Lineárna funkcia

RNDr. Beáta Varinčíková

Ž: *Všimol som si pred budovou nové auto. To je vaše?*

U: Áno, už sa teším, ako si s ním zajtra vyrazím na prvý väčší výlet.

Ž: *Tak vám prajem veľa kilometrov bez nehody.*

U: Ďakujem. Keď už si spomenul tie kilometre, mohli by sme od toho odvíjať našu dnešnú tému – lineárnu funkciu.

Ž: *Môže byť, poďme na to.*

U: Zatiaľ mi ukazovateľ prejdených kilometrov na tachometri udáva len 80 kilometrov. To sa však už zajtra zmení. Skús popísať ako, ak predpokladáme, že moja priemerná rýchlosť bude 70 km/h.

Ž: *Teda na začiatku ukazuje tachometer* 80 *kilometrov, po hodine to bude* $80 + 70$*, čiže* 150*, po dvoch hodinách* $150 + 70$*, teda* 220 ... *Nebolo by lepšie zapísať to do tabuľky?*

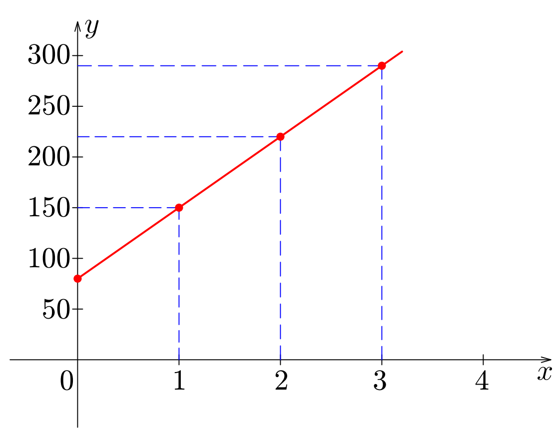
U: Práve som ti to chcel navrhnúť. Označme teda premennou x čas mojej jazdy autom a premennou y počet kilometrov, ktoré už auto prešlo.

Ž: *Potom tabuľka bude vyzerať takto:*

x	0	1	2	3
y	80	150	220	290

U: Výborne, máme tu teda funkciu, popisujúcu závislosť počtu kilometrov od času. Skús zostrojiť jej graf.

Ž: *To by nemalo byť ťažké – v pravouhlej súradnicovej sústave zostrojím body so súradnicami* $[0; 80]$, $[1; 150]$ *atď podľa tabuľky. Skúsim tie body hneď aj pospájať. Vyzerá to tak, že ležia na jednej polpriamke, tu je obrázok:*



U: Máš pravdu, tentoraz nám vyšla polpriamka, pretože nemá zmysel uvažovať o zápornom čase. Vo všeobecnosti by však v nejakej inej úlohe mohlo byť x aj záporné.

Ž: *Teda grafom funkcie by bola celá priamka?*

U: Áno, a kedže priamka sa latinsky nazýva *linea recta*, tak takáto funkcia, ktorej grafom je priamka, dostala už pred niekoľkými storočiami pomenovanie lineárna funkcia. Vráťme sa k našej situácii s autom a skús zapísať rovnicou funkciu, o ktorej sme hovorili.

Ž: *Za každú hodinu prejde auto* 70 *kilometrov, teda za x hodín to bude $70 \cdot x$. Nesmiem ale zabudnúť pripočítať tých* 80 *kilometrov, ktoré už má auto najazdených, teda spolu by to mohlo byť*

$$y = 70x + 80.$$

U: Výborne! Zovšeobecnime to. Ak čísla 70 a 80 nahradíme koeficientami a, b, dostaneme rovnicu funkcie $y = ax + b$. Aký bude jej definičný obor $\mathcal{D}$?

Ž: *Nevidím žiadny dôvod, prečo by sa nejaké číslo nedalo dosadiť za x do rovnice $y = ax + b$, preto definičným oborom tejto funkcie je množina všetkých reálnych čísel.*

U: Dobre, môžeme zhrnúť definíciu lineárnej funkcie takto: ***Lineárnou funkciou nazývame každú funkciu danú rovnicou***

$$y = ax + b,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, definičným oborom je množina $\mathbb{R}$.

Ž: *Za koeficienty a, b môžem teda dosadiť ľubovoľné čísla a vždy dostanem lineárnu funkciu?*

U: Áno, ale v prípade, ak za a dosadíš nulu, dostaneš špeciálny prípad lineárnej funkcie – konštantnú funkciu s rovnicou $y = b$. A ak za b dosadíš nulu, dostaneš ďalší špeciálny prípad – priamu úmernosť s rovnicou $y = ax$. O týchto funkciách si však povieme v inej dialógovej jednotke.

U: Ďalej sa budeme zaoberať základnými vlastnosťami lineárnych funkcií. Pomôžeme si pri tom dvoma konkrétnymi ukážkami. Tak mi, prosím ťa, najprv zostroj grafy funkcií

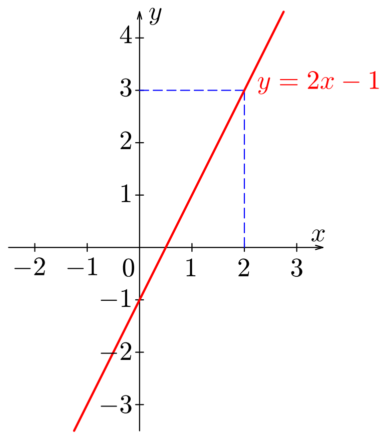
$$f : y = 2x - 1, \quad g : y = -3x + 4.$$

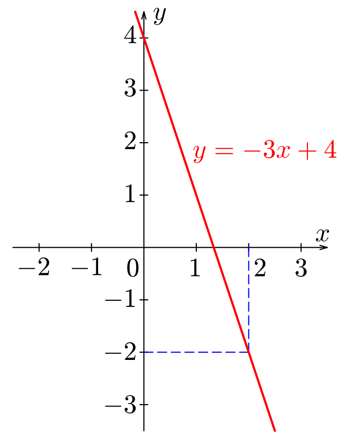
Ž: *Sú to lineárne funkcie, a o tých sme už povedali, že ich grafmi sú priamky. A na to, aby som mohol zostrojiť priamku, mi stačia dva body. Takže si pripravím dve malé tabuľky a do nich dosadím za x hoci aj nulu a dvojku a vypočítam funkčné hodnoty:*

x	0	2
$f(x)$	-1	3

x	0	2
$g(x)$	4	-2

Teraz už len nanesiem tieto body do súradnicovej sústavy, preložím nimi priamku a je to:





U: Výborne, tak sa poďme pustiť do vlastností funkcií. Budeme teda hovoriť o tom, či je lineárna funkcia prostá, párna, rastúca, ohraničená atď. Vynecháme pritom špeciálny prípad, ak $a = 0$, pretože konštantná funkcia sa v mnohých vlastnostiach odlišuje od ostatných lineárnych funkcií.

Ž: *No dobre, tak čím začneme?*

U: Grafom lineárnej funkcie.

Ž: *Ale veď to sme si už povedali, že je to priamka.*

U: To áno, ja sa ťa však teraz opýtam, či každá priamka, ktorú zostrojíme v pravouhlej súradnicovej sústave, bude predstavovať graf nejakej lineárnej funkcie.

Ž: *To znie ako chyták, musím porozmýšľať... Už to mám! Nemôže to byť kolmica na os x-ovú, lebo by to vôbec nebola funkcia!*

U: Presne tak, kolmica na os x-ovú nie je grafom žiadnej funkcie. Keďže neuvažujeme o konštantnej funkcii, tak grafom nebude ani kolmica na os y-ovú, teda zhrniem: grafom našej lineárnej funkcie je priamka rôznobežná s osami. Poďme na obor hodnôt.

Ž: *Myslím, že funkcia môže nadobudnúť hocijakú hodnotu, vidno to aj na grafoch, teda oborom hodnôt je množina $\mathbb{R}$.*

U: Súhlasím, skúsme teraz zistiť, či môže byť lineárna funkcia párna alebo nepárna.

