Kvadratická funkcia

RNDr. Beáta Varinčíková

U: Vieme, že funkcia predstavuje určitú závislosť medzi dvoma veličinami. V prípade, že jedna veličina závisí od druhej mocniny druhej veličiny, hovoríme o kvadratickej závislosti. Jednoduchým príkladom je závislosť obsahu štvorca od strany štvorca

$$S = a^2,$$

alebo závislosť dráhy rovnomerne zrýchleného pohybu od času

$$s = s_0 + v_0 t + at^2.$$

Ž: *Teda musí tam byť vždy niečo na druhú.*

U: Ak použijeme obvyklé označenie premenných x a y, tak najjednoduchším prípadom kvadratickej funkcie je funkcia s rovnicou

$$y = x^2.$$

V predpise funkcie však môže vystupovať okrem kvadratického člena aj lineárny a absolútny, preto všeobecný predpis pre kvadratickú funkciu bude

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Ž: *Koeficienty a, b, c sú ľubovoľné reálne čísla?*

U: Áno, až na jednu podmienku. Skús porozmýšľať.

Ž: *Už to vidím, nemôže byť $a = 0$, pretože by to už nebola kvadratická, ale len lineárna funkcia.*

U: Výborne. A aký bude definičný obor tejto funkcie?

Ž: *Za x môžem dosadiť hocijaké číslo, teda $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.*

U: Presne tak, môžeme teda zhrnúť:
Kvadratickou funkciou nazývame každú funkciu danú rovnicou

$$f : y = ax^2 + bx + c,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Je definovaná na $\mathbb{R}$.

Ž: *Myslím, že s grafom kvadratickej funkcie som sa už stretol, nie je to priamka.*

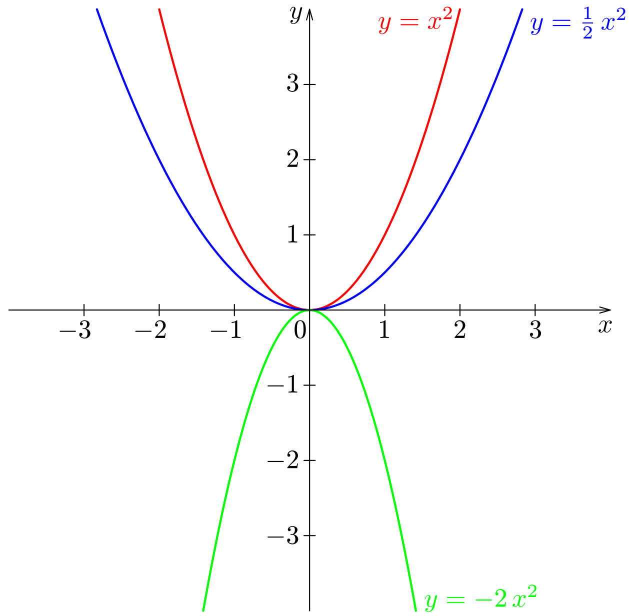
U: Máš pravdu, je to krivka, ktorá sa nazýva parabola a my sa teraz pozrieme na to, od čoho závisí jej tvar a poloha. Začneme tým, že do jedného obrázku zostrojíme grafy funkcií

$$f_1 : y = x^2, \quad f_2 : y = -2x^2, \quad f_3 : y = \frac{1}{2}x^2.$$

Ž: *Keďže grafy nie sú priamky, potrebujem si v súradnicovej sústave zostrojiť viac bodov, napísané sú v tabuľke v rámčeku.*

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$0{,}5$	0	$0{,}5$	2

U: Dobre. Na nasledujúcom obrázku sú zakreslené grafy funkcií f_1, f_2 a f_3. Sú to paraboly.



Ž: *Tieto paraboly však nie sú rovnaké, dve sú otočené dohora a jedna nadol. Dohora sú otočené červená a modrá, ktoré majú rovnice*

$$y = 1x^2, \quad y = \frac{1}{2}x^2.$$

Nadol je otočená zelená parabola s rovnicou

$$y = -2x^2.$$

Myslím, že vidím súvislosť – nahor obrátené majú kladný koeficient a, ale tá so záporným koeficientom je obrátená naopak.

U: Máš pravdu. Platí:
Pre $a > 0$ je grafom kvadratickej funkcie parabola „obrátená“ nahor, pre $a < 0$ parabola „obrátená“ nadol.

Ž: *Všimol som si ešte jednu vec – paraboly nie sú rovnako široké. Zelená parabola s rovnicou $y = -2x^2$ je najužšia a modrá parabola s rovnicou $y = \frac{1}{2}x^2$ zas najširšia. Zrejme to opäť nejako súvisí s koeficientami, len mi to uniká.*

U: Ak ťa zaujíma „šírka“ paraboly, nevšímaj si na chvíľu znamienko koeficientu, pretože to – ako sme pred chvíľou povedali – len obráti parabolu. Potom už ľahko zistíš, že platí:
Čím je absolútna hodnota koeficienta a väčšia, tým je parabola „užšia“.

U: Ak chceme zostrojiť graf kvadratickej funkcie, je dobré poznať niektoré význačné body na grafe.

Ž: *Zrejme máte na mysli priesečníky s osami.*

U: Áno, a ešte k tomu aj vrchol paraboly. Ukážeme si to na funkcii

$$f : y = x^2 - 2x - 3.$$

Vieš určiť priesečníky jej grafu s osami?

Ž: *Priesečník grafu s osou y sa hľadá ľahko, je to bod, ktorý má x-ovú súradnicu nulovú. Preto dosadím do predpisu funkcie za x nulu a dostanem*

$$y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3.$$

Teda priesečník paraboly s osou y je bod $Y[0; -3]$.

U: Môžeme to skúsiť aj zovšeobecniť. Ak do predpisu kvadratickej funkcie

$$f : y = ax^2 + bx + c$$

dosadíme za x nulu, dostaneme

$$y = c.$$

Ž: *Aha, takže koeficient c vlastne určuje druhú súradnicu hľadaného priesečníka!*

U: Máš pravdu, zopakujem ešte raz:
Graf kvadratickej funkcie $f : y = ax^2 + bx + c$ pretína os y-ovú v bode $Y[0; c]$.
Môžeš prejsť na priesečníky grafu funkcie s osou x.

Ž: *Priesečníky grafu s osou x sú také body, ktoré majú y-ovú súradnicu nulovú. To znamená, že v rovnici funkcie dosadím za y nulu. V mojom prípade vznikne*

$$0 = x^2 - 2x - 3.$$

To je obyčajná kvadratická rovnica, ktorú viem spamäti rozložiť na súčin

$$0 = (x - 3)(x + 1).$$

Jej koreňmi sú čísla 3 a -1.

U: Hovorí sa im tiež nulové body kvadratickej funkcie. Graf našej funkcie teda pretína os x-ovú v dvoch bodoch: $X_1[3; 0]$ a $X_2[-1; 0]$. Tvoj postup opäť zovšeobecním:
Prvé súradnice priesečníkov grafu kvadratickej funkcie s osou x určíme riešením rovnice $ax^2 + bx + c = 0$.
Skús rozdiskutovať, koľko takýchto priesečníkov môže vzniknúť.

