Exponenciálna funkcia

RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: Vieš hrať šach?

Ž: *Šach? Neviem.*

U: Ale šachovnicu poznáš.

Ž: *Samozrejme. Je na nej* 64 *políčok, striedavo biele a čierne.*

U: Práve k šachovnici sa viaže nasledujúca legenda. Vynálezca šachovej hry údajne požadoval od indického vládcu odmenu takto – za prvé pole šachovnice jedno pšeničné zrnko, za druhé pole šachovnice dve pšeničné zrnká, za tretie pole štyri zrnká, atď. Čiže za každé ďalšie pole šachovnice dvojnásobné množstvo zrniek ako za predchádzajúce. Čo myslíš, mohol mu vládca odmenu vyplatiť?

Ž: *A prečo nie? Určite mal dosť sluhov, ktorí by mu tie zrnká spočítavali.*

U: Tak ich začnime spočítavať aj my.

Ž: *To je ľahké, na prvom políčku jedno zrnko, na druhom dve, na treťom štyri, na ďalšom osem, potom šestnásť... Vychádzajú samé mocniny dvojky.*

U: Môžeme ich preto zapísať aj takto:

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3 \dots$$

Koľko zrniek bude na 20. políčku?

Ž: *Predsa* 2^{20}*. Vlastne nie, moment, začali sme od nuly, takže* 2^{19}*. Na to si vezmem kalkulačku*

$$2^{19} = 524\,288.$$

Fíha, toľko zrniek?

U: Na nasledujúcom políčku už bude viac ako milión zrniek a to ešte nie sme ani v polovici šachovnice.

Ž: *Tak to teda celá úloha vyzerá ako poriadny chyták!*

U: Veru, ak je legenda pravdivá, tak sa dal vládca poriadne nachytať. Počet všetkých zŕn, ktoré by mal vyplatiť, sa dá vyjadriť ako

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}.$$

Pomocou vzťahu na výpočet súčtu členov geometrickej postupnosti sa dá spočítať, že je to $2^{64} - 1$, čo je približne

$$1{,}8 \cdot 10^{19}.$$

Toľko pšeničných zrniek sa na celom svete nezožalo za celú dobu existencie ľudstva.

Ž: *Neviem si ani predstaviť také veľké číslo.*

U: Je naozaj obrovské. Pre porovnanie – ak by sme tieto zrnká ukladali za sebou tak, že na 1 cm by sa vošli 4 zrnká, tak vzdialenosť od prvého k poslednému zrnku by bola približne 5 svetelných rokov.

U: Vráťme sa k číslam, ktoré v našej legende vystupovali, teda k mocninám

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3\dots$$

Ž: *Všetky majú rovnaký základ dvojku, ale menia sa ich exponenty.*

U: Zavedieme novú funkciu, ktorá každej hodnote premennej x priradí hodnotu mocniny s týmto exponentom, teda

$$y = 2^x.$$

Takáto funkcia sa nazýva exponenciálna práve preto, že premenná x sa nachádza v exponente mocniny. Základ však môže byť aj iný, všeobecne zapíšeme

$$y = a^x.$$

Uvažujme teraz o tom, aký môže byť základ mocniny, teda číslo a.

Ž: *Ak by bolo $a = 1$, mali by sme funkciu $y = 1^x = 1$. Lenže to je konštantná funkcia. Ak by bolo $a = 0$, vyšla by funkcia $y = 0^x = 0$. To je opäť konštantná funkcia.*

U: Navyše nie je definovaná pre $x = 0$. Preto oba tieto špeciálne prípady vynecháme. Ďalej nebudeme uvažovať ani o záporných hodnotách základu, pretože napríklad

$$(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-2)}$$

nie je definované v množine $\mathbb{R}$. Ostali nám iba kladné čísla a s výnimkou čísla 1. Môžem vysloviť definíciu:

Exponenciálnou funkciou so základom a nazývame každú funkciu danú rovnicou

$$f : y = a^x,$$

kde $a > 0$, $a \neq 1$. Jej definičný obor je množina $\mathbb{R}$.