Ž: *Nemôže, vidím to na mojich grafoch.*

U: No počkaj, ale ty máš nakrelené grafy dvoch konkrétnych funkcií. Čo ak by sme zvolili iné koeficienty a, b?

Ž: *Aj tak si myslím, že by párna nemohla byť, pretože by graf musel byť osovo súmerný podľa osi y-ovej, a to nebude. Ale mohla by byť nepárna, keď by graf bol súmerný podľa bodu $[0; 0]$.*

U: Máš pravdu, vtedy by ale graf musel prechádzať bodom $[0; 0]$. Ak teda dosadíme do rovnice funkcie $y = ax + b$ za x aj za y nulu, dostaneme

$$0 = a \cdot 0 + b,$$

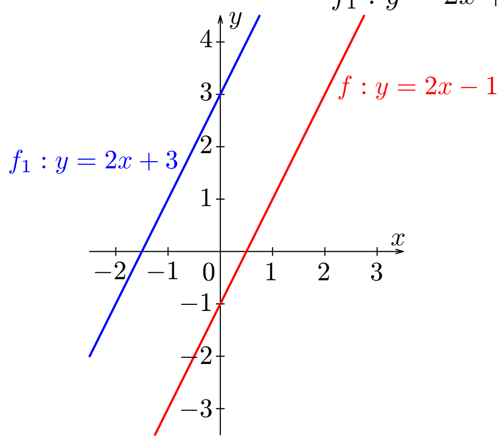
odkiaľ vyplynie, že $b = 0$. Teda ak $b = 0$, tak lineárna funkcia je nepárna.

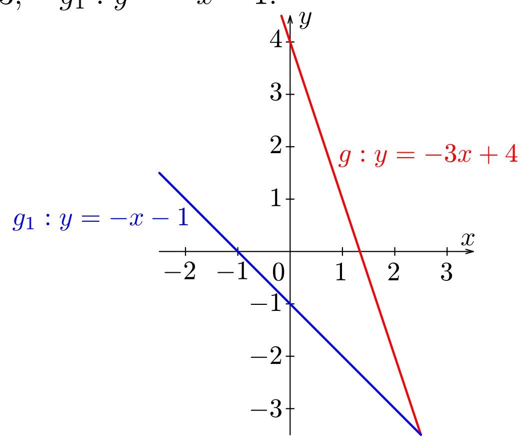
Ž: *Takže nepárne lineárne funkcie sú napríklad $y = 3x$ alebo $y = -\frac{1}{2}x$.*

U: V ďalšom kroku skús analyzovať monotónnosť lineárnej funkcie. Aby ti to išlo ľahšie, pridal som do obrázku grafy ďalších dvoch funkcií, teda teraz tu vidíme grafy funkcií

$$f : y = 2x - 1, \quad g : y = -3x + 4,$$

$$f_1 : y = 2x + 3, \quad g_1 : y = -x - 1.$$





Ž: *Vyzerá to tak, že to nezávisí od koeficientu b, ale len od koeficientu a. Pritom rastúce sú funkcie f a f_1, ktoré majú koeficient $a = 2$. Klesajúce sú zase funkcie g a g_1, ktoré majú koeficient a záporný.*

U: Máš pravdu, ja len upresním, že ak $a > 0$, potom je lineárna funkcia rastúca, ale ak $a < 0$, potom je klesajúca. Dôkaz tohto tvrdenia nájdeš v samostatnej časti.

U: Poďme dokončiť vlastnosti, ešte sme si nič nepovedali o extrémoch a ohraničenosti.

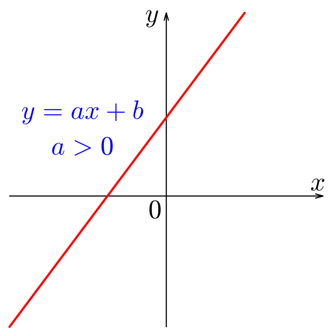
Ž: *To je ľahké, z grafov pekne vidno, že lineárna funkcia nemá extrémy, teda nikde nenadobúda ani maximum ani minimum a takisto nie je ohraničená, ani zhora ani zdola.*

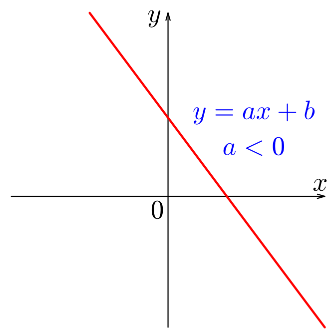
U: Výborne, ešte mi povedz, či to je prostá funkcia.

Ž: *Áno, je to prostá funkcia, pretože ak by som si zostrojil pomocné rovnobežky s osou y, tak by každá z nich preťala graf iba raz.*

U: Veľmi dobre, na záver vidíš zhrnuté všetky vlastnosti lineárnej funkcie, o ktorých sme hovorili:

Vlastnosti lineárnej funkcie $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:





1. grafom je priamka rôznobežná s osami;
2. definičný obor $\mathcal{D} = \mathbb{R}$;
3. obor hodnôt $\mathcal{H} = \mathbb{R}$;
4. ak $b = 0$, tak je nepárna;
5. ak $a > 0$, tak je rastúca; ak $a < 0$, tak je klesajúca;
6. nemá extrémy;
7. nie je ohraničená zdola ani zhora;
8. je prostá.

U: Pozrieme sa teraz bližšie na geometrický význam koeficientov a, b, vystupujúcich v rovnici. Začnime tým, že určíme priesečníky grafu lineárnej funkcie so súradnicovými osami.

Ž: *Priesečník s osou y sa hľadá ľahko, pretože je to taký bod, ktorý má x-ovú súradnicu 0, teda ju dosadím do rovnice a dostanem*

$$y = a \cdot 0 + b = b.$$

U: Čiže priesečník s osou y je bod $Y[0; b]$.

Ž: *No a pre priesečník s osou x zase platí, že jeho y-ová súradnica je nulová, teda po dosadení dostanem rovnicu*

$$0 = ax + b,$$

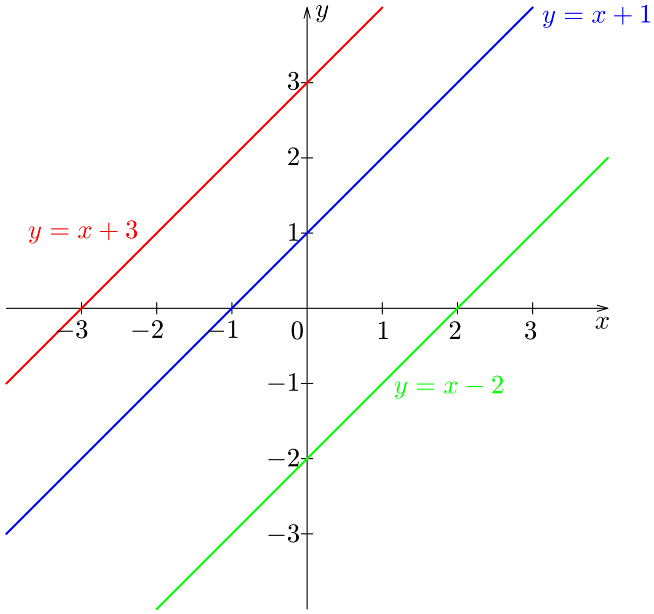
odkiaľ za predpokladu $a \neq 0$ dostanem

$$x = -\frac{b}{a}.$$

U: Výborne, máme teda aj priesečník s osou x-ovou, je to bod $X\left[-\frac{b}{a}; 0\right]$.
Teraz už aj sám môžeš vysvetliť, ako môžeme geometricky interpretovať úlohu koeficientu b.