Ž: *Ak riešim kvadratickú rovnicu, môže vyjsť kladný diskriminant, vtedy má rovnica dva korene. To znamená, že graf funkcie pretne os x-ovú dvakrát. Ale rovnica môže mať aj jeden koreň, ak je diskriminant nulový. Vtedy by sa parabola asi iba dotkla osi. No a napokon sú aj také kvadratické rovnice, ktoré nemajú žiadny reálny koreň, pretože ich diskriminant je záporný. A to by znamenalo, že parabola nemá s osou x spoločný ani jediný bod.*

U: Výborne. Zvládli sme priesečníky grafu s oboma osami. Skúsme teraz nájsť vrchol paraboly.

Ž: *Mám nájsť vrchol paraboly $y = x^2 - 2x - 3$. Priznávam, že neviem, odkiaľ začať.*

U: Začni úpravou na štvorec. Prvé dva členy $x^2 - 2x$ potrebuješ doplniť do štvorca, teda do druhej mocniny vhodného dvojčlena.

Ž: *Takže tam doplním jednotku, lebo platí, že*

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 .$$

Jednotku ale nemôžem len tak pridať, musím ju hneď aj odobrať. Celý zápis bude takýto:

$$y = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x - 1)^2 - 4.$$

U: Pozrime sa teraz na výsledný zápis $y = (x - 1)^2 - 4$. Keďže druhá mocnina ľubovoľného reálneho čísla je číslo nezáporné, tak platí

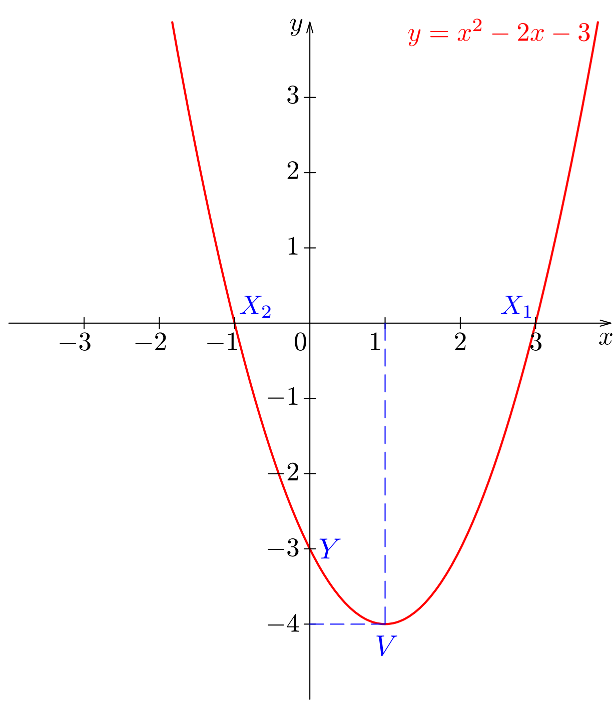
$$(x - 1)^2 \geqq 0.$$

Potom však

$$y = (x - 1)^2 - 4 \geqq -4.$$

Preto najmenšia hodnota, ktorú môže naša funkcia nadobudnúť, je číslo -4. A to nastane vtedy, keď je $(x - 1)^2 = 0$, teda keď $x = 1$. Tak sme našli minimum tejto funkcie a vlastne aj vrchol paraboly, ktorým je bod $V\,[1; -4]$.

Ž: *Myslím, že teraz už viem nakresliť graf tejto funkcie. Bude to parabola obrátená nahor, s vrcholom v bode $V\,[1; -4]$. A vyznačím aj všetky priesečníky s osami. Tu je to:*



U: Dobre. Graf našej funkcie môžeme zostrojiť aj pomocou transformácií grafov funkcií. Stačí si uvedomiť, že rovnica funkcie v tvare

$$y = (x-1)^2 - 4$$

hovorí o tom, že graf funkcie $y = x^2$ posunieme o jeden dielik doprava v smere osi x-ovej a o štyri dieliky nadol v smere osi y-ovej.

U: Postup, ktorým sme našli vrchol paraboly, teraz zovšeobecníme.

Ž: *Takže vezmem predpis kvadratickej funkcie v tvare $y = ax^2+bx+c$ a idem doplňať úpravou na štvorec. No, asi som skončil ...*

U: Najprv vyber koeficient a pred zátvorku, aby si dostal normovaný kvadratický trojčlen. To je taký, ktorý má pri x^2 koeficient jedna.

Ž: *Vyberám:*

$$y = ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

U: Dobre. A teraz vezmime zo zátvorky prvé dva členy

$$x^2+\frac{b}{a}x$$

a skúsme ich doplniť do štvorca. Použijeme známy vzorec

$$A^2+2AB+B^2 = (A+B)^2\,.$$

Ak ho porovnáš s našimi členmi, tak vidíš, že

$$A = x, \quad 2AB = \frac{b}{a}x.$$

Odtiaľ dostaneme

$$B = \frac{b}{2a}.$$

Ďalej môžeš pokračovať aj sám.

Ž: *Skúsim to. Potrebujem ešte doplniť B^2. Preto tam pridám a hneď aj odoberiem $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Teda*

$$y = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right].$$

U: Zatiaľ veľmi dobre, pokračuj.

Ž: *V ďalšom kroku už prvé tri modré členy nahradím podľa vzorca druhou mocninou a zvyšok skúsim upraviť takto:*

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right].$$

U: Ešte odstráň hranatú zátvorku.

Ž: *Dostanem tvar*

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

U: Výborne, teraz urobíme podobnú úvahu ako pred chvíľou v príklade. Ak je $a > 0$, tak platí

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqq 0,$$

teda

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \geqq -\frac{b^2}{4a} + c.$$

Preto najmenšia hodnota funkcie je $-\frac{b^2}{4a}+c$ a to vtedy, ak $x = -\frac{b}{2a}$. Takže vrchol paraboly je bod

$$V\left[-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} + c\right].$$

K rovnakému výsledku by sme prišli aj pre $a < 0$, vtedy pre $x = -\frac{b}{2a}$ dostávame maximum funkcie.

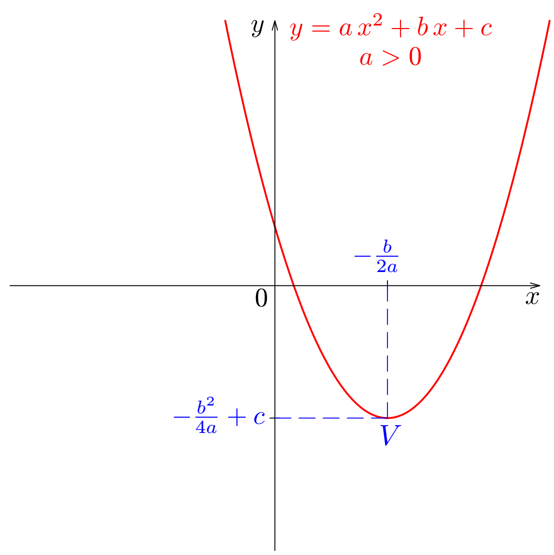
Ž: *Tie súradnice vrchola sa mi vôbec nepáčia, sú také komplikované a vôbec, celé je to také zložité...*

U: Nemusíš sa ich učiť naspamäť. Ak dobre ovládaš doplĺňanie do štvorca, zvládneš každú úlohu.

