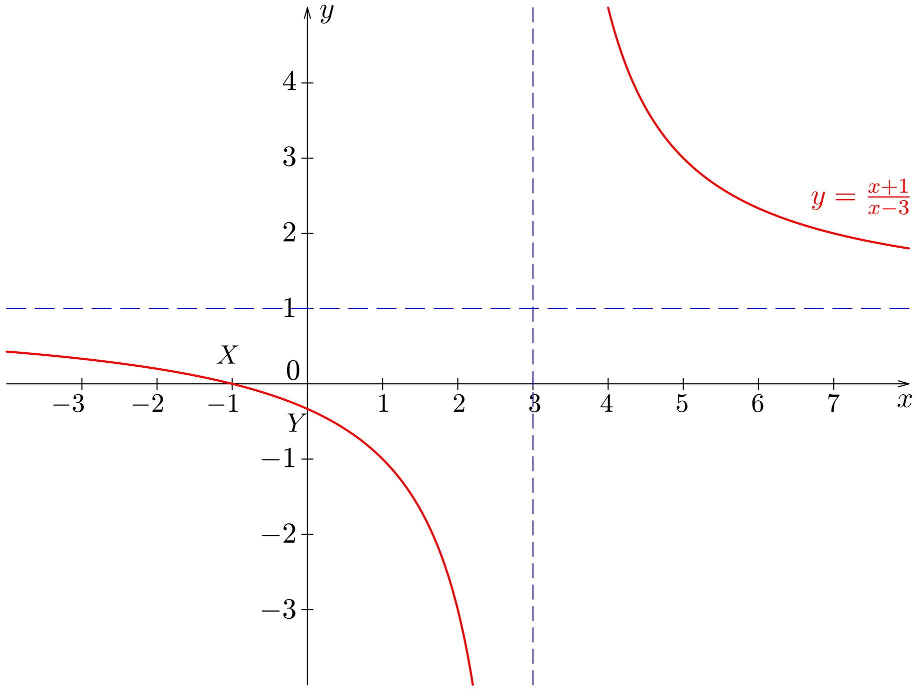
$$Y\left[0; -\frac{1}{3}\right].$$

Ešte priesečník s osou x. *Ten nájdem tak, že v predpise funkcie dosadím nulu za* y. *Vznikne rovnica* $0 = \frac{x+1}{x-3}$, *odkiaľ* $x = -1$. *Čiže priesečník s osou* x *je bod*

$$X[-1; 0].$$

U: Veľmi dobre, myslím že už môžeš zostrojiť graf.

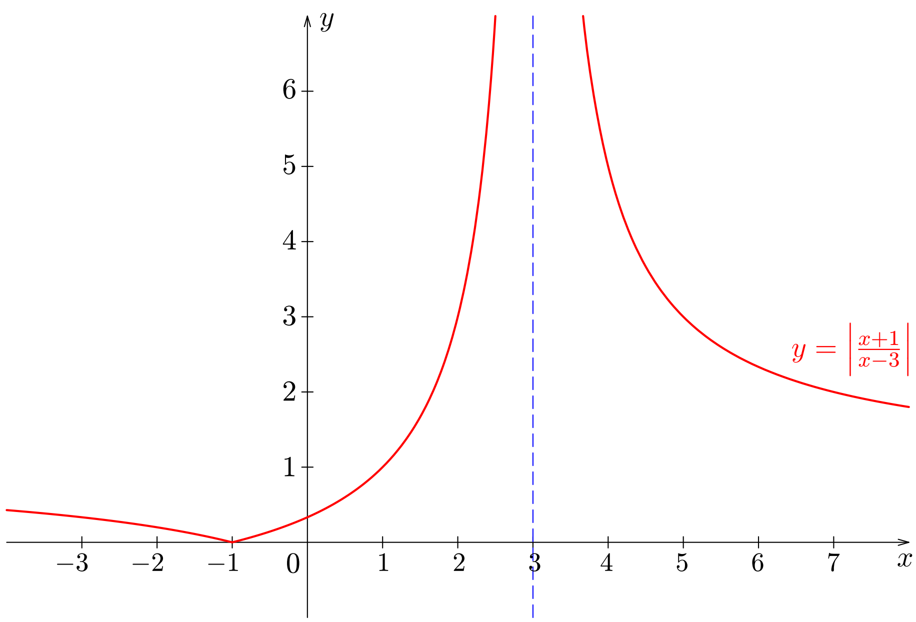
Ž: *Je na nasledujúcom obrázku.*



U: Čo s tým spraví absolútna hodnota?