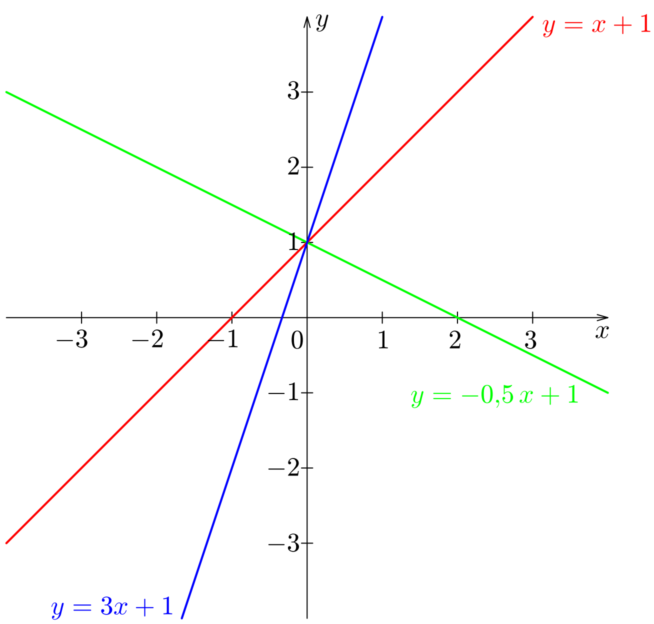
Ž: *Keď sa vrátim k osi y tak vidím, že ju graf pretína práve v bode $Y[0; b]$. Čiže koeficient b udáva druhú súradnicu priesečníka grafu s osou y.*

U: Pre porovnanie máme na nasledujúcom obrázku grafy troch lineárnych funkcií, v ktorých sa koeficient a nemenil, ale menil sa koeficient b:



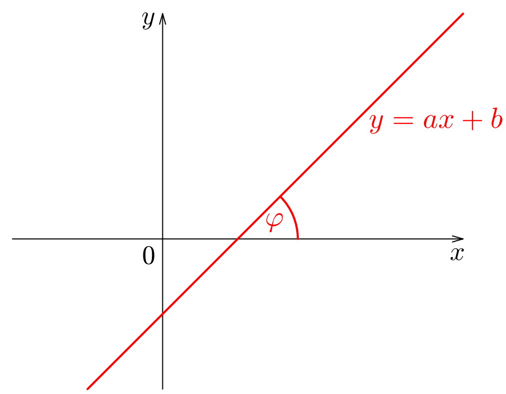
Ž: *To asi nie je náhoda, že posledné grafy sú tri rovnobežné priamky?*

U: Veru nie, súvisí to práve s tým, že koeficient a bol rovnaký. Aby sme teraz odhalili geometrický význam tohto koeficientu, pozrime sa na nasledujúci obrázok. Sú na ňom grafy troch lineárnych funkcií, v ktorých sa koeficient b nemenil, ale menil sa koeficient a:



Ž: *Myslím, že sa mení sklon priamky.*

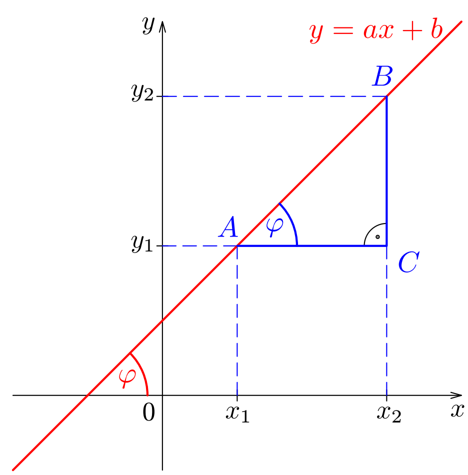
U: Máš pravdu. Aby sme to mohli bližšie popísať, označme písmenom φ uhol, ktorý zviera priamka s kladnou časťou osi x-ovej. Tu je náčrt:



Hovoríme mu smerový uhol priamky.

Ž: *Ako však tento uhol súvisí s áčkom?*

U: To nie je na prvý pohľad vidieť, preto si pomôžeme nasledujúcimi úvahami – sleduj ich na ďalšom obrázku:



Nech rovnicou

$$y = ax + b$$

je daná lineárna funkcia. Označme φ smerový uhol, zatiaľ uvažujme o ostrom uhle. Ďalej si na grafe funkcie zvoľme ľubovoľné dva body $A\,[x_1; y_1]$ a $B\,[x_2; y_2]$. Keďže tieto body ležia na grafe, ich súradnice vyhovujú rovnici funkcie, teda platí:

$$y_1 = a \cdot x_1 + b$$

$$y_2 = a \cdot x_2 + b.$$

Skús pokračovať tým, že od druhej rovnice odčítaš prvú.

Ž: *Dostanem*

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 - a \cdot x_1,$$

čiže

$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1).$$

U: Odtiaľ vyjadríme

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ale v trojuholníku ABC na obrázku vidíme, že uhol pri vrchole A je vlastne smerový uhol a ďalej dĺžka úsečky BC je $y_2 - y_1$ a dĺžka úsečky AC je $x_2 - x_1$. A teda ak ich dáme do pomeru, dostávame...

Ž: *... tangens uhla φ, čiže*

$$a = \mathrm{tg}\varphi.$$

U: Správne, teda koeficient a udáva tangens smerového uhla, a preto sa tento koeficient nazýva aj smernica priamky. K rovnakému záveru dospejeme aj vtedy, ak smerový uhol bude tupý.

U: Na záver sa pozrime ešte na to, ako by sme mohli určiť rovnicu lineárnej funkcie, ak poznáme jej dva body – môžu byť priamo dané v úlohe, môžeme ich vyčítať z grafu alebo určiť zo slovnej úlohy... Ale skúsme konkrétne. Mal by si určiť rovnicu lineárnej funkcie, ktorej graf prechádza bodmi $A[1; -2]$ a $B[3; 4]$.

Ž: *Grafom lineárnej funkcie je priamka, teda dva body by mohli stačiť na jej určenie.*

U: Presne tak.

Ž: *Asi začnem od rovnice, teda hľadám rovnicu typu*

$$y = ax + b.$$

Ale nepoznám a ani b.

U: Poznáš však dva body, ktoré ležia na grafe.

Ž: *Keďže ležia na grafe, tak ich súradnice vyhovujú mojej rovnici, teda ich tam môžem dosadiť za x aj za y a dostanem*

$$-2 = a \cdot 1 + b$$

$$4 = a \cdot 3 + b.$$

U: A to je jednoduchá sústava dvoch rovníc s dvomi neznámymi.

Ž: *Tú zvládnem hravo, napríklad si z prvej rovnice vyjadrím béčko:*

$$b = -2 - a$$

a dosadím to do druhej rovnice

$$4 = 3a + (-2 - a).$$

Odtiaľ dostanem

$$a = 3.$$

Ešte sa vrátim k béčku

$$b = -2 - 3 = -5.$$

U: Výborne, teda naša funkcia je daná rovnicou

$$y = 3x - 5.$$

Dokážte, že lineárna funkcia $y = ax + b$ je pre $a > 0$ rastúca a pre $a < 0$ klesajúca.

U: Najprv zopakujme definíciu rastúcej, resp. klesajúcej funkcie na definičnom obore $\mathcal{D}$.

Ž: *Funkcia f sa nazýva rastúca práve vtedy, keď pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ platí: ak $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) < f(x_2)$.*
Funkcia f sa nazýva klesajúca práve vtedy, keď pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ platí: ak $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) > f(x_2)$.

U: Výborne. Začnime rastúcou funkciou. Uvedom si, že definícia rastúcej funkcie má tvar implikácie: pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ má platiť:

$$\text{ak } x_1 < x_2, \text{ potom } f(x_1) < f(x_2).$$

Teda ak chceš dokázať, že lineárna funkcia je pre $a > 0$ rastúca, tak predpoklad, z ktorého začneš je $x_1 < x_2$ a to, k čomu chceš na konci dospieť je tvrdenie $f(x_1) < f(x_2)$. Pritom vieme, že $f(x_1) = ax_1 + b$, $f(x_2) = ax_2 + b$. Ešte si zopakujme, čo je definičným oborom lineárnej funkcie.