U: Teraz, keď už vieme určiť súradnice vrcholu paraboly, môžeme sa zaoberať vlastnosťami kvadratickej funkcie. Začnime najprv situáciou, keď koeficient a je kladný.

Ž: *Vtedy je grafom funkcie parabola obrátená nahor.*

U: Presne tak, na nasledujúcom obrázku je parabola znázornená aj s vrcholom:



Popíš čo najviac vlastností tejto funkcie.

Ž: *Už sme povedali, že definičným oborom je množina* $\mathbb{R}$, *oborom hodnôt je len interval*

$$\mathcal{H} = \left\langle -\frac{b^2}{4a} + c; \infty \right) .$$

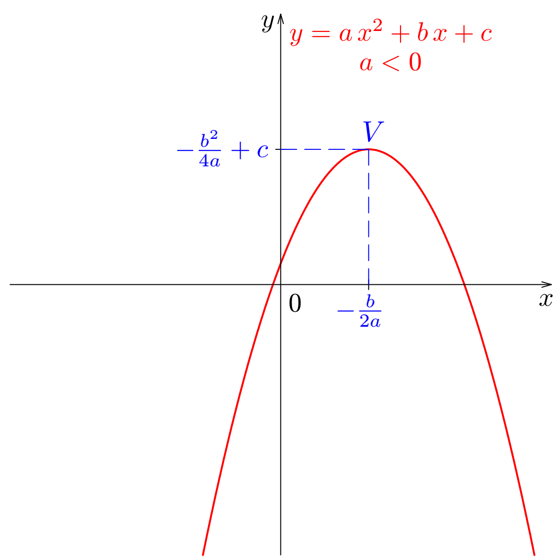
Funkcia je zdola ohraničená, je rastúca na intervale $\left\langle -\frac{b}{2a}; \infty \right)$ *a klesajúca na intervale* $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right\rangle$. *V bode* $x = -\frac{b}{2a}$ *má ostré minimum.*

U: Ide ti to vynikajúco, ešte mi skús niečo povedať o troch pé – prostosti, párnosti a periodickosti.

Ž: *Tak prostá nie je, periodická už dupľom nie. Nie je ani nepárna a nad tou párnosťou ešte rozmýšľam... Mohla by byť párna, ak by bola parabola súmerná podľa osi* y.

U: Presne tak. Vtedy by vrchol ležal na osi y, z čoho vyplýva, že jeho prvá súradnica by bola nula. A to môže byť len vtedy, ak koeficient b je rovný nule.

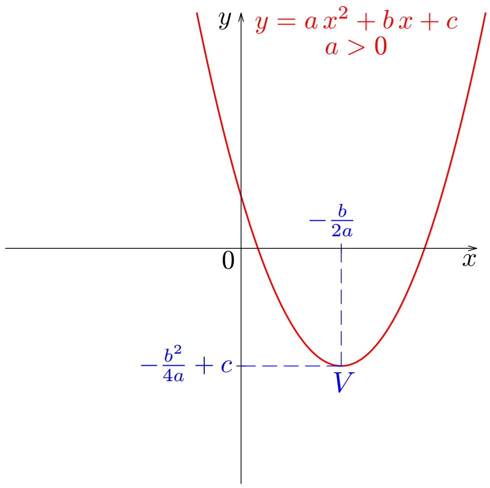
U: Pozrime sa ešte na vlastnosti kvadratickej funkcie so záporným koeficientom a. Tu je jej graf:

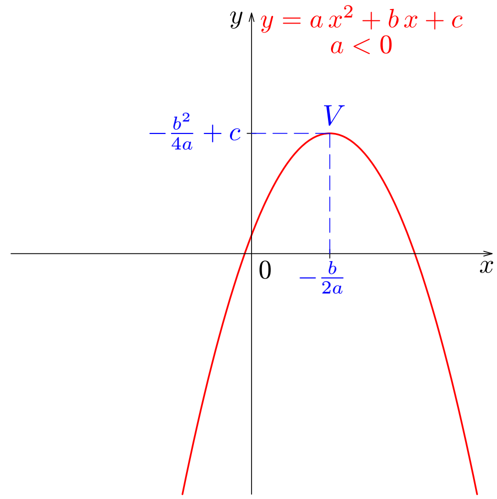


Ž: *Tak vidím, že grafom je parabola je obrátená nadol, definičný obor* $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, *obor hodnôt* $\mathcal{H} = \left(-\infty; -\frac{b^2}{4a} + c \right\rangle$. *Funkcia je zhora ohraničená, rastúca na intervale* $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right\rangle$ *a klesajúca na intervale* $\left\langle -\frac{b}{2a}; \infty \right)$. *Má maximum v bode* $x = -\frac{b}{2a}$. *Ak* $b = 0$, *tak je párna. Nikdy nie je nepárna, ani prostá, ani periodická.*

U: Vynikajúco. Na záver zhrnieme do tabuľky všetky vlastnosti kvadratickej funkcie, ktoré si vymenoval:

Vlastnosti kvadratickej funkcie $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:





1. grafom je parabola obrátená nahor;	1. grafom je parabola obrátená nadol;
2. definičný obor $\mathcal{D} = \mathbb{R}$;	2. definičný obor $\mathcal{D} = \mathbb{R}$;
3. obor hodnôt $\mathcal{H} = \left\langle -\frac{b^2}{4a} + c; \infty \right)$;	3. obor hodnôt $\mathcal{H} = \left(-\infty; -\frac{b^2}{4a} + c \right\rangle$;
4. ak $b = 0$, tak je párna;	4. ak $b = 0$, tak je párna;
5. je rastúca na intervale $\left\langle -\frac{b}{2a}; \infty \right)$, klesajúca na intervale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right\rangle$;	5. je rastúca na intervale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right\rangle$, klesajúca na intervale $\left\langle -\frac{b}{2a}; \infty \right)$;
6. má minimum v bode $x = -\frac{b}{2a}$;	6. má maximum v bode $x = -\frac{b}{2a}$;
7. je zdola ohraničená;	7. je zhora ohraničená;
8. nie je prostá.	8. nie je prostá.

Príklad 1: *Dané sú kvadratické funkcie:*
a) $f : y = x^2 - 6x + 1,$
b) $g : y = -x^2 - 3x.$
Nájdite súradnice vrcholov parabol, načrtnite grafy a na základe grafov určte vlastnosti daných kvadratických funkcií.

Ž: *Začnem prvou funkciou*

$$f : y = x^2 - 6x + 1.$$

Mám najprv určiť vrchol paraboly?

U: Áno, nájdeš ho pomocou úpravy na štvorec.