Ž: *Viem, že graf funkcie $y = |f_1(x)|$ sa bude líšiť len v tej časti, kde graf funkcie f_1 leží pod osou x. A to tak, že sa táto časť grafu zobrazí osovo súmerne podľa osi x nahor. Zvyšná časť grafu ostane nezmenená.*

U: Šikovne si využil jednu z transformácií grafov funkcií, výsledok je na obrázku:



Ž: *S druhou funkciou*

$$g: y = \frac{|x|+3}{|x+3|}$$

to už bude zložitejšie, pretože tu vystupujú dve absolútne hodnoty. Zrejme si musím riešenie rozdeliť na viac krokov.

U: Presne tak. Nulové body výrazov v absolútnych hodnotách sú 0 a -3. Preto navrhujem úlohu riešiť zvlášť na týchto intervaloch:

$$(-\infty; -3)\,, \quad (-3; 0\rangle\,, \quad \langle 0; \infty)\,.$$

Ž: *Chvíľu som nechápal, prečo ste vynechali číslo -3, ale už mi to došlo. V menovateli nesmie byť nula, preto $x \neq -3$. Tak sa pustím do prvého intervalu. Ak*

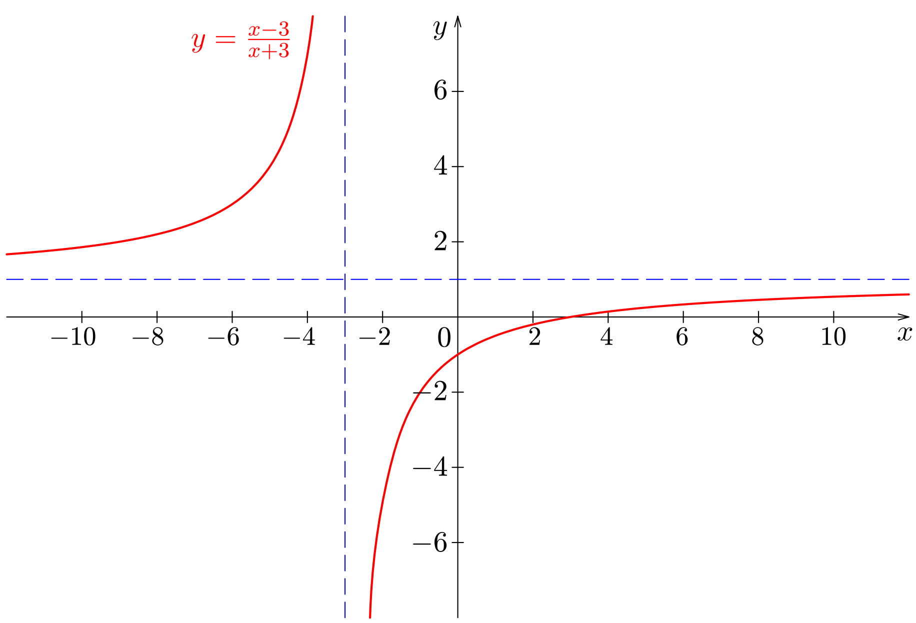
$$x \in (-\infty; -3),$$

tak výrazy v oboch absolútnych hodnotách sú záporné. Preto na tomto intervale platí $|x| = -x$ a $|x+3| = -x-3$. V rámčeku sú zapísané úpravy, pomocou ktorých som predpis funkcie upravil na tvar

$$f_1: y = 1 - \frac{6}{x+3}.$$

$$\boxed{y = \frac{-x+3}{-x-3} = \frac{-x-3+3+3}{-x-3} = \frac{-x-3+6}{-x-3} = 1 - \frac{6}{x+3}}$$