Ž: *Množina všetkých reálnych čísel, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.*

U: Takže môžeš začať s dôkazom – zvolíme ľubovoľné dve reálne čísla také, že

$$x_1 < x_2.$$

Ž: *Teraz by som túto nerovnosť mohol vynásobiť koeficientom a.*

U: Správne, avšak na tomto mieste treba dať veľký pozor.

Ž: *Viem, na čo narážate, ale ja teraz uvažujem o prípade, keď je $a > 0$, teda sa znak nerovnosti neobráti.*

U: Výborne, presne na to som myslel, pokračuj.

Ž: *Takže zatiaľ mám*

$$ax_1 < ax_2.$$

K obom stranám môžem pripočítať koeficient b, to je ekvivalentná úprava nezávisle na tom, aké je číslo b. Teda znak nerovnosti sa neobráti a mám

$$ax_1 + b < ax_2 + b.$$

U: A keďže $ax_1 + b$ je hodnota funkcie v bode x_1, podobne $ax_2 + b$ je hodnota funkcie v bode x_2, máme posledný krok

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Tým sme dokázali, že lineárna funkcia $y = ax + b$ je rastúca, ak je koeficient a kladný.

Ž: *Pre klesajúcu funkciu to skúsim urobiť sám. Najprv si zvolím ľubovoľné dve reálne čísla také, že*

$$x_1 < x_2.$$

Teraz túto nerovnosť vynásobím koeficientom a, ktorý je však záporný, teda sa znak nerovnosti obráti.

U: Výborne, pokračuj.

Ž: *Vzniklo mi*

$$ax_1 > ax_2.$$

K obom stranám pripočítam koeficient b, dostanem

$$ax_1 + b > ax_2 + b.$$

Ale to je to isté, ako keď napíšem

$$f(x_1) > f(x_2).$$

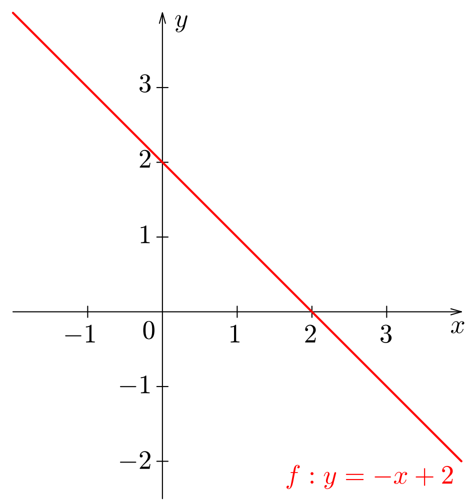
U: Výborne, teda si dokázal, že pre všetky reálne čísla x_1, x_2 platí:

$$\text{ak } x_1 < x_2, \text{ tak } f(x_1) > f(x_2).$$

A tým si dokázal, že ak je koeficient a záporný, tak lineárna funkcia $y = ax + b$ je klesajúca.

Príklad 1: *Zostrojte graf funkcie $f: y = -x + 2$. Z grafu potom určte všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí:*
a) $f(x) = 0$
b) $f(x) > 3$
c) $-1 \leqq f(x) \leqq 2$.

Ž: *S grafom nebude žiadny problém, pretože podľa rovnice $y = -x + 2$ vidím, že ide o lineárnu funkciu, a jej grafom je priamka. No a na to, aby som mohol zostrojiť priamku, mi stačí poznať dva body. Tak napríklad pre $x = 0$ dostanem $y = 2$ a pre $x = 3$ dostanem $y = -1$. Teda zostrojím si body so súradnicami $[0; 2]$ a $[3; -1]$ a spojím ich priamkou. Dostanem takýto graf:*

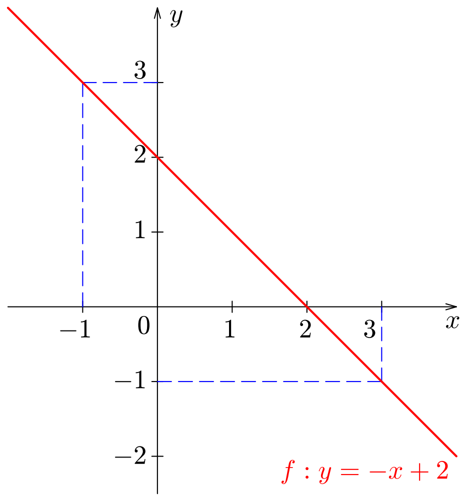


U: Veľmi dobre, pozrime sa teraz na to, čo po nás požaduje zadanie ďalej.

Ž: *Najprv mám z grafu zistiť, kedy je $f(x) = 0$. To vlastne znamená, kde pretne graf os x-ovú, a to vidím, že bude v bode $x = 2$.*

U: Presne tak, ďalej máš určiť, pre ktoré $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) > 3$.

Ž: *Hodnotu 3 nadobudne funkcia v bode -1 a hodnoty väčšie ako 3 vidím, že sú naľavo, teda riešením sú čísla $x \in (-\infty; -1)$.*



U: Výborne, tak ešte posledná časť – pre ktoré x platí, že $-1 \leqq f(x) \leqq 2$?

Ž: *Hodnotu* -1 *nadobudne funkcia* f *v bode* $x = 3$ *a hodnotu* 2 *zase v bode* $x = 0$. *Preto riešením sú všetky čísla medzi tým, čo môžem zapísať takto:*

$$x \in \langle 0; 3 \rangle .$$

Príklad 2:

a) Určte obor hodnôt funkcie $f : y = -3x + 5$, ak jej definičný obor je $\mathcal{D}(f) = \langle -7; 10\rangle$.
b) Napíšte príklad lineárnej funkcie g, ktorej obor hodnôt je $\mathcal{H}(g) = (-4; \infty)$.

Ž: *Začnem prvou časťou. Z rovnice je jasné, že ide o lineárnu funkciu. Keby bola definovaná na celej množine $\mathbb{R}$, tak jej grafom by bola priamka.*

U: Máš pravdu, v našom prípade je však definičným oborom iba interval $\langle -7; 10\rangle$.

Ž: *Tak to potom znamená, že grafom je len úsečka aj s krajnými bodmi, keďže definičný obor je uzavretý interval.*

U: Úplne s tebou súhlasím, ako to však využiješ na určenie oboru hodnôt?

Ž: *Veľmi jednoducho – ak je grafom funkcie úsečka, stačí mi na určenie oboru hodnôt určiť jej krajné body. Takže si vypočítam tieto hodnoty:*

$$f(-7) = -3 \cdot (-7) + 5 = 21 + 5 = 26$$

$$f(10) = -3 \cdot 10 + 5 = -30 + 5 = -25$$

a môžem písať, že oborom hodnôt funkcie je

$$\mathcal{H}(f) = \langle -25; 26\rangle\,.$$

U: Veľmi dobre, ešte funkcia g.

Ž: *Tu má platiť, že $\mathcal{H}(g) = (-4; \infty)$, preto definičným oborom tiež nebude celá množina reálnych čísel, ale len jej časť. Môžem to urobiť aj tak, že si vymyslím lineárnu funkciu, napríklad $g : y = x + 3$ a zistím, v ktorom bode nadobúda hodnotu -4. Čiže idem riešiť jednoduchú rovničku*

$$-4 = x + 3,$$

odkiaľ dostanem $x = -7$.

U: Dobre, ale čo s tým teraz?

Ž: *Teraz si ešte uvedomím, že moja funkcia je rastúca, pretože koeficient $a = 1$ je kladný, a tak pre všetky $x > -7$ bude $g(x) > -4$.*

U: Výborne, zhrniem teda, že jedným z možných riešení je funkcia $g : y = x + 3$ s definičným oborom $(-7; \infty)$.

Úloha 2:

a) Určte obor hodnôt funkcie $f : y = 2x - 2$, ak $\mathcal{D}(f) = (-4; 3\rangle$.
b) Určte všetky lineárne funkcie g, pre ktoré platí: $\mathcal{D}(g) = \langle 3; 5\rangle$ a $\mathcal{H}(g) = \langle -5; -3\rangle$.