Ž: *Už som zvedavý, ako vyzerá graf takejto funkcie.*

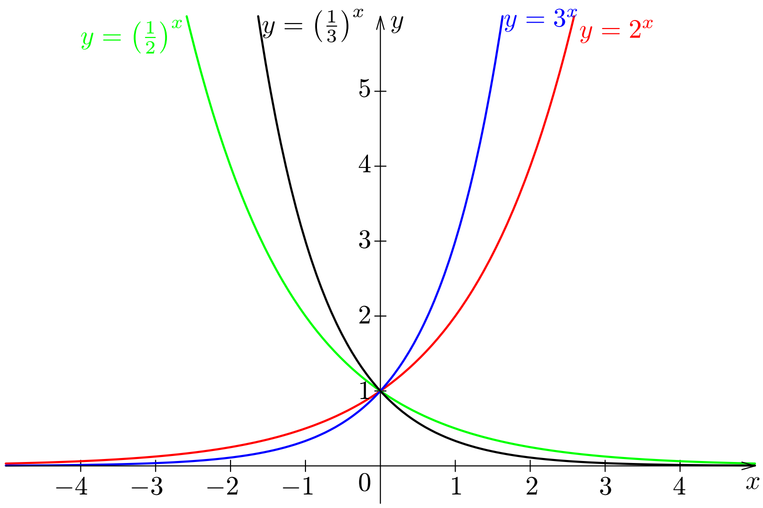
U: Zostrojíme grafy niekoľkých exponenciálnych funkcií, aby sme vedeli porovnať ich vlastnosti. Navrhujem tieto

$$y = 2^x, \quad y = 3^x, \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

Ž: *Pripravím si tabuľku s niekoľkými hodnotami, uvedená je v rámčeku.*

x	-3	-2	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	2	3
$y = 2^x$	0,125	0,250	0,500	0,707	1	1,414	2	4	8
$y = 3^x$	0,037	0,111	0,333	0,578	1	1,732	3	9	27
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1,414	1	0,707	0,500	0,250	0,125
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1,732	1	0,578	0,333	0,111	0,037

Do súradnicovej sústavy postupne nanesiem všetky hodnoty z tabuľky. Vznikli mi takéto štyri grafy:



U: Vzniknuté grafy majú charakteristický tvar. Môžeme povedať, že si zostrojil exponenciálne krivky, alebo tiež exponenciály. Pomocou grafov našich funkcií popíš teraz vlastnosti exponenciálnej funkcie.

Ž: *Všetky štyri funkcie nadobúdajú iba kladné hodnoty, preto ich obor hodnôt je otvorený interval* $(0; \infty)$. *Nemajú žiadne extrémy, sú ohraničené zdola číslom nula.*

U: Keďže sa graf každej z funkcií približuje k osi x-ovej, ale nikdy sa jej „nedotkne“, tak os x predstavuje asymptotu všetkých exponenciálnych kriviek.

Ž: *Vidím ale, že nie všetky vlastnosti majú tieto funkcie rovnaké. Prvé dve*

$$y = 2^x, \quad y = 3^x$$

sú rastúce. Ale druhé dve

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

sú klesajúce. Zrejme to závisí od základu a.

U: Samozrejme. Ak pre základ exponenciálnej funkcie platí $a > 1$, potom je funkcia rastúca. Ak je $a < 1$ a zároveň kladné, je funkcia $y = a^x$ klesajúca. Monotónnosť je zároveň jediná vlastnosť, v ktorej sa exponenciálne funkcie odlišujú v závislosti od základu. Pokračuj ďalšími spoločnými vlastnosťami.

Ž: *Funkcie sú prosté, ale žiadna z nich nie je párna ani nepárna. Všetky grafy prechádzajú bodom* $[0;1]$.

U: Výborne. Teraz sa na chvíľu sústreď na dvojicu grafov funkcií $y = 2^x$ a $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Ž: *Myslím, že sú navzájom súmerné podľa osi* y.

U: Áno, pretože platí

$$2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x .$$

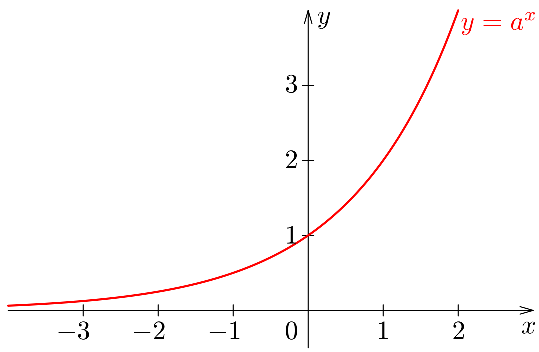
Svoje zistenie môžeš zovšeobecniť.