Ž: *Tak to celkom dobre ovládam. Platí:*

$$y = x^2 - 6x + 1 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 1 = (x - 3)^2 - 8.$$

Z toho už viem určiť vrchol, bude to bod so súradnicami $[3; -8]$.

U: Výborne. Pustíš sa hneď aj do grafu?

Ž: *Samozrejme. Keďže koeficient a v rovnici funkcie je jednotka, teda číslo kladné, tak grafom je parabola obrátená nahor. A má „normálnu“ šírku, teda takú, ako má aj parabola* $y = x^2$.

U: Navrhujem vypočítať aj nulové body funkcie, t.j. priesečníky jej grafu s osou x.

Ž: *To znamená, že chcete po mne, aby som vyriešil kvadratickú rovnicu*

$$x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Nič ťažké, pomôžem si diskriminantom:

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 36 - 4 = 32.$$

To teda nevyšlo veľmi pekne.

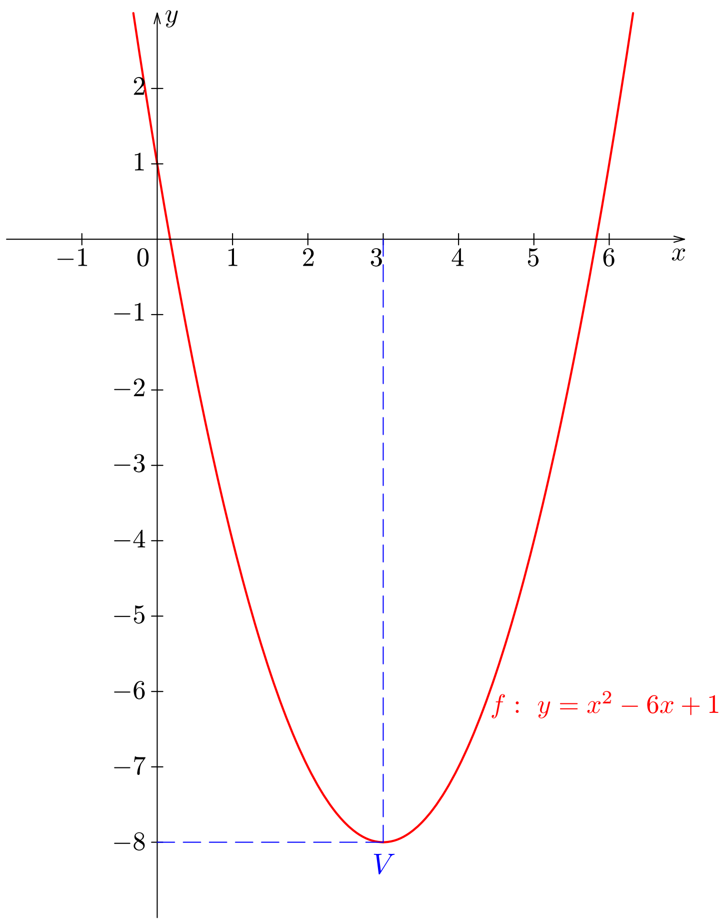
U: To neprekáža, môžeme čiastočne odmocniť, $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$.

Ž: *Korene rovnice sú potom čísla*

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

U: Keďže ich budeme nanášať na číselnú os, bude dobré ich vyčísliť. Teda $x_1 = 3 + 2\sqrt{2} \doteq 5{,}8$ a $x_2 = 3 - 2\sqrt{2} \doteq 0{,}2$.

Ž: *Myslím, že už môžem nakresliť graf, vyzerá takto:*



U: A teraz pomocou grafu urč všetky vlastnosti funkcie f, ktoré poznáš.

Ž: *Začnem obormi,*

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{H} = \langle -8; \infty) .$$

Ďalej prejdem na monotónnosť, funkcia je klesajúca na intervale $(-\infty; 3\rangle$ *a rastúca na intervale* $\langle 3; \infty)$. *V bode* $x = 3$ *má ostré globálne minimum a je zdola ohraničená.*

U: Výborne, ja ešte dodám, že nie je ani párna, ani nepárna, ani prostá, ani periodická.

Ž: *Prejdem na funkciu*

$$g : y = -x^2 - 3x.$$

Opäť začnem hľadaním vrchola. Najprv budem upravovať doplnením do úplného štvorca. Asi by som mal najprv vybrať mínusko pred zátvorku.

U: Presne tak, ak koeficient a v rovnici funkcie nie je rovný jednej, je vhodné vybrať ho pred zátvorku.

Ž: *Tak idem na to:*

$$y=-x^2-3x=-\left(x^2+3x\right)=-\left[x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right].$$

Prvé tri členy až napíšem v tvare druhej mocniny, teda

$$y=-\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}.$$

A mám to, vrchol paraboly má súradnice $\left[-\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right]$.

U: Veľmi dobre, nájdi ešte nulové body funkcie g.

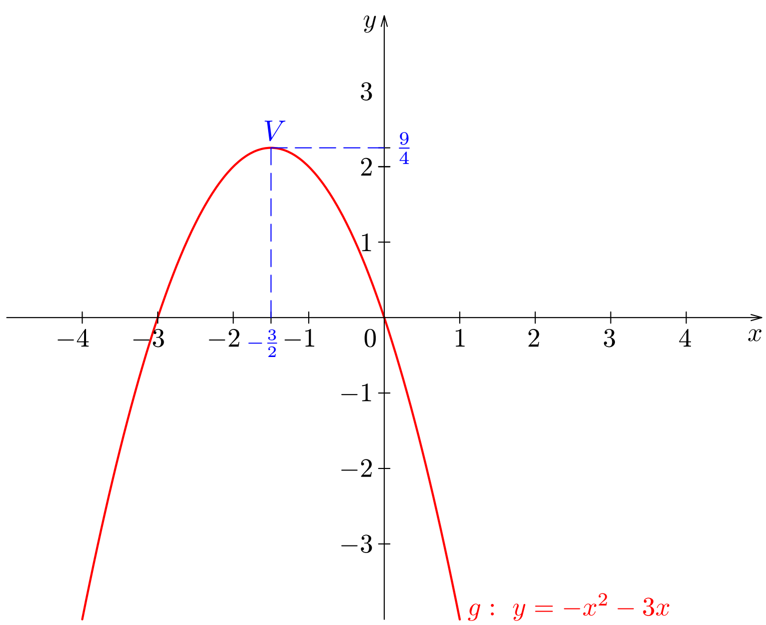
Ž: *To bude ľahké, lebo riešiť rovnicu*

$$-x^2-3x=0$$

budem vynímaním pred zátvorku:

$$-x(x+3)=0.$$

A hneď vidím, že nulové body sú $x_1=0$ *a* $x_2=-3$. *A už môžem aj zostrojiť graf. Bude ním parabola obrátená nadol a prechádzajúca nulovými bodmi aj vrcholom:*



U: Tak sa ešte pozrime na vlastnosti funkcie g.