Výsledok: a) $\mathcal{H}(f) = (-10; 4\rangle$; b) $g_1 : y = x - 8$; $\quad g_2 : y = -x$

Príklad 3: *Naftová cisterna má objem 2000 litrov. Čerpadlo dodáva do cisterny 50 litrov nafty za minútu. Pred uvedením čerpadla do chodu bolo v cisterne 200 litrov nafty. Určte funkciu, ktorá vyjadruje, ako sa mení množstvo nafty v cisterne v čase, keď sa plní. Čas počítajte od okamihu, keď čepadlo začalo pracovať, až do okamihu, keď sa cisterna naplnila. Načrtnite graf získanej funkcie.*

U: Na úvod si uvedom, aké veličiny vystupujú v tejto úlohe a vhodne ich označ.

Ž: *Máme tu do činenia s časom, počas ktorého priteká nafta do nádrže. Označím ho t. A potom tu ešte máme objem nafty v nádrži, označím ho V. Tento objem sa postupne mení, závisí od času, lebo čím dlhšie nechám čerpadlo otvorené, tým viac nafty bude v nádrži.*

U: V akých jednotkách to bude?

Ž: *Čas budem merať v minútach a objem v litroch.*

U: Dobre, tak poďme na rovnicu.

Ž: *Na začiatku je v nádrži 200 litrov nafty, po jednej minúte tam bude $200 + 50 = 250$ litrov, po dvoch minútach $200 + 2 \cdot 50 = 300$ litrov a tak ďalej. Vlastne keď za každú minútu pritečie 50 litrov, tak všeobecne za t minút pritečie $50 \cdot t$ litrov. Ale k tomu ešte musím pripočítať tých 200 litrov, ktoré boli v nádrži na začiatku, takže dostanem takúto rovnicu:*

$$V = 50t + 200.$$

U: Výborne, určite vieš, že si dostal lineárnu funkciu. Mňa by však teraz zaujímal jej definičný obor.

Ž: *Nemôžu to byť všetky reálne čísla, pretože je blbosť uvažovať o zápornom čase, takže definičným oborom budú iba nezáporné reálne čísla.*

U: Teraz si sa dal nachytať – je síce pravda, že nám záporné čísla nevyhovujú, ale na druhej strane, ako dlho bude nafta pritekať do nádrže?

Ž: *Predsa kým sa nenaplní. Aha, som ja ale truľo... Takže si zistím, kedy bude nádrž plná. A to vypočítam tak, že si do rovnice za V dosadím 2000 litrov:*

$$2000 = 50t + 200$$

Odtiaľ

$$1800 = 50t,$$

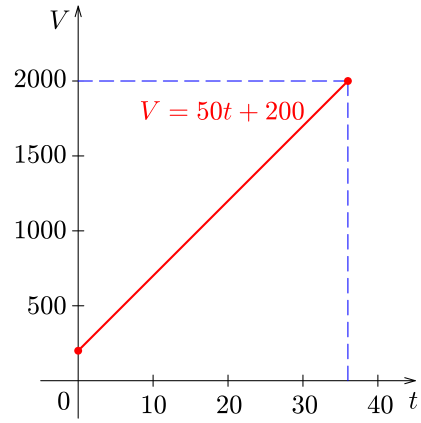
čiže

$$t = 36.$$

Teda nádrž bude plná po 36 minútach, preto definičným oborom bude $\langle 0; 36 \rangle$.

U: Výborne, môžeš sa pustiť do grafu tejto funkcie.

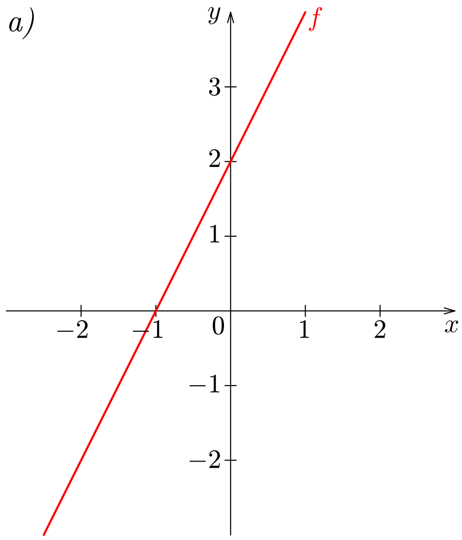
Ž: *Keďže je to lineárna funkcia, grafom by mohla byť priamka, ale vzhľadom na náš definičný obor to bude len úsečka. Jeden krajný bod označuje otvorenie čerpadla a má súradnice $[0; 200]$, druhý označuje plnú nádrž a má súradnice $[36; 2000]$. Graf je na nasledujúcom obrázku:*

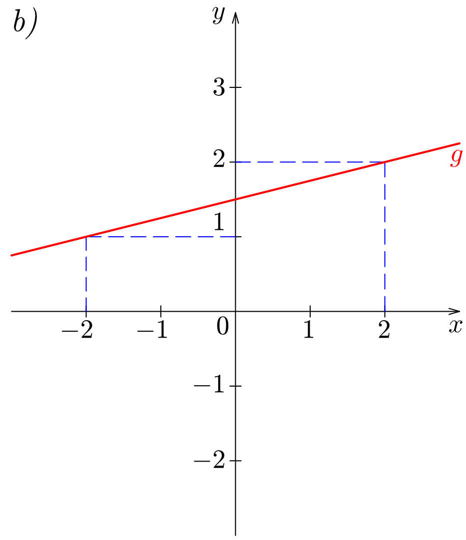


Úloha 4: *Zo stanice vyšiel osobný vlak priemernou rýchlosťou* $48\,km/h$*, o* 75 *minút neskôr vyšiel tým istým smerom rýchlik priemernou rýchlosťou* $80\,km/h$*. Nájdite funkciu vyjadrujúcu závislosť vzájomnej vzdialenosti oboch vlakov od času. Uvažujte o časovom intervale, ktorý začína okamihom, keď rýchlik vyšiel a končí sa okamihom, keď dostihol osobný vlak.*

Výsledok: $s = 60 - 32t,\ t \in \left\langle 0; \frac{15}{8} \right\rangle$

Príklad 4: *Určte rovnice lineárnych funkcií, ktorých grafy sú na obrázku:*





Ž: *Mám určiť rovnice lineárnych funkcií, teda rovnice v tvare*

$$y = ax + b.$$

Začnem funkciou f na prvom obrázku. Vidím, že súradnicové osi pretína v bodoch $X[-1; 0]$ a $Y[0; 2]$. Bod Y mi veľmi pomôže, pretože jeho druhá súradnica určuje hodnotu koeficientu b, teda

$$b = 2.$$

U: Výborne, ešte potrebuješ zistiť koeficient a.

Ž: *Tak na to zase použijem bod X, a to tak, že dosadím jeho súradnice do rovnice funkcie, dostanem*

$$0 = a \cdot (-1) + b,$$

čiže

$$0 = -a + 2,$$

odkiaľ

$$a = 2.$$

U: Teda funkcia f má rovnicu

$$y = 2x + 2.$$

Ž: *Na druhom obrázku je graf funkcie g, ale tu nemôžem postupovať rovnako ako v prvom prípade, pretože neviem presne určiť priesečníky s osami.*

U: To je pravda, na grafe sú však dobre viditeľné iné dva body.

Ž: *Hej, vidím ich, je to bod so súradnicami* $[-2; 1]$ *a bod* $[2; 2]$*. A keďže ležia na grafe, ich súradnice vyhovujú rovnici* $y = ax + b$*, čiže môžem ich dosadiť za* x *aj za* y *a dostanem*

$$1 = a \cdot (-2) + b$$

$$2 = a \cdot 2 + b.$$

U: To je sústava dvoch rovníc s dvoma neznámymi.

