Grafy lineárnych funkcií s absolútnymi hodnotami

RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: Predpokladám, že zostrojiť graf lineárnej funkcie ti nerobí žiadny problém.

Ž: *Pravdaže nie – grafom lineárnej funkcie je vždy priamka a na jej zostrojenie mi stačí poznať dva body. Tie potom spojím a je to.*

U: Dobre, tak poďme sa teraz pozrieť na to, ako by sme zostrojovali grafy lineárnych funkcií, ktoré sú kombinované s absolútnymi hodnotami. Napríklad takýchto:

$$f : y = x + |2x + 4|$$

$$g : y = ||x - 3| - 2| \,.$$

Ž: *Vyzerá to dosť odstrašujúco! Tieto grafy asi nebudú priamky.*

U: Veru nie, budú to lomené čiary a my sa naučíme, ako ich zostrojovať pekne krok za krokom. Začnime malým opakovaním – čo je to vlastne absolútna hodnota reálneho čísla?

Ž: *Označujeme ju $|x|$ a platí, že ak je číslo x nezáporné, tak $|x| = x$ a ak je číslo x záporné, tak $|x| = -x$, teda číslo opačné.*

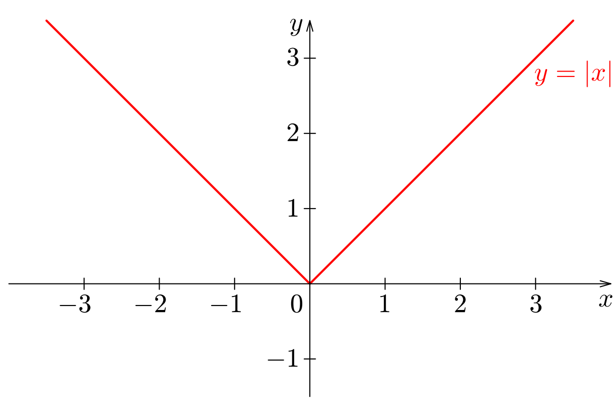
$$\boxed{\begin{array}{lcl} x \geqq 0 & \Rightarrow & |x| = x \\ x < 0 & \Rightarrow & |x| = -x \end{array}}$$

U: V poriadku. Ako by vyzeral graf funkcie

$$h : y = |x|,$$

čiže funkcie, ktorá každému reálnemu číslu priradí jeho absolútnu hodnotu?

Ž: *Tak, ako som pred chvíľou hovoril – pre nezáporné čísla bude grafom vlastne graf funkcie $y = x$, ale pre záporné to bude graf funkcie $y = -x$. Preto výsledkom bude takéto véčko:*



U: Toto si zvládol výborne, pusťme sa do zostrojovania grafov lineárnych funkcií s absolútnymi hodnotami. Univerzálna metóda, ktorú pritom môžeme použiť, je veľmi podobná postupu pri riešení rovníc s absolútnymi hodnotami – najprv si určíme nulové body výrazov v absolútnych hodnotách. Tieto body rozdelia definičný obor funkcie na niekoľko menších intervalov. V každom z nich odstránime absolútne hodnoty, čím dostaneme predpis lineárnej funkcie.

Ž: *A túto nakreslíme?*

U: Áno, v každom intervale zostrojíme graf príslušnej lineárnej funkcie. Napokon všetko pospájame, čím nám vznikne lomená čiara predstavujúca výsledný graf.

Ž: *Poďme na to.*

U: Dobre, začnime funkciou

$$f : y = x + |2x + 4| .$$

Vystupuje v nej iba jedna absolútna hodnota a v nej je výraz $2x + 4$. Nulový bod tohto výrazu je ...

Ž: *... $x = -2$, to je ľahké.*

U: Dobre, teda naša funkcia sa bude inak správať na intervale $(-\infty; -2\rangle$ a inak na intervale $\langle -2; \infty)$. Skús povedať, ako.

Ž: *Ak si vyberiem x z intervalu $(-\infty; -2\rangle$, tak výraz $2x+4$ je záporný alebo rovný nule. Preto $|2x + 4| = -2x - 4$. Ale ak si vyberiem x z intervalu $\langle -2; \infty)$, tak výraz $2x + 4$ je kladný alebo rovný nule, preto $|2x + 4| = 2x + 4$.*

U: V prvom prípade teda predpis funkcie bude vyzerať takto:

$$f_1 : y = x + (-2x - 4) = x - 2x - 4 = -x - 4; \quad x \in (-\infty; -2\rangle .$$

V druhom prípade je predpis takýto:

$$f_2 : y = x + (2x + 4) = 3x + 4; \quad x \in \langle -2; \infty) .$$

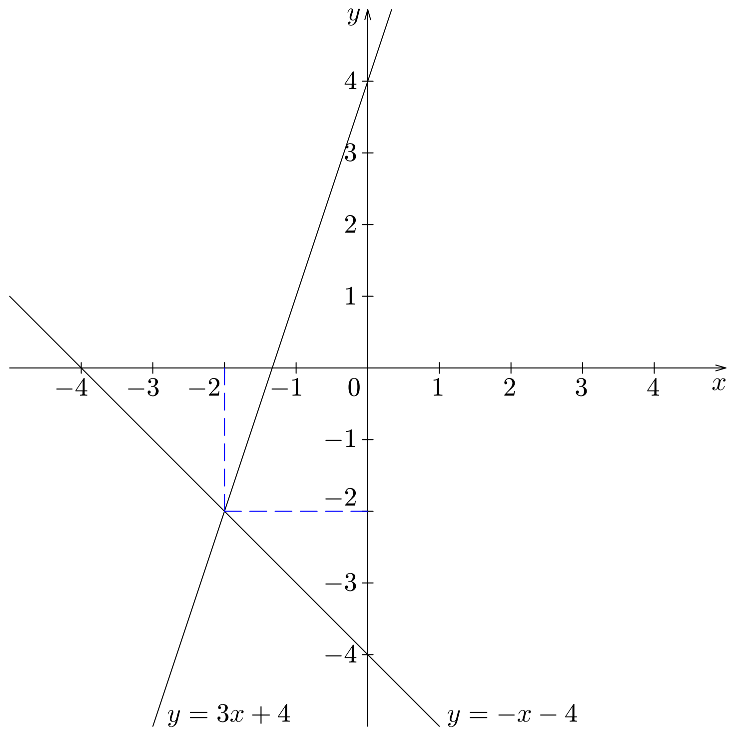
Ž: *Ja k tomu pripravím tabuľky s dvoma bodmi na zostrojenie grafov funkcií:*

x	-4	-2
$f_1(x)$	0	-2

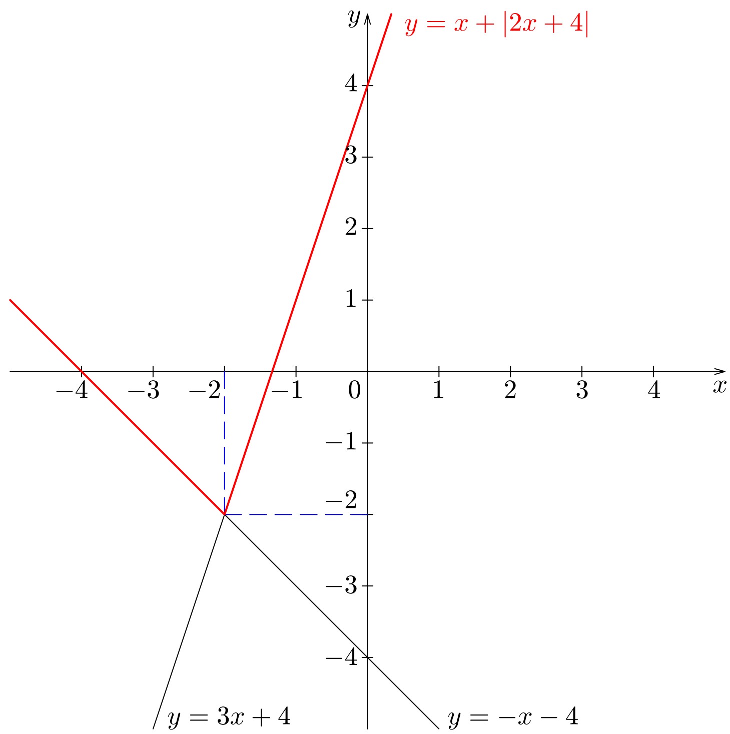
x	-2	0
$f_2(x)$	-2	4

U: Môžeš sa pustiť aj do grafov.