Ž: *Rovnako ako pri funkcii f platí, že definičným oborom je množina všetkých reálnych čísel. Oborom hodnôt je ale iný interval,*

$$\mathcal{H} = \left(-\infty; \frac{9}{4}\right\rangle.$$

Funkcia je rastúca na intervale $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right\rangle$ *a klesajúca na intervale* $\left\langle -\frac{3}{2}; \infty\right)$. *Má maximum v bode* $x = -\frac{3}{2}$ *a je zhora ohraničená. Nie je ani párna, ani nepárna, ani prostá, ani periodická.*

Úloha 1: *Nájdite súradnice vrcholu paraboly:*
a) $y = 3x^2 - 6$,
b) $y = -2x^2 + 6x - 4$.

Výsledok: a) $V\,[0; -6]$, b) $V\left[\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Príklad 2: *Výpočtom nájdite súradnice priesečníkov grafu danej kvadratickej funkcie so súradnicovými osami:*
a) $y = 3x^2 - 5x + 5$,
b) $y = (x + 1)^2 - 4$.

Ž: *Najľahšie sa hľadajú priesečníky grafov funkcií s osou* y*, pretože vtedy stačí do predpisu funkcie dosadiť za* x *nulu. Začnem teda prvou funkciou*

$$y = 3x^2 - 5x + 5.$$

Za x *dosadím nulu a dostanem* $y = 5$*. To znamená, že graf prvej funkcie pretne* y*-ovú os v bode*

$$Y[0; 5].$$

U: V poriadku, prejdi na priesečníky grafu funkcie s osou x-ovou.

Ž: *Pre tie zase platí, že ich* y*-ová súradnica je nula, preto dosadím za* y *nulu. Dostal som rovnicu*

$$0 = 3x^2 - 5x + 5.$$

U: Je to obyčajná kvadratická rovnica, teda . . .

Ž: *. . . ju vyriešim pomocou diskriminantu:*

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 25 - 60 = -35.$$

Ejha, diskriminant vyšiel záporný. Tak táto rovnica nemá korene.

U: A to znamená, že graf našej funkcie nepretína os x-ovú.

Ž: *Pustím sa do druhej funkcie*

$$y = (x + 1)^2 - 4.$$

Najprv za x *dosadím nulu, vyjde mi* $y = (0 + 1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$*. Priesečník grafu funkcie s osou* y *je teda bod*

$$Y[0; -3].$$

Priesečníky s osou x *nájdem riešením rovnice*

$$0 = (x + 1)^2 - 4.$$

Zase použijem diskriminant.

U: To samozrejme môžeš, išlo by to však rozložiť na súčin aj šikovnejšie. Nepripomína ti niečo tvar rovnice

$$(x + 1)^2 - 4 = 0?$$

Ž: *No jasné, vzorec*

$$A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B).$$

Takže ho použijem a dostanem

$$(x + 1)^2 - 4 = (x + 1)^2 - 2^2 = (x + 1 + 2)(x + 1 - 2) = (x + 3)(x - 1).$$

A to bude rovné nule práve vtedy, ak $x = -3$ *alebo ak* $x = 1$*. Mám to, priesečníky grafu funkcie s osou* x *sú body*

$$X_1\left[-3; 0\right], \ X_2\left[1; 0\right].$$

U: Výborne.

Úloha 2: *Výpočtom nájdite súradnice priesečníkov grafu kvadratickej funkcie so súradnicovými osami:*
a) $y = x^2 + 3x + 12$,
b) $y = (x + 5)^2 - 1$.

Výsledok: a) $Y\,[0; 12]$, priesečníky s osou x nemá; b) $Y\left[0; 24\right], X_1\left[-6; 0\right], X_2\left[-4; 0\right]$

Príklad 3: *Určte rovnicu kvadratickej funkcie, ktorej graf prechádza bodmi $K\,[1;-12]$, $L\,[2;-9]$, $M\,[5;36]$.*

U: Máš určiť rovnicu kvadratickej funkcie, tak si najprv pripomeňme, aký je jej tvar.

Ž: *Vo všeobecnosti má kvadratická funkcia rovnicu*

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kde koeficienty a, b, c sú reálne čísla, $a \neq 0$.

U: Dobre, tvojou úlohou je určiť práve tieto koeficienty.

Ž: *Tak si vezmem na pomoc tie tri body, ktoré sú dané v zadaní. Ak graf funkcie prechádza bodom $K\,[1;-12]$, tak to znamená, že ak do rovnice funkcie dosadím za x jednotku, vyjde mi y rovné -12. To môžem zapísať aj takto:*

$$-12 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c.$$

Tú istú úvahu zopakujem pre bod $L\,[2;-9]$, dostanem zápis

$$-9 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c,$$

a ešte aj pre bod $M\,[5;36]$, odkiaľ

$$36 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c.$$

U: Ak to trochu upravíme, dostaneme takúto sústavu troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi:

$$-12 = a + b + c$$

$$-9 = 4a + 2b + c$$

$$36 = 25a + 5b + c.$$

Akú metódu si vyberieš na jej vyriešenie?

Ž: *Najradšej mám dosadzovaciu metódu. Tu si napríklad z prvej rovnice vyjadrím céčko:*

$$c = -12 - a - b$$

a dosadím to do druhej aj tretej rovnice. Vznikne

$$-9 = 4a + 2b - 12 - a - b$$

$$36 = 25a + 5b - 12 - a - b.$$

A to ešte zjednoduším na sústavu

$$3 = 3a + b$$

$$48 = 24a + 4b.$$

U: Navrhujem ti druhú rovnicu ešte zjednodušiť vydelením oboch strán rovnice číslom 4.

Ž: *Aha, máte pravdu, to som si nevšimol. Takže mám*

$$3 = 3a + b$$

$$12 = 6a + b.$$

To je jednoduchá sústava dvoch rovničiek s dvoma neznámymi, budem pokračovať stále dosadzovacou metódou. Teraz si z prvej rovnice vyjadrím béčko:

$$b = 3 - 3a$$

a dosadím to do druhej rovnice. Vznikne

$$12 = 6a + 3 - 3a,$$

odkiaľ

$$9 = 3a,$$

čiže

$$a = 3.$$

U: Veľmi dobre.

Ž: *Teraz ešte vyjadrím béčko:*

$$b = 3 - 3a = 3 - 9 = -6.$$

A napokon aj céčko:

$$c = -12 - a - b = -12 - 3 + 6 = -9.$$

A mám to, rovnica kvadratickej funkcie, ktorej graf prechádza bodmi K, L, M je

$$y = 3x^2 - 6x - 9.$$

Úloha 3: *Nájdite rovnicu kvadratickej funkcie f, pre ktorú platí: $f(-1) = -26$, $f(1) = 0$ a $f(2) = -2$.*

Výsledok: $y = -5x^2 + 13x - 8$

Príklad 4: *Zostrojte grafy funkcií:*
a) $f_1 : y = x^2 - 2$, $f_2 : y = x^2 + 2$, $f_3 : y = (x - 2)^2$, $f_4 : y = (x + 2)^2$,
b) $g : y = x^2 - 4x + 1$.