Ž: *Grafy funkcií* $y = a^x$ *a* $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ *kde* $a > 0$, $a \neq 1$ *sú súmerné podľa osi* y*-ovej.*

U: Všetky poznatky o exponenciálnych funkciách prehľadne zhrnieme do tabuľky.

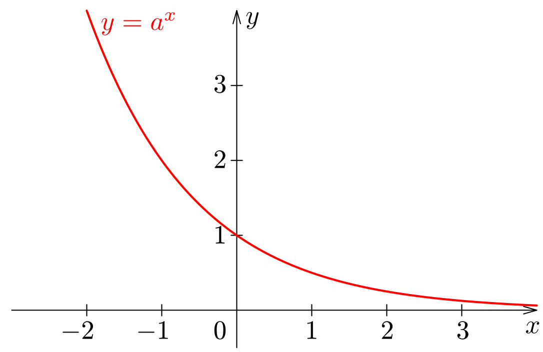
Vlastnosti exponenciálnej funkcie $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$:

$a > 1$



1. definičný obor $\mathcal{D} = \mathbb{R}$;
2. obor hodnôt $\mathcal{H} = (0; \infty)$;
3. nie je párna ani nepárna;
4. je rastúca;
5. nemá extrémy;
6. je zdola ohraničená;
7. je prostá;
8. $f(0) = 1$;
9. os x je asymptota grafu.

$0 < a < 1$



1. definičný obor $\mathcal{D} = \mathbb{R}$;
2. obor hodnôt $\mathcal{H} = (0; \infty)$;
3. nie je párna ani nepárna;
4. je klesajúca;
5. nemá extrémy;
6. je zdola ohraničená;
7. je prostá;
8. $f(0) = 1$;
9. os x je asymptota grafu.

U: Na záver sa venujme jednej špeciálnej exponenciálnej funkcii, ktorú nazývame prirodzená. Uvažujme graf lineárnej funkcie

$$y = x + 1.$$

Hľadajme také číslo $e > 1$, aby graf exponenciálnej funkcie

$$y = e^x$$

mal s touto priamkou spoločný jediný bod.