Ž: *Sú to dve priamky na nasledujúcom obrázku:*



U: Ostáva ešte posledný krok – farebne zvýrazniť výsledok. Teda na intervale $(-\infty; -2\rangle$ zvýrazníme graf funkcie $f_1 : y = -x - 4$ a na intervale $\langle -2; \infty)$ zase graf funkcie $f_2 : y = 3x + 4$. Vznikne nám lomená čiara, ktorá predstavuje graf našej funkcie $f : y = x + |2x + 4|$.



Ž: *Takto zvládnem každú úlohu?*

U: V podstate áno, musíš však počítať s tým, že pri zložitejších predpisoch funkcií sa môže definičný obor rozpadnúť na veľa menších intervalov. Potom je úplná diskusia náročnejšia.

Ž: *Och, a nebolo by niečo jednoduchšie?*

U: Neviem, či to budeš považovať za jednoduchšie, ale pri zostrojovaní grafov niektorých funkcií, napríklad

$$g : y = ||x-3|-2|$$

môžeme využiť transformácie grafov funkcií.

Ž: *Aha, pri transformáciách grafy funkcií všelijako posúvame a naťahujeme. Presne si to už ale nepamätám.*

U: To nie je problém, zopakujem ti niektoré základné transformácie.
V prvom rade potrebujeme vedieť, ako sa zmení graf funkcie, ak jej predpis dáme do absolútnej hodnoty:
Graf funkcie $y = |f(x)|$ splýva s tou časťou grafu funkcie $y = f(x)$, kde $f(x) \geqq 0$. Tam, kde $f(x) < 0$, je graf funkcie $y = |f(x)|$ osovo súmerný s grafom funkcie $y = f(x)$ podľa osi x-ovej.
Po druhé si pripomeňme, kedy posúvame graf funkcie v smere osi y-ovej:
Graf funkcie $y = f(x) + b$, $b \neq 0$, zostrojíme posunutím grafu funkcie $y = f(x)$ v smere osi y nahor (ak $b > 0$) alebo nadol (ak $b < 0$). Veľkosť posunutia je $|b|$.

Ž: *Tak to poďme skúsiť na tej našej funkcii*

$$g : y = ||x-3|-2|\,.$$

Odkiaľ začať?

U: Úplne od vnútra, teda od funkcie

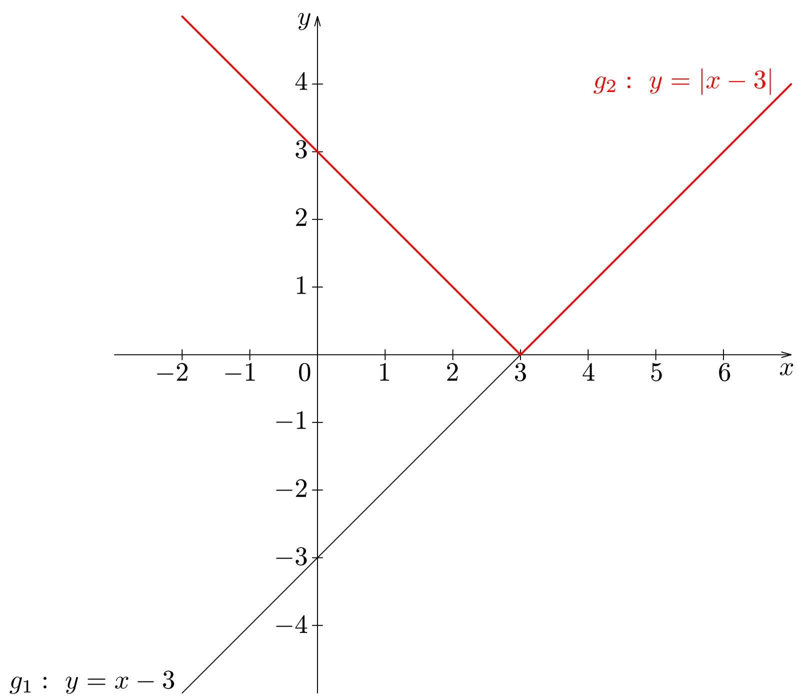
$$g_1 : y = x - 3.$$

Ž: *To je jednoduchá lineárna funkcia, jej grafom je priamka prechádzajúca napríklad bodmi* $[0; -3]$ *a* $[3; 0]$.

U: Dobre, a teraz mi povedz, čo sa stane s touto priamkou, ak predpis funkcie dáme do absolútnej hodnoty, čiže ako vyzerá graf funkcie

$$g_2 : y = |x-3|\,.$$

Ž: *Ak si to dobre pamätám, tak tá časť priamky, ktorá bola pod osou x-ovou, sa preklopí nahor osovo súmerne podľa osi x. Vznikne takéto „véčko“:*

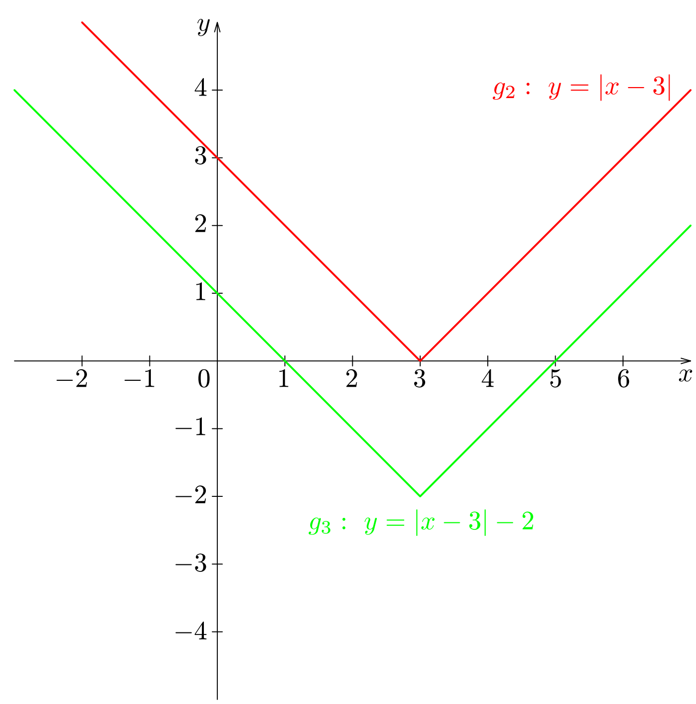


U: V poriadku, v ďalšom kroku zostrojíme graf funkcie

$$g_3 : y = |x-3| - 2$$

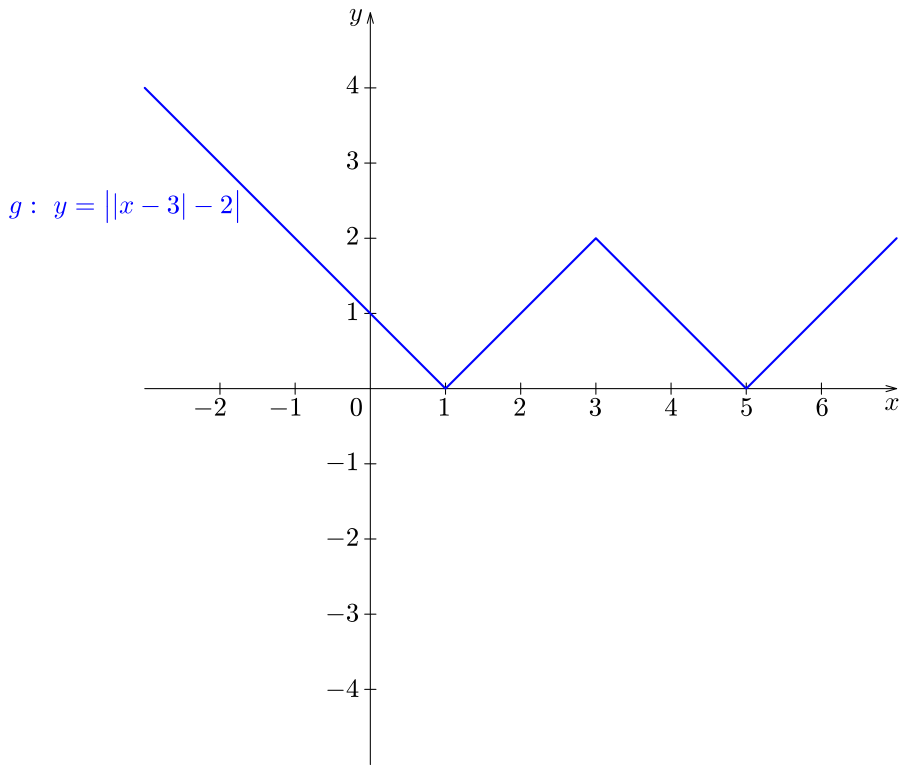
a to pomocou predchádzajúceho grafu funkcie g_2. Ako?