U: Vďaka tomu vieme zostrojiť graf funkcie f_1 – je to hyperbola, ktorá sa z pôvodnej polohy v II. a IV. kvadrante posunula tak, aby jej stred bol v bode $[-3; 1]$. Jej graf máme na obrázku:



Ž: *Podobný postup zvolím aj v druhom intervale. Ak*

$$x \in (-3; 0\rangle,$$

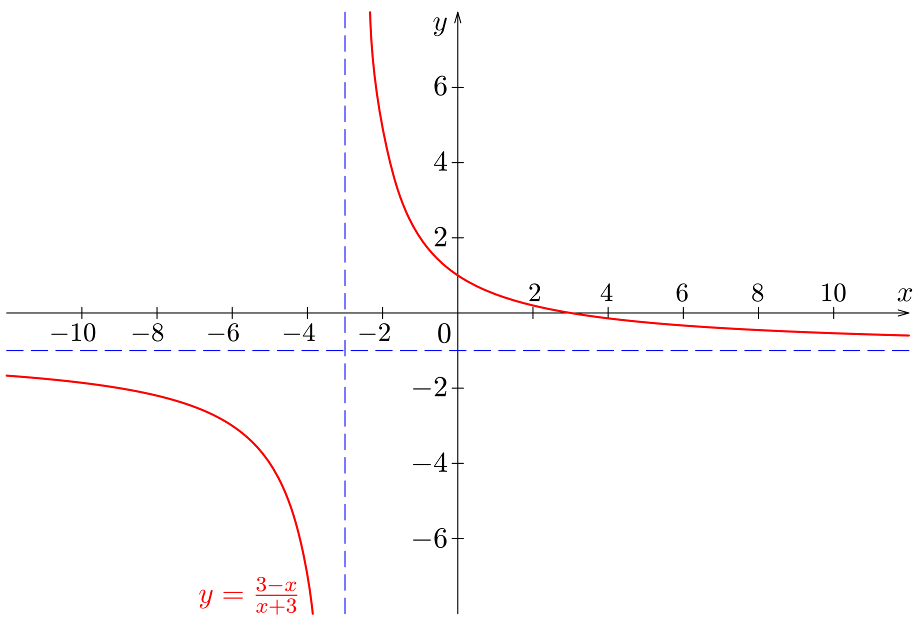
tak na tomto intervale platí $|x| = -x$ *a* $|x+3| = x+3$. *Tieto vyjadrenia dosadím do predpisu funkcie a upravujem. Úpravy sú opäť zapísané v rámčeku.*

$$\boxed{y = \frac{-x+3}{x+3} = \frac{-x-3+3+3}{x+3} = \frac{-x-3+6}{x+3} = -1 + \frac{6}{x+3}}$$

U: Tým si získal predpis funkcie v tvare

$$f_2 : y = -1 + \frac{6}{x+3}.$$

Jej grafom je tiež hyperbola. Má stred v bode $[-3; -1]$ a pôvodne ležala v I. a III. kvadrante. Jej graf je na ďalšom obrázku.



Ž: *Ostal mi tretí interval. Ak*

$$x \in \langle 0; \infty),$$

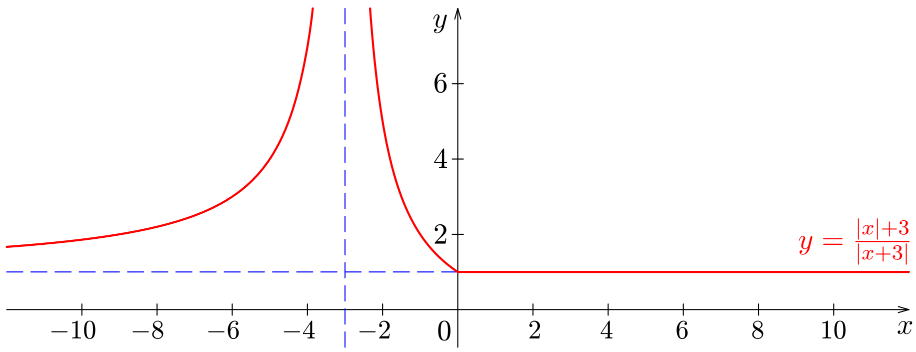
tak na tomto intervale platí $|x| = x$ *a* $|x+3| = x+3$. *Potom však predpis funkcie môžem zjednodušiť takto:*