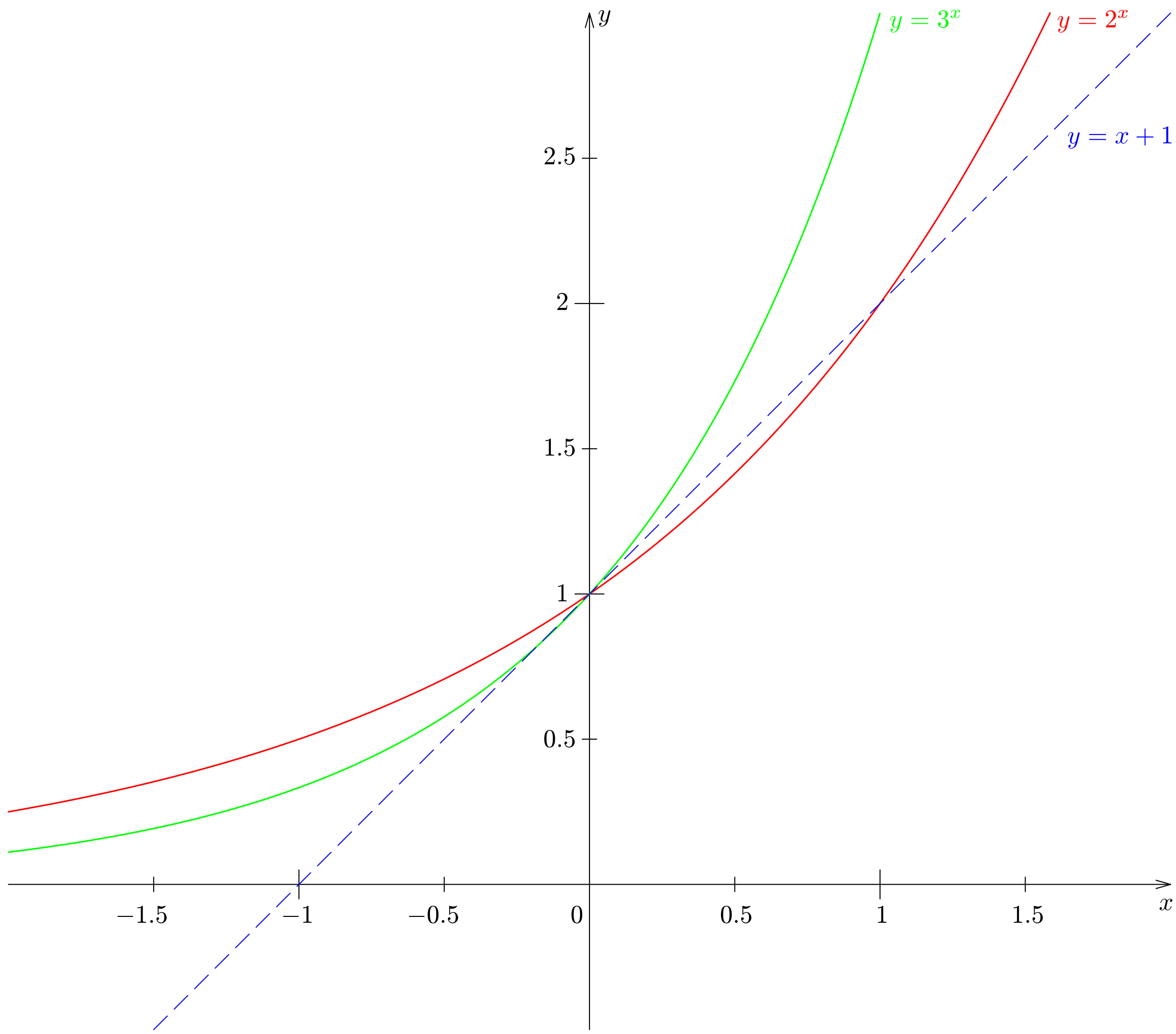
Ž: *Ak tomu dobre rozumiem, tak priamka $y = x + 1$ sa bude grafu funkcie len dotýkať, nebude ho pretínať.*

U: Presne tak. Navyše vieme, že graf každej exponenciálnej funkcie prechádza bodom $[0; 1]$. Ale aj priamka $y = x + 1$ prechádza týmto bodom.

Ž: *Takže sme našli spoločný bod. Ja by som teraz skúsil funkciu $y = 2^x$.*

U: Kľudne skús hneď aj funkciu $y = 3^x$.