Ž: *Zmenilo sa iba to, že na konci predpisu pribudlo -2, preto celé „véčko" sa posunie o dva dieliky nadol pozdĺž osi y-ovej. Vyzerá to takto:*



U: Tak už ostal len posledný krok.

Ž: *Ja viem, dať to celé do absolútnej hodnoty. Ale to už tu taz bolo – tá časť grafu, ktorá leží pod osou x sa zobrazí podľa nej osovo súmerne a vznikne výsledný graf pripomínajúci písmeno w:*



U: Áno, takto vyzerá graf našej funkcie

$$g : y = ||x-3|-2| \, .$$

K jeho zostrojeniu nám stačilo použiť dve transformácie grafov funkcií.

Príklad 1: *Zostrojte graf funkcie $f: y = |2-3x|$.*

Ž: *Predpis je jednoduchý, to bude raz dva hotové. Najprv si určím, kedy výraz v absolútnej hodnote je nulový. Píšem*

$$2-3x=0,$$

odkiaľ

$$x=\frac{2}{3}.$$

No a teraz si to rozdelím na dva prípady:
ak $x \geqq \frac{2}{3}$, tak platí, že $|2-3x| = 2-3x$.

U: To teda neplatí!

Ž: *Ako to? Veď ak je x nezáporné, tak $|x| = x$!*

U: To áno, lenže namiesto x tam teraz dosaď celý výraz $2-3x$.

Ž: *Takže ak výraz $2-3x$ je nezáporný, tak platí $|2-3x| = 2-3x$?*

U: Teraz je to dobre. Avšak z podmienky

$$2-3x \geqq 0$$

vyplýva

$$x \leqq \frac{2}{3}$$

a tu bola tá chyba. Skús teraz pokračovať.

Ž: *Čiže ako som už povedal, riešenie si rozdelím na dva prípady. V prvom prípade je výraz $2-3x$ nezáporný, čo – ako sme zistili – znamená podmienku $x \leqq \frac{2}{3}$. Potom môžem absolútnu hodnotu jednoducho vynechať a dostanem predpis*

$$f_1: y = 2-3x; \quad x \leqq \frac{2}{3}.$$

V druhom prípade je výraz $2-3x$ záporný. Potom pre x platí, že $x > \frac{2}{3}$. Vtedy sa pri odstraňovaní absolútnej hodnoty zmenia všetky znamienka na opačné a dostanem druhý predpis

$$f_2: y = -2+3x; \quad x > \frac{2}{3}.$$

U: Poďme na graf.

Ž: *Obidva prípady mi dali lineárnu funkciu, jej grafom je priamka, stačí nájsť dva body potrebné na jej zostrojenie. Napríklad takéto:*

x	-1	0
$f_1(x)$	5	2

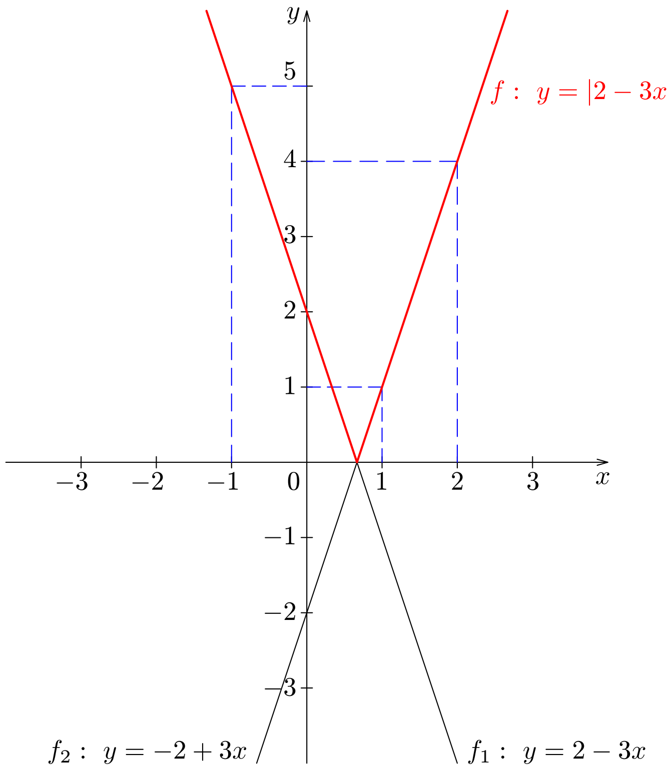
x	1	2
$f_2(x)$	1	4

U: Ak v súradnicovej sústave zostrojíš a spojíš body $[-1; 5]$ a $[0; 2]$, dostaneš jednu priamku. A ak zostrojíš a spojíš body $[1; 1]$ a $[2; 4]$, dostaneš druhú priamku.

Ž: *Áno, ale ešte mi ostal posledný krok – farebne červenou vyznačím, že*

$$\text{pre } x \leqq \frac{2}{3} \text{ platí predpis } f_1 : y = 2 - 3x$$
$$\text{pre } x > \frac{2}{3} \text{ platí predpis } f_2 : y = -2 + 3x.$$

Výsledkom je takýto graf:



U: Na záver len dodám, že rýchlejšie riešenie by sme dostali takto:
Najprv by sme zostrojili graf funkcie

$$y = 2 - 3x.$$

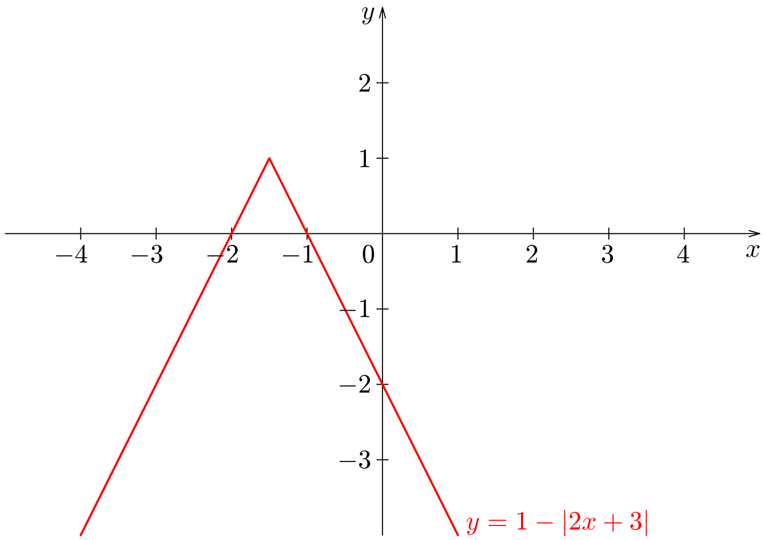
A keďže celý výraz $2 - 3x$ je v absolútnej hodnote, potom by sme použili transformáciu funkcie.