$$f_3 : y = \frac{x+3}{x+3} = 1.$$

To je ale konštantná funkcia, jej grafom je priamka rovnobežná s osou x.

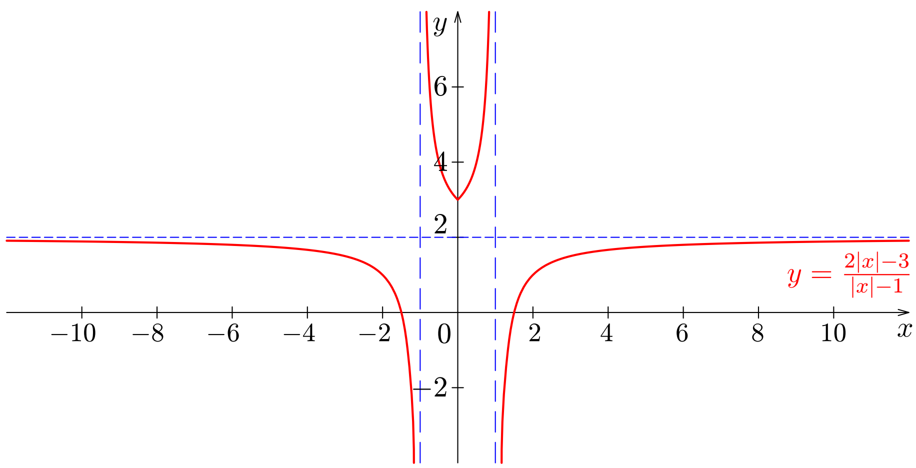
U: Teraz už len spojiť do jedného grafu všetky tri časti.

Ž: *Červenou farbou vyznačím na intervale* $(-\infty; -3)$ *časť grafu funkcie* f_1. *Na intervale* $(-3; 0\rangle$ *vyznačím časť grafu funkcie* f_2. *Napokon na intervale* $\langle 0; \infty)$ *vyznačím časť grafu funkcie* f_3, *čo bude polpriamka. A mám to, na obrázku je výsledný graf funkcie* f:



Úloha 5: *Zostrojte graf funkcie* $f: y = \dfrac{2|x| - 3}{|x| - 1}$.

Výsledok:



Príklad 6: *Nájdite rovnicu inverznej funkcie k funkcii* $f : y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. *Zostrojte grafy oboch funkcií.*

U: Máš nájsť rovnicu inverznej funkcie k danej funkcii. Avšak nie ku každej funkcii musí existovať inverzná. Pamätáš si prečo?

Ž: *Inverznú funkciu možno nájsť len ku prostým funkciám. A lineárne lomené funkcie sú všetky prosté, preto by s tým nemal byť problém. Predpis inverznej funkcie budem hľadať tak, že z predpisu funkcie*

$$f : y = \frac{2x-1}{x-1}$$

vyjadrím x *pomocou* y. *Najprv odstránim zlomok*

$$yx - y = 2x - 1$$

a upravím na tvar

$$yx - 2x = y - 1.$$

Vyberiem x *pred zátvorku*

$$x(y-2) = y - 1$$

a zátvorkou predelím

$$x = \frac{y-1}{y-2}.$$

U: Veľmi dobre. V ďalšom kroku stačí zameniť označenie premenných x a y a získame rovnicu inverznej funkcie

$$f^{-1} : y = \frac{x-1}{x-2}.$$

Ž: *Ešte mám zostrojiť grafy oboch funkcií. Začnem funkciou* f, *jej predpis najprv upravím takto:*

$$f : y = \frac{2x - 2 + 2 - 1}{x-1} = \frac{2x - 2 + 1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}.$$

Odtiaľ vidím, že grafom funkcie f *je hyperbola* $y = \dfrac{1}{x}$ *posunutá tak, aby jej asymptoty boli priamky* $y = 2$ *a* $x = 1$.