Ž: *Dobre, zostrojil som do jedného obrázka grafy oboch funkcií aj s priamkou.*



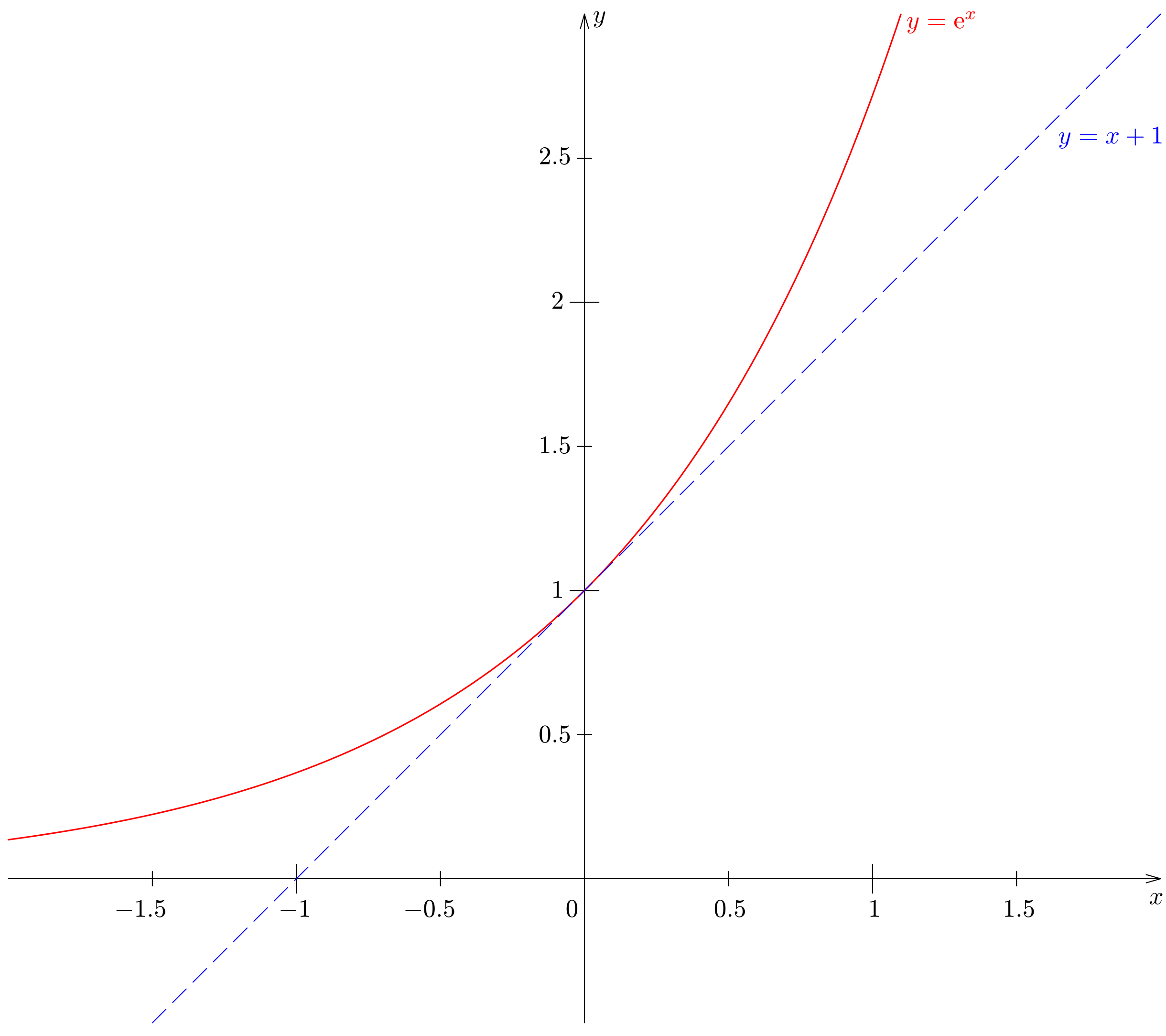
U: Môžeš vidieť, že ani jedna z funkcií nevyhovuje našim požiadavkam. Graf funkcie $y = 2^x$ preťal priamku druhý raz v kladnej časti a graf funkcie $y = 3^x$ zase v zápornej časti.

Ž: *Potom by ale to hľadané číslo malo byť niekde medzitým.*

U: Áno, číslo e bude patriť do intervalu $(2; 3)$. Dá sa vypočítať, že

$$e \doteq 2{,}718.$$

Toto číslo patrí medzi iracionálne a nazýva sa Eulerovo číslo. Na nasledujúcom obrázku je graf prirodzenej exponenciálnej funkcie $y = e^x$.

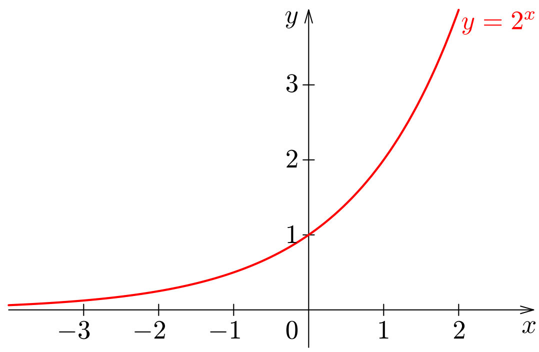


U: Na záver už len dodám, že s exponenciálnymi funkciami (najmä s prirodzenými) sa stretávame v biológii, fyzike, chémii, ekonómii. Pomocou legendy o šachovnici je dobré si zapamätať, že tieto funkcie veľmi prudko rastú, prípadne klesajú.