Ž: *No jasné, stačilo by tú časť priamky, ktorá leží pod osou x zobraziť súmerne nad ňu a bolo by to. Škoda, že som na to neprišiel.*

U: To nič, transformácie grafu nie sú vhodnou metódou na každú funkciu. A okrem toho chyba, ktorú si na začiatku urobil, je dosť typická a takto si to snáď zapamätáš.

Úloha 1: *Zostrojte graf funkcie $f : y = 1 - |2x + 3|$.*

Výsledok:



Príklad 2: *Zostrojte graf funkcie* $f: y = |x+1| - |x-1|$.

Ž: *V tomto predpise funkcie vystupujú dve absolútne hodnoty. Asi začnem tým, že si určím nulové body výrazov v nich. Sú to čísla* -1 *a* 1. *Čo ďalej?*

U: Tieto nulové body ti rozdelili množinu všetkých reálnych čísel na tri časti, a to ...

Ž: *... na intervaly* $(-\infty; -1\rangle$, $\langle -1; 1\rangle$, $\langle 1; \infty)$.

U: Presne tak. A tým sa aj naše riešenie rozdelí na tri časti. V každom z týchto intervalov odstránime absolútnu hodnotu. Aby sme to však nedoplietli so znamienkami, premysli si, či výrazy $x+1$ a $x-1$ nadobúdajú vo vnútri intervalov kladné alebo záporné hodnoty.

	$(-\infty; -1\rangle$	$\langle -1; 1\rangle$	$\langle 1; \infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$

Ž: *To nie je ťažké, vyberiem si v každom intervale jeden bod a dosadím ho do výrazov. Ja som si zobral body* -3; 0 *a* 5 *a hneď som zistil, že* $x+1$ *je postupne záporné, kladné a ešte raz kladné, zatiaľ čo* $x-1$ *je záporné, záporné a nakoniec kladné.*

U: Pokračujme teda v riešení úlohy, začnime intervalom $(-\infty; -1\rangle$. Na tomto intervale nadobúdajú oba výrazy záporné hodnoty, a preto pri odstraňovaní absolútnej hodnoty musíme všetky znamienka vo výrazoch zmeniť na opačné. Čiže platí

$$|x+1| = -x-1$$

$$|x-1| = -x+1.$$

Ak to spojíme, dostaneme predpis

$$f_1 : y = |x+1| - |x-1| = -x-1-(-x+1) = -x-1+x-1 = -2.$$

Pokračuj.

Ž: *Idem na druhý interval* $\langle -1; 1\rangle$. *Tak tu pri odstraňovaní absolútnej hodnoty prvý výraz nemení znamienko, ale druhý áno, teda*

$$f_2 : y = |x+1| - |x-1| = x+1-(-x+1) = x+1+x-1 = 2x.$$

Najľahšia je situácia v poslednom intervale $\langle 1; \infty)$, *nakoľko tu žiadne znamienko meniť netreba:*

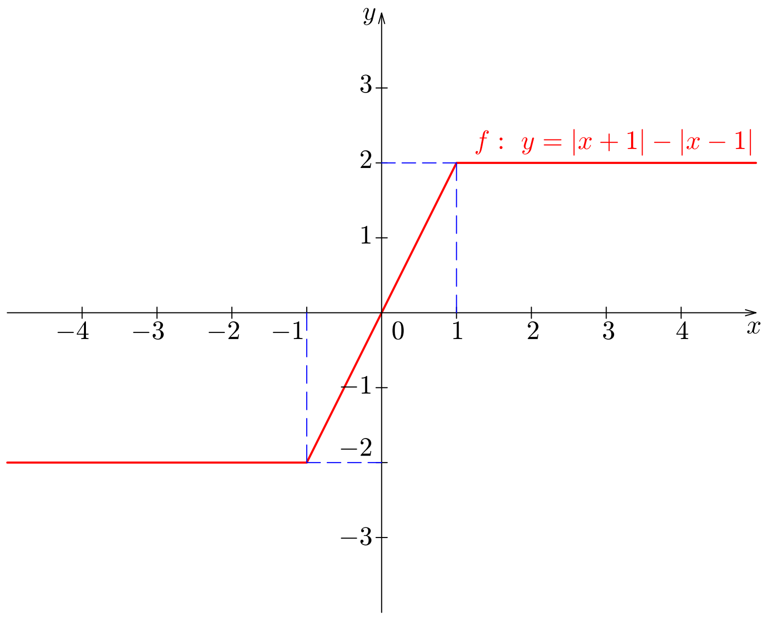
$$f_3 : y = |x+1| - |x-1| = x+1-x+1 = 2.$$

U: Výborne, teraz môžeme zostrojiť graf našej funkcie.

Ž: *V intervale* $(-\infty; -1\rangle$ *sme dostali konštantnú funkciu s rovnicou* $f_1 : y = -2$. *Jej grafom je priamka rovnobežná s osou* x. *My z nej vyznačíme len polpriamku. V intervale* $\langle -1; 1\rangle$ *nám vyšla lineárna funkcia s rovnicou* $f_2 : y = 2x$, *ktorej grafom je priamka rôznobežná s osami.*

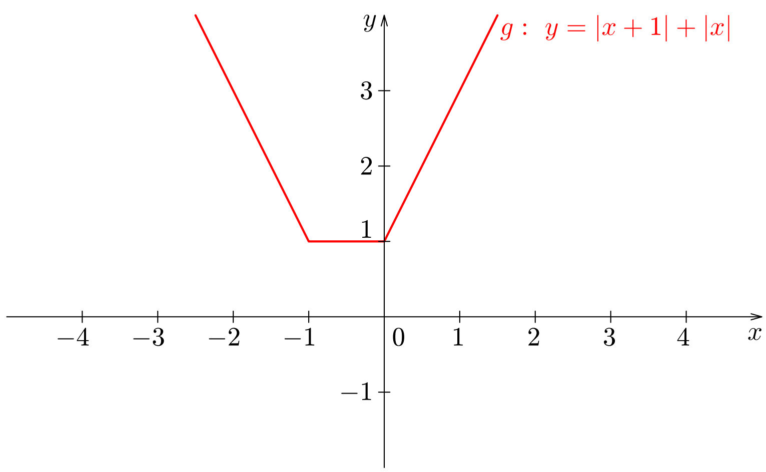
U: Nám bude stačiť úsečka.

Ž: *No a v poslednom intervale* $\langle 1; \infty)$ *sa situácia opakuje, opäť sme dostali konštantnú funkciu* $f_3 : y = 2$. *Jej grafom je priamka, vlastne len polpriamka rovnobežná s osou* x. *A keď to všetko spojíme, dostaneme takýto graf funkcie ako na obrázku:*



Úloha 2: *Zostrojte graf funkcie* $g : y = |x+1| + |x|$.

Výsledok:



Príklad 3: *Zostrojte graf funkcie* $f: y = ||x-3| - |x||$.

Ž: *V predpise funkcie vystupujú tri absolútne hodnoty, pričom dve sú vložené do tretej. Predpokladám, že treba začať odstraňovať tie vnútorné, podobne ako je tomu pri zátvorkách.*

U: Predpokladáš správne.

Ž: *Nulové body výrazov vo vnútorných absolútnych hodnotách sú* 3 *a* 0*. A nulový bod výrazu vo vonkajšej absolútnej hodnote je … Moment, takto to asi nepôjde.*

U: Veru nie, neponáhľaj sa. Nulové body 3 a 0 ti rozdelili množinu reálnych čísel na tri intervaly a v každom z nich upravíme zvlášť predpis funkcie.

Ž: *Najprv sa pozriem na to, aké znamienko budú nadobúdať výrazy* $x-3$ *a* x *na jednotlivých intervaloch. A aby sa mi to nedoplietlo, zapíšem to takto do tabuľky:*

	$(-\infty; 0)$	$\langle 0; 3)$	$\langle 3; \infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$

U: Máš to dobre, môžeš sa pustiť do prvého intervalu $(-\infty; 0)$.