Ž: *Nebude problém ju vyriešiť. Stačí obe rovnice sčítať a dostanem*

$$3 = 2b,$$

teda

$$b = \frac{3}{2}.$$

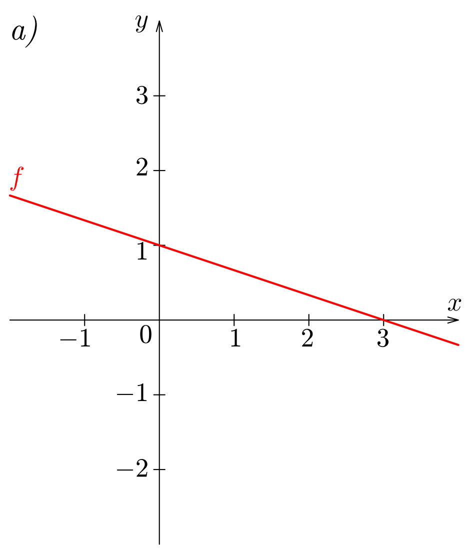
Dosadím naspäť napríklad do druhej rovnice a dopočítam ešte áčko, vyjde mi

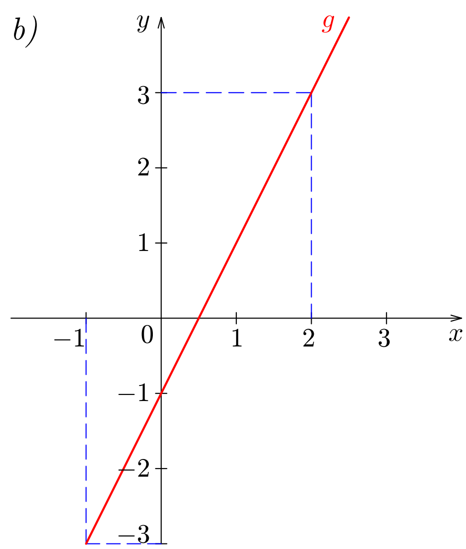
$$a = \frac{1}{4}.$$

Hotovo, funkcia g *má rovnicu*

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}.$$

Úloha 4: *Na obrázku sú grafy lineárnych funkcií* f *a* g*. Určte ich rovnice.*





Výsledok: a) $f : y = -\frac{1}{3}x + 1$; b) $g : y = 2x - 1$

Príklad 5: *Určte rovnicu lineárnej funkcie, ak viete, že*
a) jej graf prechádza bodmi $A\,[1;1]$ *a* $B\,[3{,}5;-7]$*;*
b) platí $f(2)=-4$*;* $f(-1)=5$*.*

U: Najprv si pripomeňme, že lineárna funkcia má rovnicu …

Ž: … $y=ax+b$ …

U: … v ktorej koeficienty a,b sú reálne čísla. A tvojou úlohou je nájsť práve tieto koeficienty.

Ž: *V časti a) mám dané dva body* A,B*, ktorými graf funkcie prechádza. Teda súradnice týchto dvoch bodov dosadím do rovnice funkcie za* x *aj za* y *a dostanem takúto sústavu dvoch rovníc:*

$$1=a\cdot 1+b$$

$$-7=a\cdot 3{,}5+b.$$

U: Akú metódu si vyberieš na jej vyriešenie?

Ž: *Asi dosadzovaciu – z prvej rovnice vyjadrím* b*:*

$$b=1-a,$$

dosadím do druhej rovnice

$$-7=3{,}5a+(1-a),$$

čiže

$$-8=2{,}5a,$$

teda

$$a=-3{,}2.$$

Teraz dosadím naspäť a dostanem

$$b=1-(-3{,}2)=4{,}2.$$

U: Dobre, teda hľadanou funkciou je

$$y=-3{,}2x+4{,}2.$$

Ž: *V druhej časti nemám dané body, ale viem niečo o hodnotách funkcie* f*. A to je vlastne na to isté kopyto, pretože* $f(2)=-4$ *môžem prepísať ako*

$$-4=a\cdot 2+b,$$

a zase to, že $f(-1)=5$ *môžem napísať ako*

$$5=a\cdot(-1)+b.$$

U: Teda opäť si dostal sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi.

Ž: *Áno, ale teraz si vyberiem inú metódu – od prvej rovnice odčítam druhú, dostanem*

$$-9 = 3a,$$

teda hneď získam

$$a = -3.$$

Potom už len dopočítam, že $b = 2$*, teda rovnica funkcie je*

$$y = -3x + 2.$$

U: Bez chybičky.

Úloha 5: *Určte rovnicu lineárnej funkcie, ak jej graf prechádza bodmi* $K\,[0; -2]$ *a* $L\,[3; 5]$.

Výsledok: $y = \dfrac{7}{3}x - 2$

Príklad 6:

a) Napíšte rovnicu lineárnej funkcie, ktorej graf prechádza bodom $[3;4]$ *a s osou* x*-ovou zviera uhol veľkosti* $60°$*.*

b) Určte veľkosť uhla, ktorý zviera graf funkcie $y = 3x - 2$ *s kladnou časťou osi* x*.*

Ž: *V prvej časti hľadám rovnicu lineárnej funkcie, teda rovnicu v tvare*

$$y = ax + b.$$

U: Pripomeňme si geometrický význam koeficientov a, b.

Ž: *Koeficient* a *súvisí s uhlom* φ*, ktorý graf funkcie zviera s kladnou časťou osi* x *a to tak, že* $a = \mathrm{tg}\varphi$*. Koeficient* b *zase udáva bod, v ktorom graf pretne os* y*-ovú.*

U: Výborne, pusť sa do toho.

Ž: *Mám povedané, že uhol* $\varphi = 60°$*, teda ak si zistím tangens* $60°$*, budem mať koeficient* a*. Vezmem si kalkulačku ... Už to je,* $a = 1{,}7320508$*.*

U: No počkaj, hádam nechceš pracovať s takouto hodnotou? Veru by si mohol vedieť, že $\mathrm{tg}60° = \sqrt{3}$.

Ž: *Čosi sa mi marí, ale už som to zabudol. Dobre, teda* $a = \sqrt{3}$*. Ďalej viem, že graf má prechádzať bodom* $[3;4]$*, teda ak dosadím do rovnice funkcie za* x *trojku a za* y *štvorku, musí platiť, že*

$$4 = \sqrt{3} \cdot 3 + b,$$

odkiaľ

$$b = 4 - 3 \cdot \sqrt{3}.$$

U: Zvládol si to výborne, teda hľadanou rovnicou je

$$y = \sqrt{3} \cdot x + 4 - 3 \cdot \sqrt{3}.$$

Ž: *Časť b) je jednoduchšia, mám určiť veľkosť uhla* φ*, ale už sme povedali, že tangens tohto uhla dáva koeficient* a*. Teda*

$$\mathrm{tg}\varphi = 3,$$

odkiaľ pomocou kalkulačky dostanem

$$\varphi \doteq 71°34'.$$

Príklad 7: *Dané sú funkcie* $f_1\colon y = 2x+1,\ f_2\colon y = 2x-3,\ f_3\colon y = -2x+3,\ f_4\colon y = \frac{1}{2}x+3,$ $f_5\colon y = 2x - \frac{1}{2},\ f_6\colon y = -x+1$. *Rozhodnite:*
a) Ktoré z týchto funkcií sú rastúce, resp. klesajúce?
b) Ktoré z grafov daných funkcií sú rovnobežné priamky?
c) Ktoré z grafov daných funkcií prechádzajú tým istým bodom na osi y-ovej?

Ž: *Ak dobre vidím, tak všetkých šesť rovníc predstavuje lineárne funkcie. S tým by nemalo byť veľa práce.*

U: V prvej časti si pripomeňme, ako rozhodujeme o monotónnosti lineárnej funkcie.

Ž: *Nie je to nič zložité – ak v rovnici funkcie*

$$y = ax + b$$

je koeficient a kladný, potom je funkcia rastúca, a ak je záporný, potom je klesajúca.

U: A ak by bolo $a = 0$?

Ž: *V tom prípade by sme dostali konštantnú funkciu.*

U: Vidím, že to ovládaš, poďme na to.

Ž: *Takže podľa toho rastúce sú funkcie* $f_1,\ f_2,\ f_4,\ f_5$ *a klesajúce funkcie* f_3 *a* f_6.