Príklad 1: *Pomocou grafu funkcie* $f : y = 2^x$ *zostrojte grafy funkcií* $f_1 : y = 2^x + 3$, $f_2 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$, $f_3 : y = -2^x$ *a* $f_4 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

U: Pri riešení tejto úlohy môžeš šikovne využiť svoje vedomosti o transformáciách funkcií.

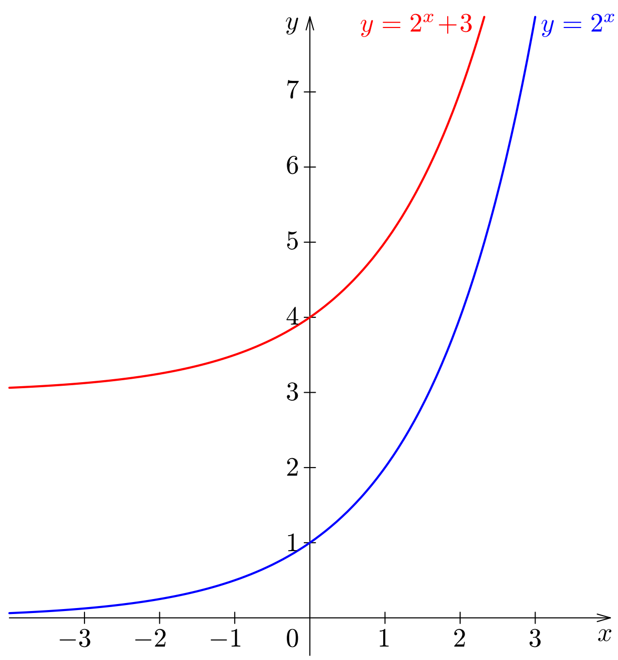
Ž: *Graf funkcie* $f : y = 2^x$ *poznám, je to exponenciálna krivka. Jej graf prechádza bodom* $[0; 1]$ *a je na nasledujúcom obrázku:*



U: Dobre, a teraz skús do toho istého obrázka prikresliť graf funkcie

$$f_1 : y = 2^x + 3.$$

Ž: *To nie je ťažké, pretože funkcia* f_1 *priradí každému reálnemu číslu hodnotu o* 3 *väčšiu než funkcia* f. *To znamená, že graf funkcie* f_1 *vznikne posunutím grafu funkcie* f *o* 3 *dieliky nahor pozdĺž osi y-ovej. Vyzerá to takto:*



U: Veľmi dobre. Som zvedavý, ako si poradíš s grafom ďalšej funkcie

$$f_2 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}.$$

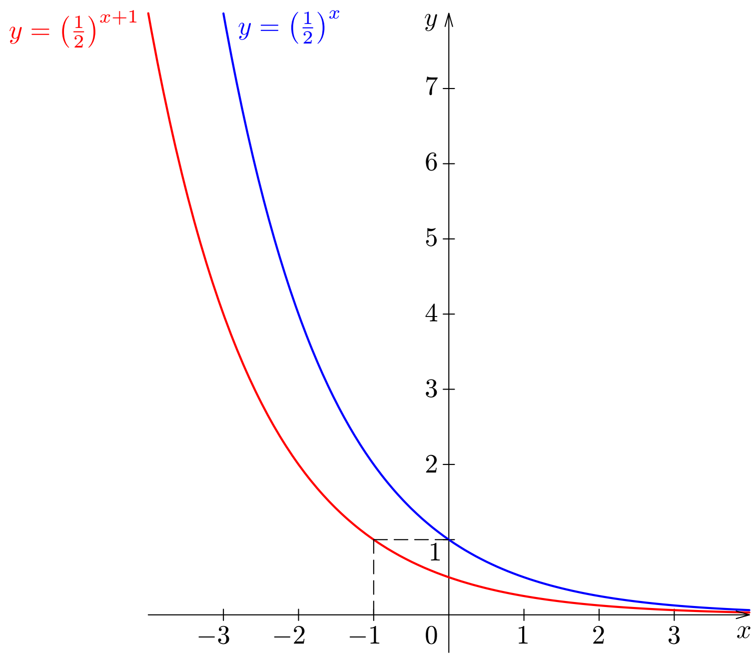
Ž: *Najprv si pripravím graf funkcie $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Ten by som mohol získať z grafu funkcie $f : y = 2^x$ zobrazením v osovej súmernosti podľa osi y. Mám pravdu?*

U: Máš. Stačí si uvedomiť, že platí $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$.