Ž: *Tu sú výrazy v absolútnych hodnotách záporné, preto treba zmeniť znamienka. Čiže platí*

$$|x-3| = -x+3$$

$$|x| = -x.$$

Preto upravím predpis funkcie takto:

$$f_1: y = ||x-3| - |x|| = |-x+3+x| = 3.$$

Pokračujem druhým intervalom $\langle 0; 3)$*. Tu platí, že*

$$|x-3| = -x+3$$

$$|x| = x.$$

Dostávam predpis

$$f_2: y = ||x-3| - |x|| = |-x+3-x| = |-2x+3|.$$

Ostala tu absolútna hodnota. Čo teraz?

U: Nič zvláštne, opakujeme predchádzajúci postup. Najprv urč nulový bod výrazu $-2x+3$.

Ž: *Je ním číslo* $\frac{3}{2}$.

U: Teda pre $x \leqq \frac{3}{2}$ je výraz $-2x+3$ nezáporný a tak dostaneme

$$f_3 : y = |-2x+3| = -2x+3; \quad x \in \left\langle 0; \frac{3}{2} \right\rangle .$$

Lenže pre $x > \frac{3}{2}$ je výraz $-2x+3$ záporný a preto dostaneme

$$f_4 : y = |-2x+3| = 2x-3; \quad x \in \left\langle \frac{3}{2}; 3 \right\rangle .$$

Ž: *Tak ja už idem kresliť graf.*

U: Počkaj, ešte to predsa nemáme dokončené! Rozobrali sme zatiaľ situáciu len na prvých dvoch intervaloch, na $(-\infty; 0\rangle$ a $\langle 0; 3\rangle$. Ostal nám posledný interval $\langle 3; \infty)$.

Ž: *Už som naňho zabudol. Lenže tu stačí vnútorné absolútne hodnoty jednoducho vynechať, pretože výrazy v nich sú teraz kladné. Preto*

$$f_5 : y = ||x-3| - |x|| = |x-3-x| = 3.$$

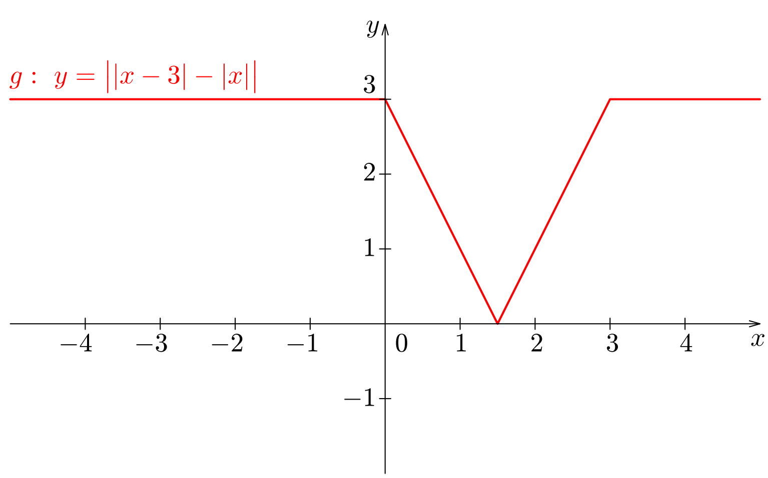
U: Dobre, všetky naše zistenia o funkcii f môžem kvôli prehľadnosti zhrnúť takto:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{pre } x \in (-\infty; 0\rangle \\ -2x+3 & \text{pre } x \in \left\langle 0; \frac{3}{2} \right\rangle \\ 2x-3 & \text{pre } x \in \left\langle \frac{3}{2}; 3 \right\rangle \\ 3 & \text{pre } x \in (3; \infty) . \end{cases}$$

Ž: *Tak a teraz už môžem zostrojiť graf. Prvá a posledná časť je konštantná funkcia, teda grafom je priamka rovnobežná s osou x. Druhá a tretia časť predstavujú lineárne funkcie, ich grafmi sú priamky, ktoré určím pomocou bodov* $[0; 3]$, $\left[\frac{3}{2}; 0\right]$ *a* $[3; 3]$.

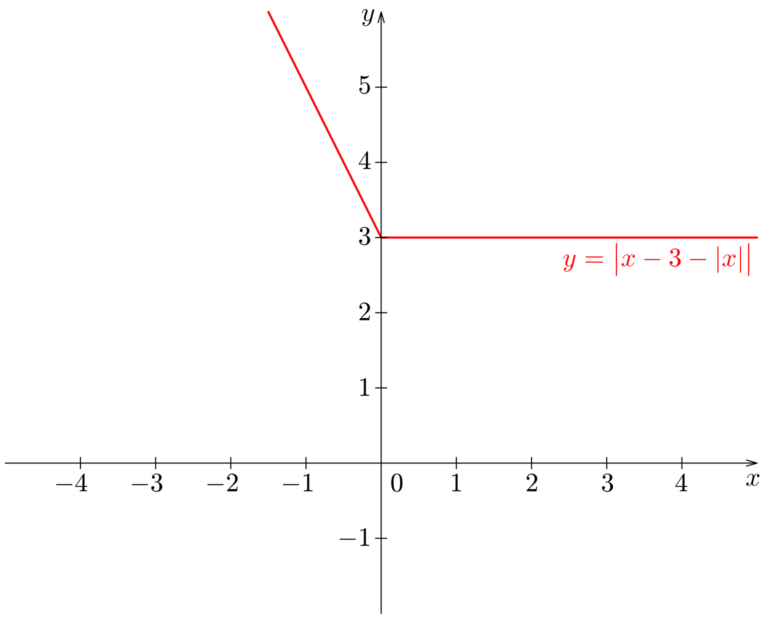
U: Nezabudni, že nepotrebujeme zostrojiť celé priamky, len časti z nich, na každom z našich intervalov inú.

Ž: *Myslím na to a tu je výsledok:*



Úloha 3: *Zostrojte graf funkcie* $f : y = |x - 3 - |x||$.

Výsledok:



Príklad 4: *Zostrojte graf funkcie* $f : y = -|2 - 3x| + 1$.

Ž: *Myslím, že môžem ísť na to cez nulové body, pretože v zadaní vystupuje iba jedna absolútna hodnota, preto sa riešenie rozpadne len na dve možnosti.*

U: Súhlasím, kľudne pokračuj. Potom si ukážeme aj iný postup.

Ž: *Dobre, v absolútnej hodnote je výraz* $2 - 3x$. *Ten bude nezáporný vtedy, keď* $2 - 3x \geqq 0$, *čiže keď*

$$x \leqq \frac{2}{3}.$$

V takom prípade platí

$$|2 - 3x| = 2 - 3x.$$

Predpis funkcie preto môžem upraviť na tvar

$$f_1 : y = -|2 - 3x| + 1 = -(2 - 3x) + 1 = -2 + 3x + 1 = 3x - 1.$$

Dostal som lineárnu funkciu, jej grafom je priamka. Zostrojím ju napríklad pomocou bodov $[0; -1]$ *a* $[-1; -4]$.

U: Výborne, tým máme vybavený interval $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right\rangle$. Povedz mi ešte, ako sa naša funkcia správa na intervale $\left\langle \frac{2}{3}; \infty\right)$.