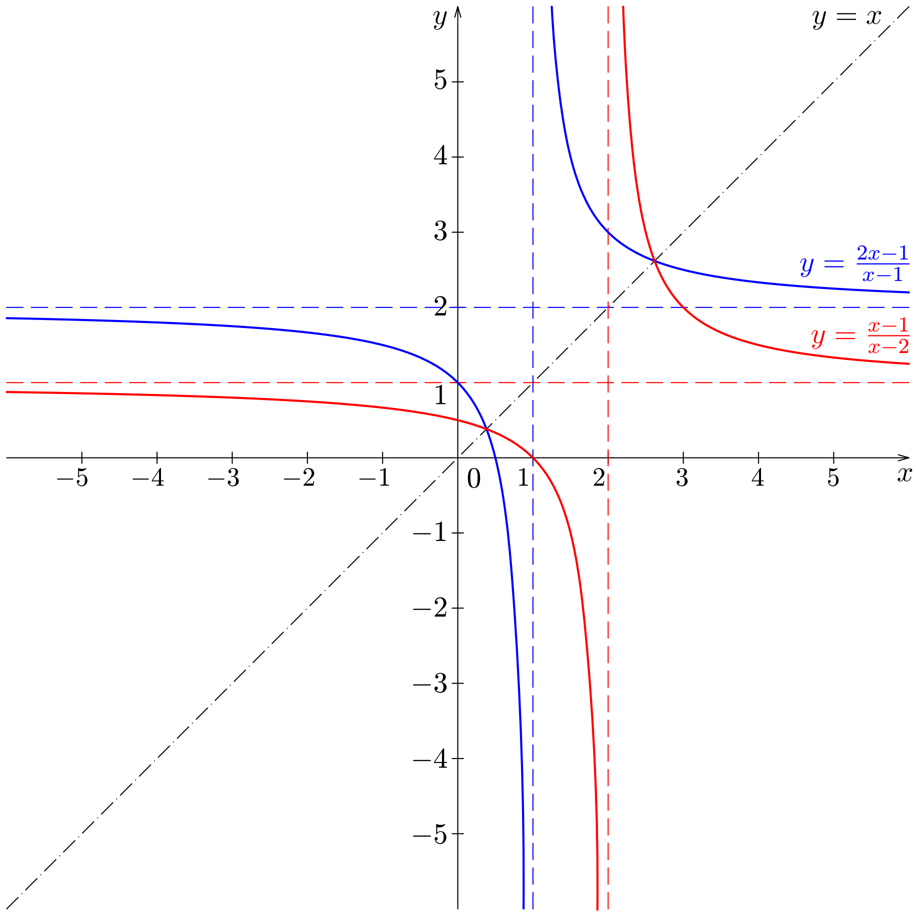
U: Veľmi dobre. Ako získaš graf inverznej funkcie?

Ž: *Podobne. Začnem úpravami predpisu funkcie*

$$f^{-1} : y = \frac{x - 2 + 2 - 1}{x-2} = \frac{x - 2 + 1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}.$$

Graf tejto funkcie opäť vychádza z hyperboly $y = \dfrac{1}{x}$. *Teraz je však posunutá tak, aby jej asymptoty boli priamky* $y = 1$ *a* $x = 2$.

U: Obidva grafy sú na nasledujúcom obrázku. Ja k tomu dodám, že graf inverznej funkcie sme mohli nájsť aj inak. Platí totiž, že grafy funkcií f a f^{-1} sú súmerné podľa priamky s rovnicou $y = x$. Naznačil som ju aj v obrázku.



Úloha 6: *Nájdite rovnicu inverznej funkcie k funkcii* $f : y = \dfrac{3x-5}{x+7}$.

Výsledok: $f^{-1} : y = \dfrac{-7x-5}{x-3}$