Ž: *Vznikla mi klesajúca exponenciálna krivka. Ale v exponente musím nahradiť výraz x výrazom $x+1$. To znamená, že graf funkcie f_2 dostanem tak, že posuniem o jeden dielik doľava graf funkcie $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.*

U: Čiže graf funkcie f_2 nebude prechádzať bodom $[0; 1]$, ale bodom $[-1; 1]$. O tom sa môžeme ľahko presvedčiť dosadením do predpisu funkcie.

Ž: *Na ďalšom obrázku už je zostrojený graf funkcie f_2:*



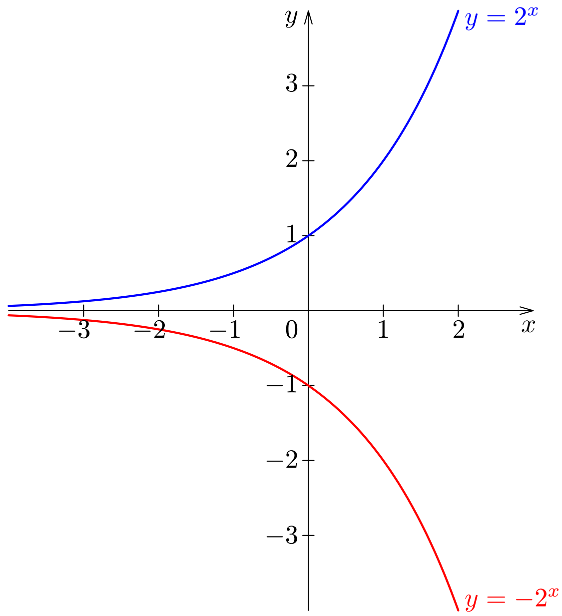
U: Tretia funkcia v poradí má pomerne jednoduchý predpis

$$f_3 : y = -2^x.$$

Ž: *Od funkcie $f : y = 2^x$ sa líši iba znamienkom. To znamená, že všetky hodnoty funkcie f_3 budú opačné čísla k hodnotám funkcie f. To, čo bolo kladné, bude záporné a naopak. Preto sa celý graf preklopí podľa osi x. Čo bolo nad ňou, bude pod ňou a naopak.*

U: Dôjde teda k zobrazeniu grafu funkcie f v osovej súmernosti podľa x-ovej osi.

Ž: *Výsledok je na obrázku:*



U: Ostáva nám ešte posledný graf pre funkciu

$$f_4 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}.$$

Ž: *Exponent x sa nachádza v absolútnej hodnote. Preto si riešenie rozdelím na dva prípady. Ak je x kladné alebo nula, tak platí*

$$|x| = x.$$

Potom predpis funkcie upravím na tvar

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}.$$

U: Zatiaľ uvažuješ veľmi dobre. Ako to bude so zápornými hodnotami?

Ž: *Viem, že absolútna hodnota záporného čísla je číslo k nemu opačné. Preto pre $x < 0$ upravím predpis funkcie na tvar*

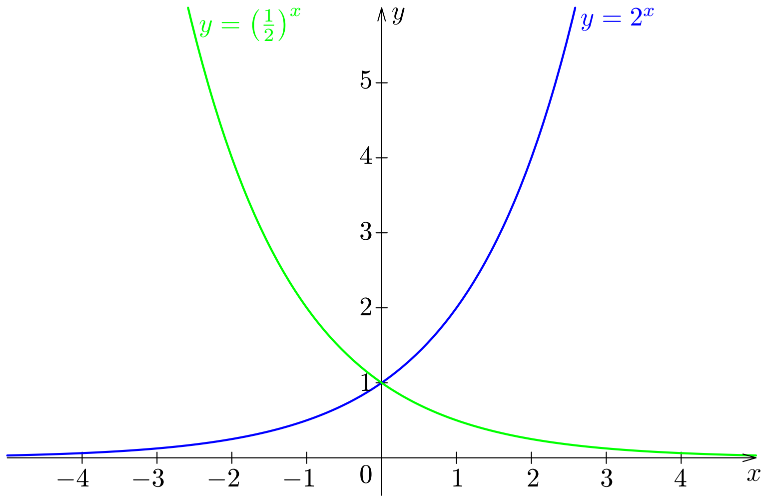
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}.$$