Ž: *Tak pre*

$$x \geqq \frac{2}{3}$$

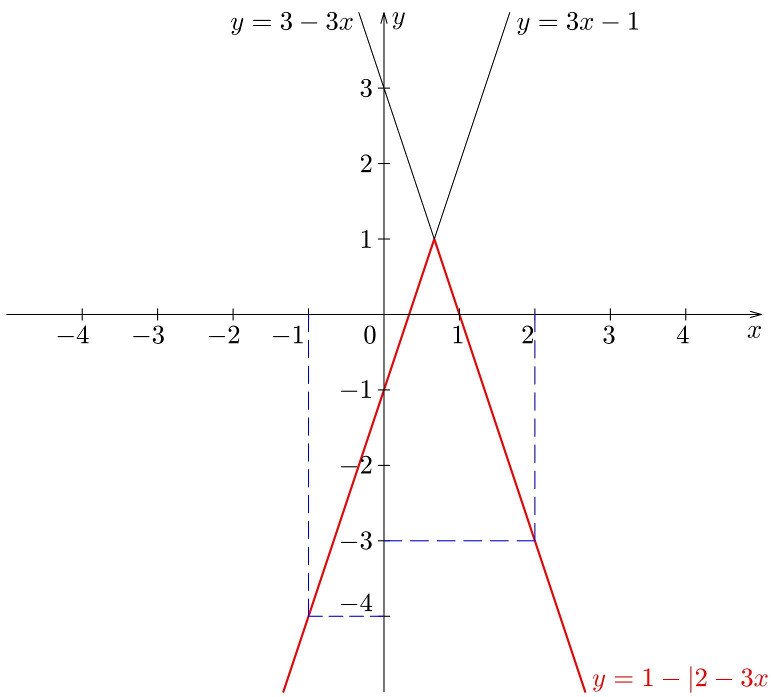
je výraz $2 - 3x$ *záporný alebo rovný nule, a preto* $|2 - 3x| = -2 + 3x$. *Teda*

$$f_2 : y = -|2 - 3x| + 1 = -(-2 + 3x) + 1 = 2 - 3x + 1 = 3 - 3x.$$

Opäť som dostal lineárnu funkciu, jej graf zostrojím pomocou bodov $[1; 0]$ *a* $[2; -3]$.

U: Pri zostrojovaní grafu si ešte uvedomme, že na intervale $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right\rangle$ vyznačíme farebne graf funkcie $f_1 : y = 3x - 1$ a na intervale $\left\langle \frac{2}{3}; \infty\right)$ zase graf funkcie $f_2 : y = 3 - 3x$.

Ž: *Vyzerá to napokon ako obrátené véčko:*



U: Táto úloha sa dala riešiť aj využitím transformácií grafov funkcií. Vyskúšajme si to. Začneme vnútri absolútnej hodnoty funkciou

$$f_1 : y = 2 - 3x.$$

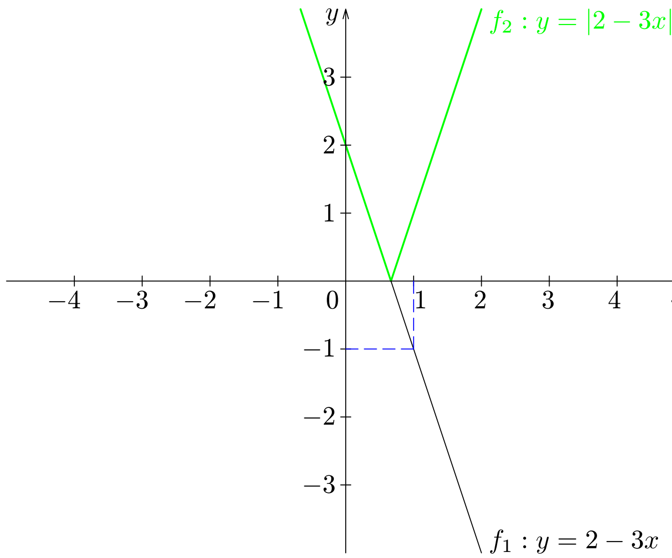
Ž: *Je to opäť lineárna funkcia, jej grafom je priamka. Zostrojím ju pomocou bodov* $[0; 2]$ *a* $[1; -1]$.

U: Ako sa zmení jej graf, ak použijeme absolútnu hodnotu, t.j. ak budeme kresliť graf funkcie

$$f_2 : y = |2 - 3x|?$$

Ž: *Nič ťažké – tá časť grafu funkcie* f_1*, ktorá ležala nad osou* x *sa nezmení. Ale tá časť, ktorá ležala pod ňou, sa preklopí nahor, pretože absolútna hodnota záporného čísla je číslo k nemu opačné.*

U: Čiže dôjde k zobrazeniu polpriamky v osovej súmernosti podľa osi x, celú situáciu vidíme na obrázku:



U: V ďalšom kroku potrebujeme zostrojiť graf funkcie

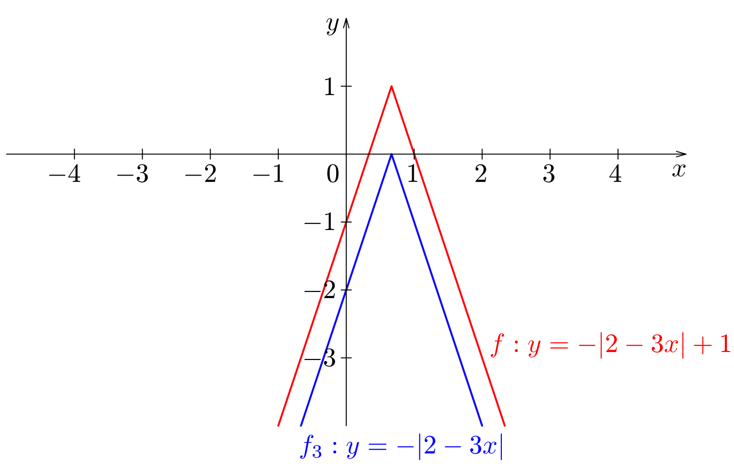
$$f_3 : y = -|2 - 3x|$$

pomocou grafu funkcie f_2.

Ž: *Zmenilo sa iba to, že ste na začiatok pridali jedno mínusko. Teda všetky funkčné hodnoty sa zmenia na opačné čísla. A keď graf funkcie f_2 ležal celý nad osou x, tak graf funkcie f_3 bude ležať celý pod osou x. Pravda až na jeden bod $\left[\frac{2}{3}; 0\right]$, ten ostane na osi.*

U: Môžeme povedať, že sa celý graf funkcie f_2 zobrazí osovo súmerne podľa osi x do grafu funkcie f_3.

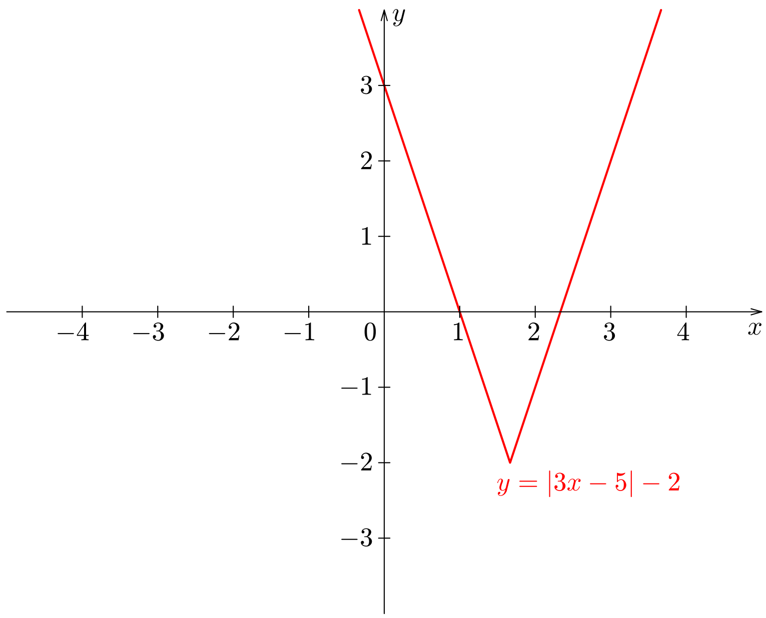
Ž: *No a nakoniec ešte posledný krok – predpis našej funkcie $f : y = -|2 - 3x| + 1$ sa od predpisu funkcie f_3 líši iba tým, že na konci sa pripočítala jednotka. Tá ale spôsobí, že v každom bode sa funkčná hodnota zväčší o jedna, a preto sa celý graf posunie nahor v smere osi y o jeden dielik. Na poslednom obrázku máme graf funkcie f_3 ako aj graf výslednej funkcie f.*



U: A ten je taký istý ako graf, ktorý sme dostali pri prvom riešení úlohy.

Úloha 4: *Zostrojte graf funkcie* $f : y = |3x - 5| - 2.$

Výsledok:



Príklad 5: *Zostrojte graf funkcie*

$$f : y = |1 - |1 - |1 - |x|||$$

využitím transformácií grafov. Potom pomocou grafu rozhodnite o počte riešení rovnice

$$|1 - |1 - |1 - |x||| = p$$

v závislosti od reálneho parametra p.