U: Pri riešení tejto úlohy môžeme výhodne využiť transformácie grafov funkcií. Vychádzať budeme z grafu funkcie

$$f : y = x^2.$$

Ž: *Tak ten poznám, je to obyčajná parabola s vrcholom v bode* $[0; 0]$, *obrátená nahor.*

U: Dobre, tak sa teraz zamysli nad tým, ako bude vyzerať graf funkcie

$$f_1 : y = x^2 - 2.$$

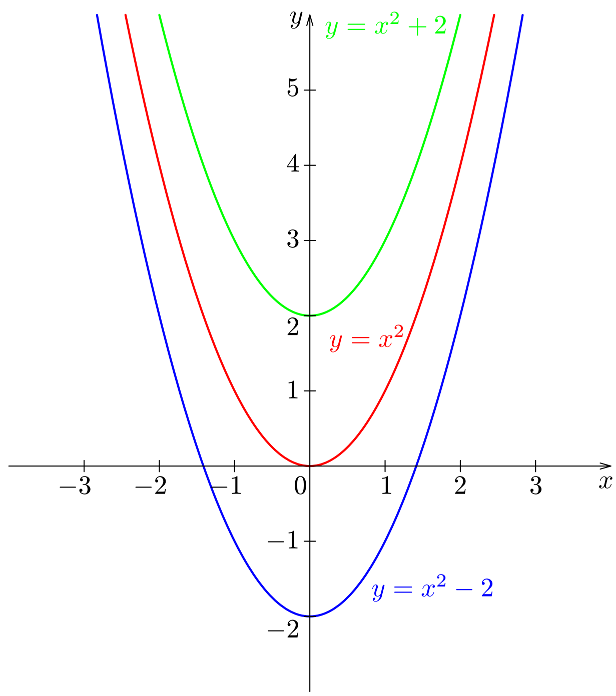
Ž: *V každom bode definičného oboru bude mať funkcia* f_1 *hodnotu o dva menšiu ako mala funkcia* f. *Preto bude celý graf posunutý o dva dieliky nadol v smere osi* y*-ovej.*

U: Výborne, vidím, že nebude pre teba problém ani funkcia

$$f_2 : y = x^2 + 2.$$

Ž: *Veru nie, je to to isté, len teraz sú všetky hodnoty funkcie o dva väčšie ako pri funkcii* f, *preto bude celý graf posunutý o dva dieliky nahor v smere osi* y*-ovej. Tu je k tomu obrázok, sú na ňom grafy všetkých troch funkcií,*

$$f : y = x^2, \quad f_1 : y = x^2 - 2, \quad f_2 : y = x^2 + 2.$$



U: Prejdime teraz na funkciu

$$f_3 : y = (x - 2)^2.$$

Ž: *Tu, ak dosadím za x akékoľvek číslo, dostanem takú hodnotu, akú má funkcia f v bode o dva menšom. Preto vrchol nebude v bode $[0;0]$, ale v bode $[2;0]$. Z toho vyplýva, že graf posuniem doprava o dva dieliky pozdĺž osi x-ovej.*

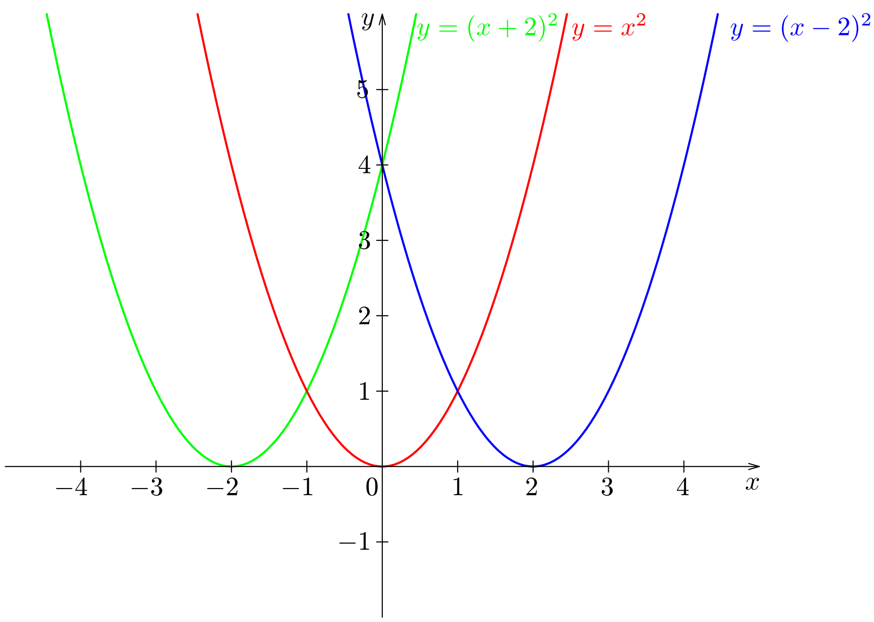
U: Veľmi dobre, podobne si uvedomíme, že vrchol ďalšej paraboly

$$f_4 : y = (x+2)^2$$

bude v bode $[-2;0]$.

Ž: *Preto bude táto parabola posunutá o dva dieliky doľava v smere osi x-ovej. Na nasledujúcom obrázku sú všetky tri grafy, teda pre funkcie*

$$f : y = x^2, \quad f_1 : y = (x-2)^2, \quad f_2 : y = (x+2)^2.$$



U: Ostala nám posledná funkcia

$$g : y = x^2 - 4x + 1.$$

Skúsme jej graf zostrojiť podobne, využitím transformácií grafov.

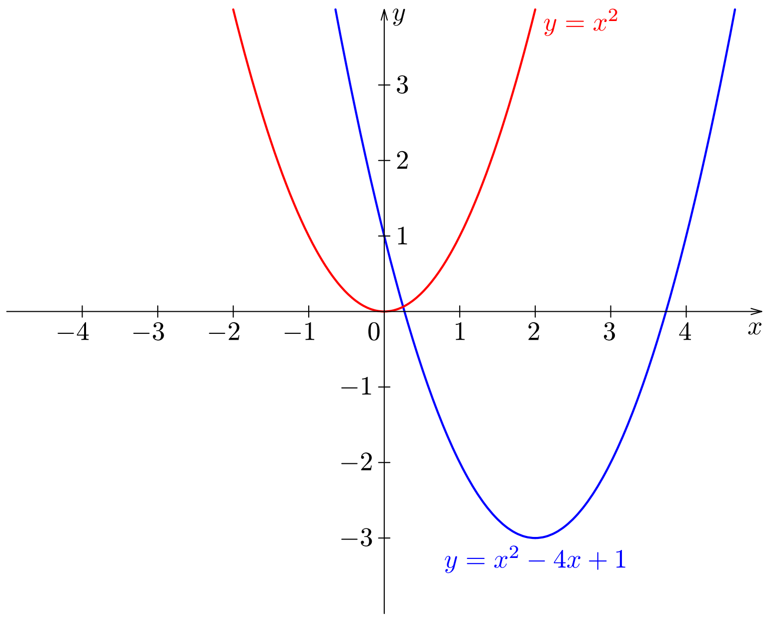
Ž: *Tak to musím najprv zistiť, o koľko a ktorým smerom treba tento graf posunúť. Preto si najprv predpis musím nejako šikovne upraviť. Vari doplňaním do úplného štvorca?*

U: Presne tak, úprava na štvorec je pri kvadratických funkciách veľmi často používaná.