U: Dobre, poďme sa teraz venovať grafom.

Ž: *Viem, že grafmi lineárnych funkcií sú priamky.*

U: A ako rozhodneš, či sú niektoré grafy rovnobežné bez toho, aby si ich kreslil?

Ž: *Tu mi zase pomôže koeficient a, pretože on určuje okrem monotónnosti aj sklon priamky. Teda tie funkcie, ktoré majú rovnaké áčko, budú mať rovnobežné grafy. Čiže sú to funkcie* $f_1,\ f_2$ *a ešte aj* f_5.

U: A ostatné?

Ž: *Tie sú už všetky iné. Idem na poslednú časť. Mám zistiť, ktoré grafy prechádzajú tým istým bodom na osi y-ovej. Lenže graf lineárnej funkcie prechádza práve takým bodom na osi y, aký má koeficient b. Teda tie funkcie, ktoré majú rovnaký koeficient b, sa stretnú na osi y. No a keď sa popozerám po zadaní, tak vidím dve také dvojice: funkcie* $f_1,\ f_6$ *a funkcie* $f_3,\ f_4$.

U: Ide ti to ako po masle.

Úloha 7: *Nájdite rovnicu funkcie g, ktorej graf je rovnobežný s grafom funkcie* $f : y = 3x+1$ *a prechádza bodom* $M\,[-7; 1]$.

Výsledok: $g : y = 3x + 22$

Príklad 8: *Zostrojte graf funkcie danej predpisom:*

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{pre} \quad x \in (-\infty; -3\rangle\,; \\ 2x+8 & \text{pre} \quad x \in (-3; 0\rangle\,; \\ -2x+8 & \text{pre} \quad x \in (0; \infty)\,. \end{cases}$$

Ž: *Tak tento zápis vyzerá dosť zložito.*

U: Na prvý pohľad áno, ak sa však dobre pozrieš, tak predpis tejto funkcie sa skladá z troch samostatných častí.

Ž: *A každá z týchto častí predstavuje lineárnu funkciu, teda grafom bude časť priamky. A na to, aby som mohol zostrojiť priamku, mi stačí poznať dva body ležiace na nej. Prvá funkcia je daná predpisom $y = x + 5$, tak si vypočítam dve hodnoty, napríklad*

$$f_1(-5) = -5 + 5 = 0$$

$$f_1(-3) = -3 + 5 = 2.$$

U: Budeš to hneď aj kresliť?

Ž: *Nie, graf si nechám na koniec, najprv si všetko pripravím.*

U: V poriadku.

Ž: *Takže druhá časť má predpis $y = 2x + 8$, vypočítam*

$$f_2(-3) = 2 \cdot (-3) + 8 = 2.$$

U: Nevadí ti, že bod -3 nepatrí do definičného oboru v druhej časti?

Ž: *Nevadí, pretože graf nakreslím jednoducho ako úsečku bez krajného bodu. Ale aby som vedel, kde mám nakresliť ten krajný bod, na to som počítal $f_2(-3)$.*

U: V poriadku, pokračuj.

Ž: *Takže ešte vypočítam*

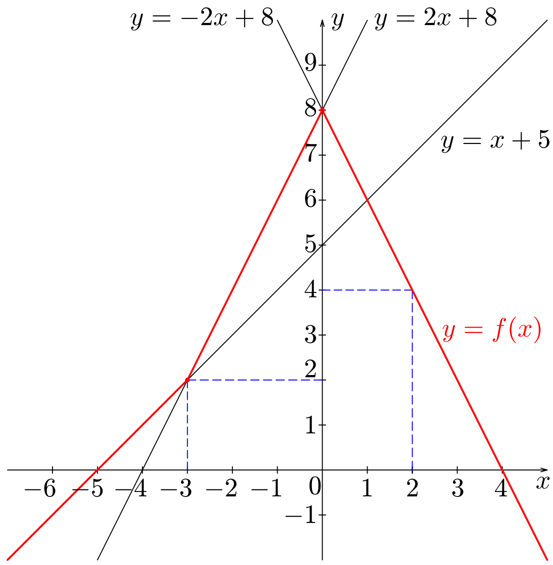
$$f_2(0) = 2 \cdot 0 + 8 = 8.$$

Napokon posledná časť je daná rovnicou $y = -2x + 8$, dosadím si hoci aj nulu a dvojku:

$$f_3(0) = -2 \cdot 0 + 8 = 8$$

$$f_3(2) = -2 \cdot 2 + 8 = 4.$$

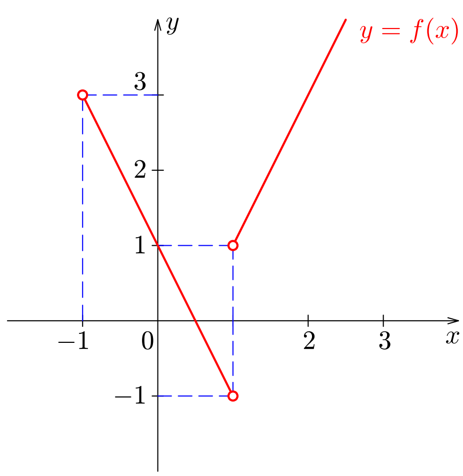
A teraz sa pustím do grafu. Zakreslím všetky tri priamky, ale na každej vyznačím len tú časť, pre ktoré x podľa zadania platí. Dostanem takýto obrázok:



Úloha 8: *Zostrojte graf funkcie danej predpisom:*

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1; & -1 < x < 1 \\ 2x - 1; & x > 1. \end{cases}$$

Výsledok:



Príklad 9: *Daná je lineárna funkcia $h: y = 2x - 4$. Určte rovnicu lineárnej funkcie, ktorej graf je súmerne združený s grafom funkcie h podľa:*
a) osi x;
b) bodu $[0; 0]$;
c) priamky $y = x$.

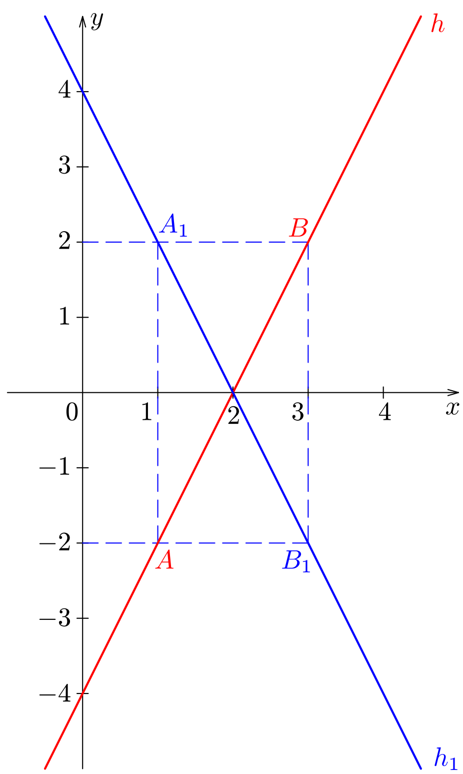
Ž: *Neviem dosť dobre, odkiaľ začať, tak si skúsim celú situáciu nakresliť.*

U: To nebude na škodu. Čo je grafom danej funkcie?

Ž: *Keďže je to lineárna funkcia, jej grafom je priamka. A na jej určenie mi stačia dva body. Tak si vyberiem napríklad $x = 1$ a $x = 3$, k tomu dopočítam y a mám takéto dva body na grafe: $A\,[1; -2]$ a $B\,[3; 2]$.*

U: Dobre, tak poďme na úlohu a). Máš zobraziť graf funkcie h v osovej súmernosti podľa osi x. Tým dostaneš novú priamku, ktorá bude predstavovať graf novej funkcie h_1.

Ž: *Stačí mi zobraziť tie dva body. Keď si predstavím, ako sa bod A zobrazuje v osovej súmernosti podľa x-ovej osi, tak sa jeho x-ová súradnica nezmení, ale jeho y-ová súradnica sa zmení na opačnú. Takže dostanem nový bod $A_1\,[1; 2]$. Podobne to bude aj s bodom B, ktorý sa zobrazí do bodu $B_1\,[3; -2]$. A tu som to aj nakreslil:*



U: Výborne, my však potrebujeme nájsť rovnicu novej funkcie h_1. Môžeme k tomu použiť práve nájdené body A_1, B_1.