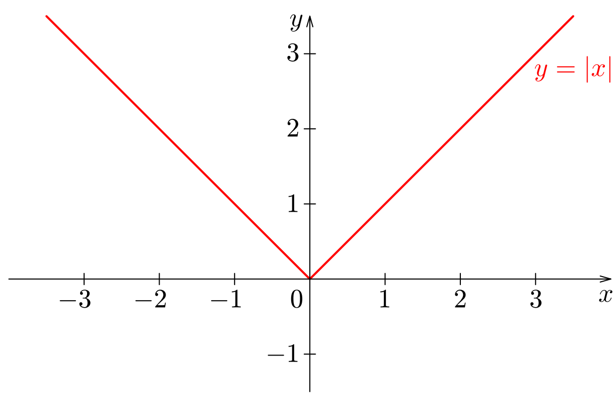
Ž: *Zadanie hovorí, že mám úlohu riešiť pomocou transformácií grafov funkcií. Už vidím, že budem grafy všelijako preklápať a posúvať.*

U: Odhaduješ správne. Odkiaľ začneš?

Ž: *Od najvnútornejšej absolútnej hodnoty, teda začnem grafom funkcie*

$$f_1 : y = |x| .$$

Ten vyzerá ako „véčko“, pretože pre nezáporné x platí $|x| = x$, ale pre záporné x platí $|x| = -x$.



U: Začal si veľmi dobre. V ďalšom kroku zostroj graf funkcie

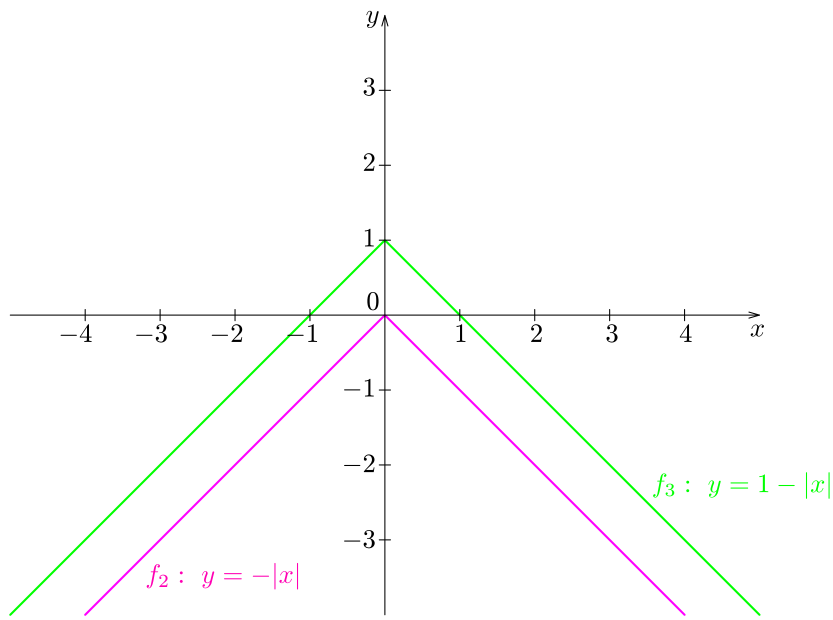
$$f_2 : y = - |x| .$$

Ž: *Celé „véčko“ preklopím nadol, osovo súmerne podľa osi x, pretože v každom bode mám mať funkčnú hodnotu s opačným znamienkom ako predtým. Teda napríklad namiesto bodu $[1; 1]$ bude teraz graf prechádzať bodom $[1; -1]$.*

U: V poriadku, vidím, že tomu rozumieš. A čo ďalší krok, funkcia

$$f_3 : y = 1 - |x|?$$

Ž: *Tak teraz zase mám mať v každom bode funkčnú hodnotu o jedna väčšiu ako pri funkcii f_2. Napríklad namiesto bodu $[1; -1]$ to bude bod $[1; 0]$. Preto sa celý graf posunie o jeden dielik nahor pozdĺž osi y-ovej. Na obrázku sú oba posledné grafy:*



U: Výborne, keďže si toto dobre zvládol, nebude pre teba problém pokračovať v riešení úlohy, budeš vlastne opakovať niektoré kroky. Takže graf funkcie

$$f_4 : y = |1 - |x||$$

získame. . .

Ž: *. . . preklopením tej časti grafu funkcie f_3, ktorá leží pod osou x, nad os x osovo súmerne.*

U: Ďalej funkcia

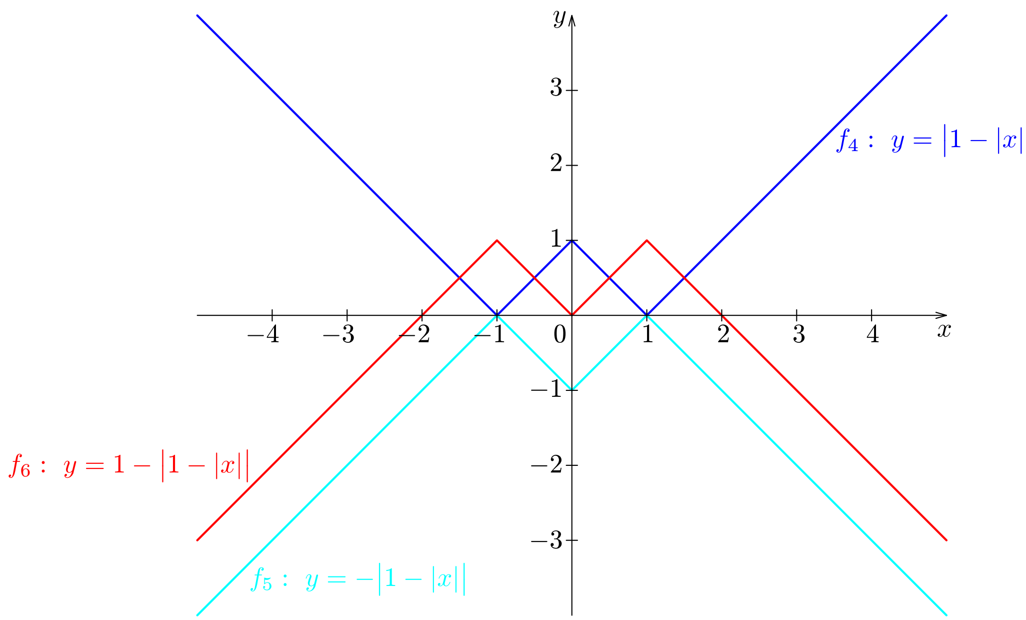
$$f_5 : y = - |1 - |x||$$

Ž: *. . . jej graf je celý osovo súmerný podľa osi x s posledným grafom a ďalšia funkcia*

$$f_6 : y = 1 - |1 - |x||$$

bude mať graf posunutý o jeden dielik nahor v smere osi y.

U: Výborne, na obrázku si to môžeme pozrieť.