Ž: *Tak idem na to:*

$$y = x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 4 - 4 + 1 = (x-2)^2 - 3.$$

Už je to jasné, mínus dva v zátvorke hovorí o posunutí grafu funkcie $f : y = x^2$ o dva dieliky doprava v smere osi x-ovej. A mínus tri na konci zase znamená posunutie grafu o tri dieliky nadol v smere osi y-ovej. Ak urobím obe posunutia, dostanem takýto výsledok:



U: Výborne. Môžeš si overiť, že vrcholom paraboly je bod $[2; -3]$, čo sa dá zistiť z predpisu funkcie, upraveného na tvoj tvar

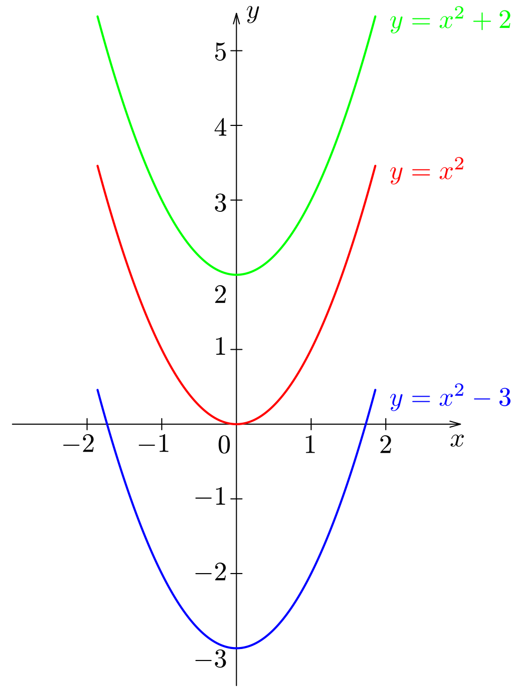
$$g : y = (x - 2)^2 - 3.$$

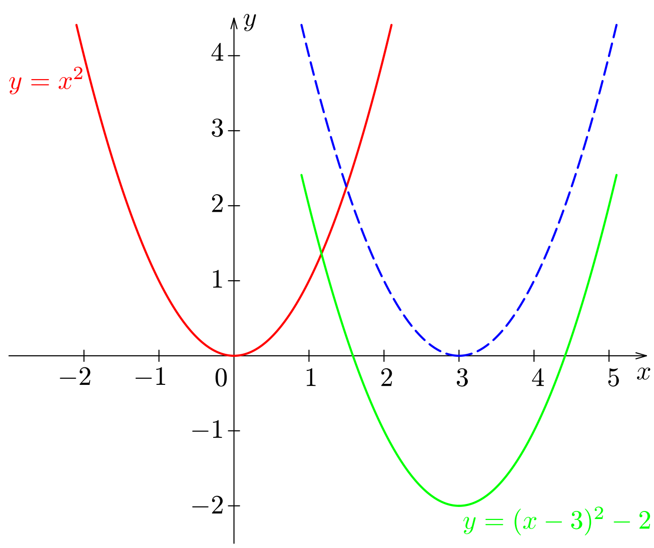
Úloha 4: *Zostrojte grafy funkcií:*

a) $y = x^2, \quad y = x^2 - 3, \quad y = x^2 + 2,$

b) $y = (x-3)^2 - 2.$

Výsledok:





Príklad 5: *Dokážte vety:*

1. *Graf kvadratickej funkcie $f : y = ax^2 + bx + c$ zostrojený v karteziánskej súradnicovej sústave je súmerný podľa osi y práve vtedy, keď je $b = 0$.*
2. *Graf kvadratickej funkcie $f : y = ax^2 + bx + c$ obsahuje začiatok karteziánskej súradnicovej sústavy práve vtedy, keď je $c = 0$.*

Ž: *V prvej časti sa hovorí o grafe kvadratickej funkcie, ktorý je súmerný podľa osi y. To však znamená, že funkcia je párna!*

U: Presne tak, len mi teraz ešte vysvetli, čo rozumieš pod párnou funkciou.

Ž: *Veď som to už povedal, graf takej funkcie je súmerný podľa osi y.*

U: To je len dôsledok, definícia znie trochu inak, tak ti ju pripomeniem:
Funkciu f s definičným oborom $\mathcal{D}$ nazývame párnou práve vtedy, ak platí

1. $\forall x \in \mathcal{D}$ aj $-x \in \mathcal{D}$
2. $\forall x \in \mathcal{D}$ platí $f(-x) = f(x)$.

Ž: *Myslím, že prvá podmienka je v našom prípade splnená, pretože definičným oborom kvadratickej funkcie je celá množina reálnych čísel.*

U: Máš pravdu, a práve druhá podmienka, ktorá vystihuje podstatu párnej funkcie, nám pomôže pri riešení úlohy. Ak teda chceme, aby naša funkcia bola párna, musí platiť, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(-x) = f(x).$$

To v našom prípade znamená, že

$$a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 + bx + c.$$

Pokračuj.

Ž: *Upravím to na tvar*

$$ax^2 - bx + c = ax^2 + bx + c,$$

odkiaľ

$$2bx = 0.$$

No a toto bude pre všetky x platiť len vtedy, ak $b = 0$.

U: Podarilo sa nám teda ukázať, že ak je kvadratická funkcia párna, tak musí byť $b = 0$. Platí to však aj naopak, ak vyjdeme z predpokladu, že $b = 0$, tak rovnakými úpravami, len v opačnom poradí, dôjdeme k záveru, že potom je funkcia párna.

Ž: *Ostala mi ešte druhá časť, ukázať, že graf kvadratickej funkcie obsahuje začiatok súradnicovej sústavy práve vtedy, keď je $c = 0$. To bude ľahké, lebo ak graf prechádza bodom $[0; 0]$, tak po dosadení do rovnice funkcie dostanem*

$$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c.$$

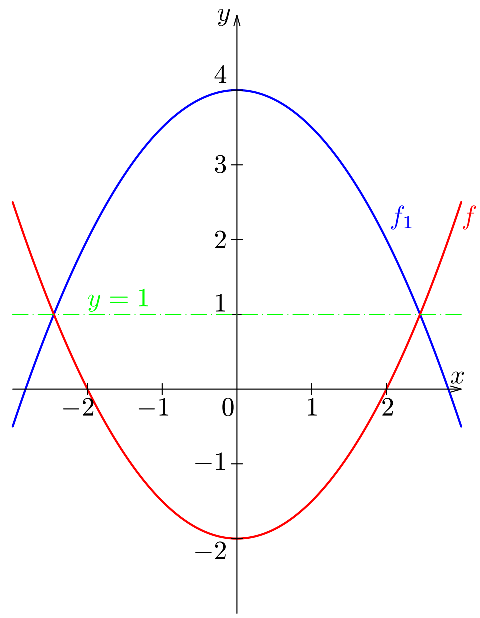
Z toho však hneď vidno, že $c = 0$. A platí to aj obrátene, ak $c = 0$, tak graf kvadratickej funkcie prechádza bodom $[0; 0]$.