Ž: *Súradnice týchto bodov musia vyhovovať rovnici lineárnej funkcie $y = ax + b$. Tak ich tam dosadím za x aj za y a dostanem:*

$$2 = a \cdot 1 + b$$

$$-2 = a \cdot 3 + b.$$

U: Jednoduchá sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi.

Ž: *Takú viem ľahko vyriešiť, dostanem $a = -2$, $b = 4$. Čiže rovnica funkcie h_1 je*

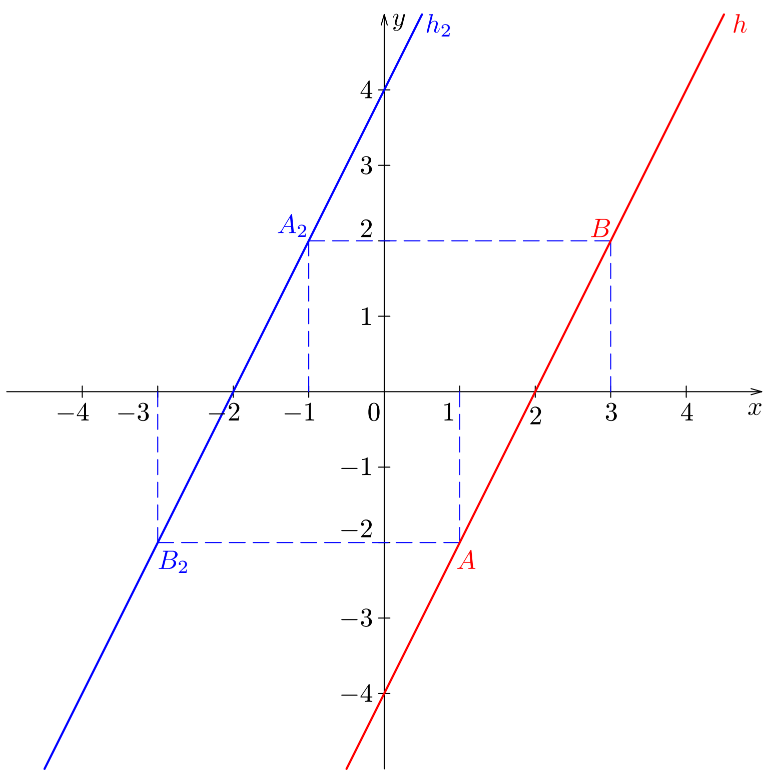
$$y = -2x + 4.$$

U: Môžeš si všimnúť, že sa oba koeficienty lineárnej funkcie zmenili na čísla opačné.

Ž: *Naozaj, skúsim si to zapamätať. Idem na časť b). Mám môj graf zobraziť stredovo súmerne podľa bodu $[0; 0]$. Opäť budem zobrazovať moje dva body. Bod A sa dostane zo štvrtého kvadrantu do druhého a bod B z prvého kvadrantu do tretieho. Myslím, že sa každá súradnica zmení pri tom na číslo opačné. Je to tak?*

U: Áno, máš pravdu, teda body nového grafu budú $A_2\,[-1; 2]$ a $B_2\,[-3; -2]$.

Ž: *Tu je k tomu obrázok, pozrite sa, vyšli mi rovnobežky!*



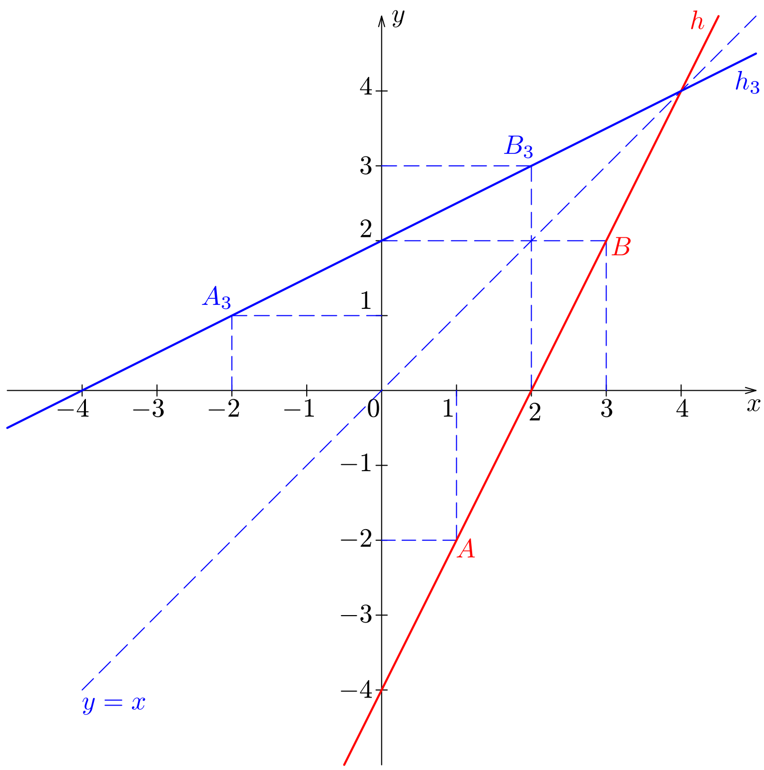
Ž: *Tie rovnobežky by som mohol využiť, lebo viem, že rovnobežné grafy majú rovnaký koeficient a. Teda $a = 2$ ostane. A ešte viem, že koeficient b určuje druhú súradnicu priesečníka grafu s osou y. Z obrázku teda vyplýva, že koeficient b bude rovný 4, pretože graf novej funkcie pretína os y v bode $[0; 4]$.*

U: Výborne, teda funkcia h_2 má rovnicu

$$y = 2x + 4.$$

Môžeš prejsť na poslednú časť.

Ž: *Toto už asi nebude také ľahké, zobraziť graf osovo súmerne podľa priamky $y = x$. Radšej si to najprv nakreslím:*



Ž: *Vidím, že bod $A\,[1;-2]$ sa zobrazil do bodu $A_3\,[-2;1]$ a bod $B\,[3;2]$ do bodu $B_3\,[2;3]$. Rovnicu by som mohol hľadať tak, že si súradnice týchto bodov dosadím do rovnice lineárnej funkcie $y = ax + b$ a dostanem sústavu rovníc:*

$$1 = -2a + b$$

$$3 = 2a + b.$$

U: Dá sa to urobiť aj takto, predpokladám, že vyriešenie takejto sústavy ti nerobí žiadne problémy.

Ž: *Nie veru, po sčítaní rovníc dostanem $b = 2$ a po ich odčítaní zase $a = \dfrac{1}{2}$. Takže posledná rovnica je*

$$h_3 : y = \frac{1}{2}x + 2.$$

U: Dobre. Možno si si všimol, že pre body A a A_3 platilo, že majú vymenené súradnice, rovnako aj body B a B_3. Je to preto, lebo funkcie h a h_3 sú jedna k druhej inverzné, keďže ich grafy sú súmerné podľa priamky $y = x$. A preto sme rovnicu funkcie h_3 mohli hľadať aj takto – z rovnice

$$h : y = 2x - 4$$

vyjadríme x pomocou y, teda

$$x = \frac{1}{2}y + 2$$

a vymeníme označenie premenných. Tým získame rovnicu inverznej funkcie $h_3 : y = \frac{1}{2}x + 2$.

Ž: *Na to som si nespomenul.*

Úloha 9: *Daná je lineárna funkcia $h : y = 3x + 2$. Určte rovnicu lineárnej funkcie, ktorej graf je súmerne združený s grafom funkcie h podľa:*
a) osi y;
b) bodu $[0; 0]$;
c) priamky $y = x$.

Výsledok: a) $y = -3x + 2$; b) $y = 3x - 2$; c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$