Ž: *Teraz ešte raz zopakujem všetky kroky, tak dostanem postupne graf funkcie*

$$f_7 : y = |1 - |1 - |x|||$$

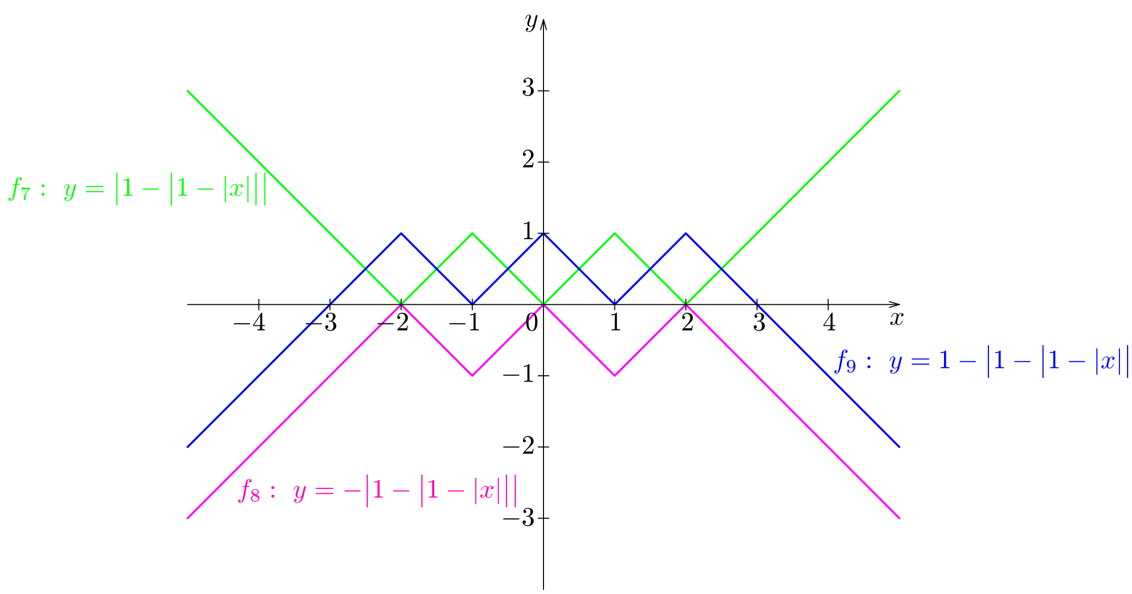
preklopením „zápornej" časti grafu funkcie f_6 nahor. Ďalej graf funkcie

$$f_8 : y = - |1 - |1 - |x|||$$

preklopením grafu funkcie f_7 nadol a napokon graf funkcie

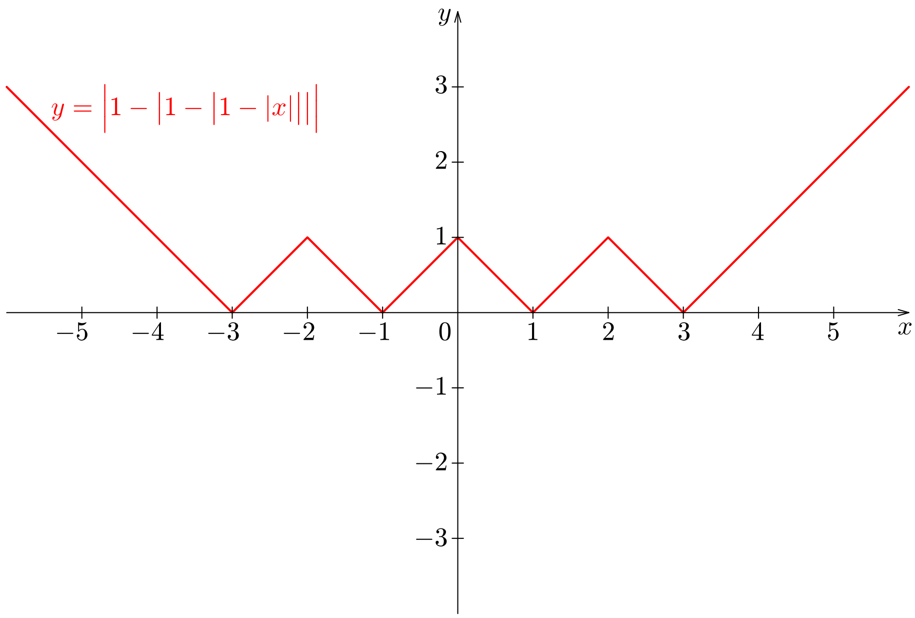
$$f_9 : y = 1 - |1 - |1 - |x|||$$

posunutím grafu funkcie f_8 nahor o jeden dielok. Vidíme to na ďalšom obrázku.



U: Ostala ti už len posledná absolútna hodnota.

Ž: *Preto opäť preklopím súmerne podľa osi x-ovej tie časti grafu funkcie f_9, ktoré ležali pod osou x. Dostanem takýto výsledok:*



U: Zvládol si to vynikajúco, klobúk dole! Ostáva nám už len vrátiť sa k zadaniu, kde sa pýtame, koľko riešení má rovnica

$$|1 - |1 - |1 - |x|||| = p$$

v závislosti od parametra p. A rozhodnúť o tom máme pomocou grafu, ktorý sme práve zostrojili.

Ž: *Ten graf vidím pred sebou, ale neviem, čo s tým parametrom p.*

U: Tak si predstav, že ideme našu rovnicu riešiť graficky, teda budeme hľadať priesečník dvoch grafov. Jeden graf predstavuje ľavú stranu rovnice, čiže našu funkciu f, to už máme zostrojené. A druhý graf predstavuje pravú stranu rovnice, teda funkciu

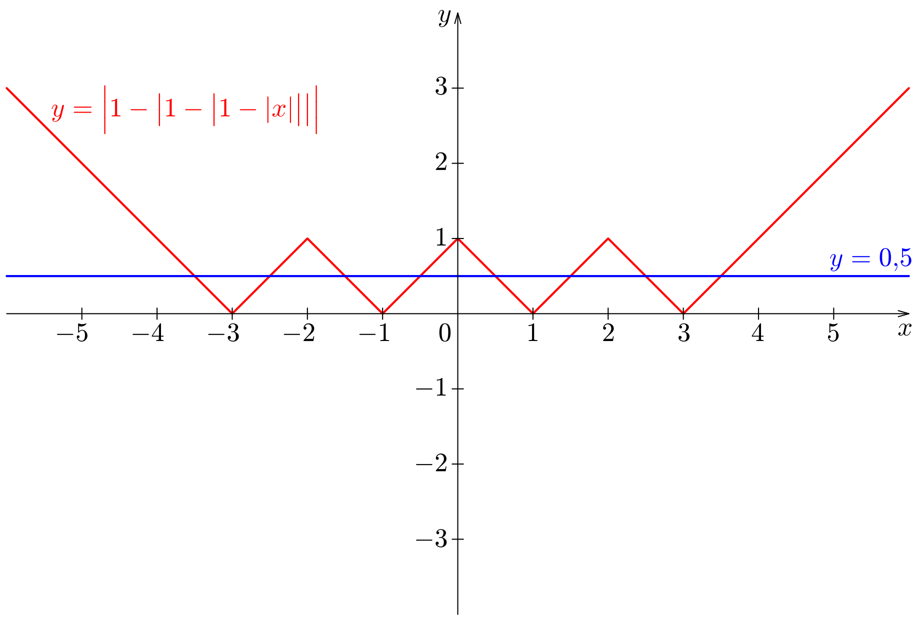
$$g : y = p.$$

Ž: *Ale veď to je konštantná funkcia, jej grafom je priamka rovnobežná s osou x! A ja sa mám pozrieť, koľkokrát táto priamka pretne môj graf funkcie f?*

U: Presne tak.

Ž: *To nie je ani také zložité, lebo vidím, že ak je p záporné, tak priamka $y = p$ graf vôbec nepretne. Ak je $p = 0$, tak sa grafu dotkne štyrikrát vo všetkých minimách. Ak je p kladné, ale menšie ako 1, tak pretne graf jeden, dva ... moment ... osemkrát!*

U: Máš pravdu, ukážeme si to v prípade, ak $p = 0{,}5$:



Ž: *Pokračujem ďalej, ak je $p = 1$, tak vznikne päť priesečníkov a ak je p väčšie ako 1, tak sa grafy pretnú len dvakrát.*

U: Zhrnieme teda diskusiu o počte riešení rovnice

$$|1 - |1 - |1 - |x|||| = p$$

takto:

$$\begin{array}{rcl} p < 0 & \ldots & 0 \text{ riešení} \\ p = 0 & \ldots & 4 \text{ riešenia} \\ p \in (0; 1) & \ldots & 8 \text{ riešení} \\ p = 1 & \ldots & 5 \text{ riešení} \\ p > 1 & \ldots & 2 \text{ riešenia.} \end{array}$$

Úloha 5: *Určte všetky $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré má rovnica $|x + 2| - |3 - x| = a$ práve jedno riešenie.*

Výsledok: $a \in (-5; 5)$