Príklad 6: *Daná je kvadratická funkcia $f: y = 0{,}5x^2 - 2$. Zostrojte graf a nájdite rovnicu funkcie*
a) f_1, ktorej graf je s grafom funkcie f osovo súmerný podľa priamky $y = 1$;
b) f_2, ktorej graf je s grafom funkcie f osovo súmerný podľa priamky $x = -2$;
c) f_3, ktorej graf je s grafom funkcie f stredovo súmerný podľa bodu $S[1; 1]$.

Ž: *Najprv si zostrojím graf funkcie*

$$f: y = 0{,}5x^2 - 2.$$

Je to červená parabola otočená nahor, s vrcholom v bode $[0; -2]$. Prikreslím priamku $y = 1$ a podľa nej osovo súmerne zobrazím parabolu.



U: Nakreslil si to dobre, teraz potrebujeme nájsť rovnicu tejto funkcie.

Ž: *Vidím, že sa parabola obrátila nadol, teda koeficient a pri x^2 bude záporný.*

U: Zmenila sa „šírka“ paraboly?

Ž: *Nezmenila, teda koeficient a bude $-0{,}5$. Ďalej vidím, že sa vrchol paraboly presunul do bodu $[0; 4]$. Preto funkcia f_1 má rovnicu*

$$y = -0{,}5(x - 0)^2 + 4,$$

čo ešte upravím na tvar

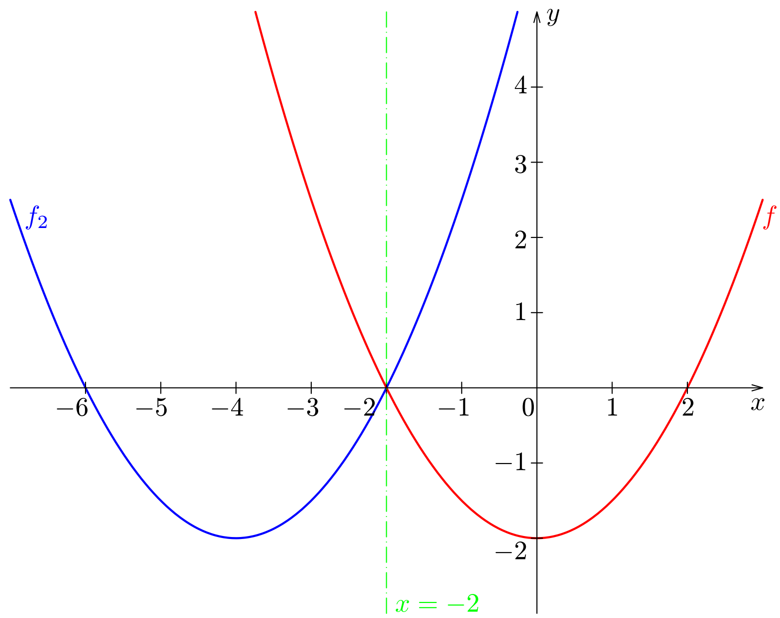
$$f_1: y = -0{,}5x^2 + 4.$$

U: Dobre, skúsme ďalšiu časť.

Ž: *Opäť najprv zostrojím červenú parabolu - graf pôvodnej funkcie*

$$f : y = 0{,}5x^2 - 2.$$

Prikreslím priamku $x = -2$ a parabolu podľa nej osovo súmerne zobrazím.



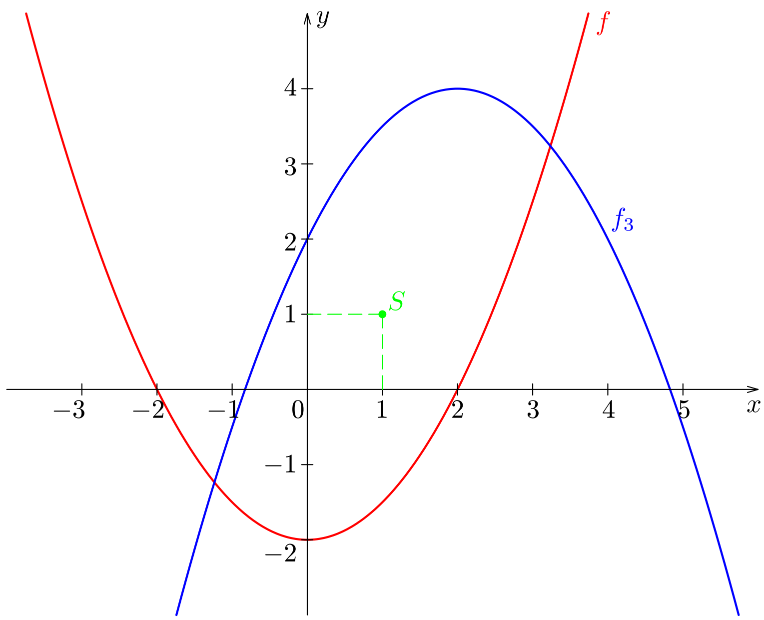
Na obrázku vidím, že teraz sa parabola posunula. Preto koeficient a zostane rovnaký, $a = 0{,}5$. Vrchol paraboly sa posunul z bodu $[0; -2]$ do bodu $[-4; -2]$. Čiže došlo k posunutiu grafu o 4 dieliky doľava v smere osi x, preto rovnica funkcie f_2 je

$$y = 0{,}5(x + 4)^2 - 2.$$

U: Úpravou posledného vzťahu dostávame rovnicu funkcie v tvare

$$f_2 : y = 0{,}5x^2 + 4x + 6.$$

Ž: *Do tretice mám graf funkcie f zobraziť stredovo súmerne podľa bodu $S\,[1; 1]$. Tu sa mi to kreslilo trochu ťažšie, vyzerá to takto:*



U: Obrázok máš dobre, poďme na rovnicu.

Ž: *Parabola sa opäť obrátila nadol, preto koeficient a bude záporný. Vrchol sa z bodu $[0; -2]$ dostal do bodu $[2; 4]$. Takže sa vlastne posunul o dva dieliky doprava v smere osi x a o šesť dielikov nahor v smere osi y. Zapísať to môžem takto:*

$$f_3 : y = -0{,}5(x-2)^2 - 2 + 6.$$

Po úprave je konečný tvar rovnice

$$f_3 : y = -0{,}5x^2 + 2x + 2.$$

Úloha 6: *Daná je kvadratická funkcia $f : y = 1 - x^2$. Nájdite rovnicu funkcie*

a) f_1, ktorej graf je s grafom funkcie f osovo súmerný podľa priamky $y = 2$;
b) f_2, ktorej graf je s grafom funkcie f osovo súmerný podľa priamky $x = 2$;
c) f_3, ktorej graf je s grafom funkcie f stredovo súmerný podľa bodu $S\,[-2; 1]$.

Výsledok: $f_1 : y = x^2 + 3,\ f_2 : y = -x^2 + 8x - 15,\ f_3 : y = x^2 + 8x + 17$