U: Podľa pravidiel pre počítanie s mocninami však platí

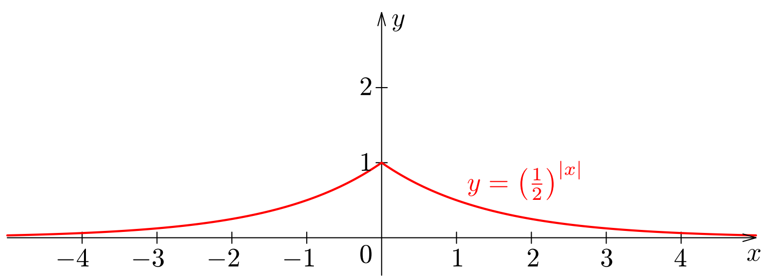
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x.$$

Ž: *Preto si pripravím do jedného obrázka grafy oboch funkcií*

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}, \quad y = 2^x.$$



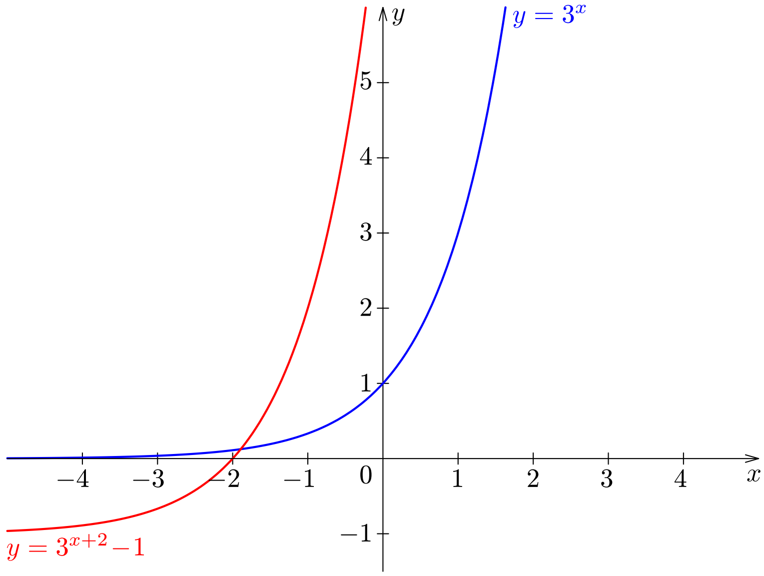
U: Nakoniec červenou farbou vyznačíme výsledok. Graf funkcie $f_4 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ je zložený z dvoch častí. Pre nezáporné x z grafu funkcie $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ a pre záporné x z grafu funkcie $f_3 : y = 2^x$. Výsledok je na poslednom obrázku:



U: Na záver ešte jeden nápad. Mohol si si uvedomiť, že funkcia $f_4 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ je párna. Preto jej graf je osovo súmerný podľa y-ovej osi a na jeho zostrojenie stačí poznať graf funkcie $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Úloha 1: *Pomocou grafu funkcie* $f : y = 3^x$ *zostrojte graf funkcie* $g : y = 3^{x+2} - 1$.

Výsledok:



Príklad 2: *Závislosť tlaku vzduchu p od nadmorskej výšky h (v km) možno vyjadriť približne vzťahom $p = p_0 \cdot 0{,}88^h$. Pritom $p_0 \doteq 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa je tlak v nadmorskej výške 0 metrov.*
a) Vypočítajte, aký je tlak vzduchu v nadmorskej výške 800 m.
b) Vypočítajte tlak vzduchu na vrchole Mont Everestu.

Ž: *Viem, že tlak vzduchu s nadmorskou výškou klesá. Nemyslel som si však, že sa to dá vyjadriť nejakým vzorcom.*

U: Veru dá, aspoň približne. Závislosť uvedená v zadaní patrí medzi exponenciálne funkcie. Základ mocniny, ktorá tu vystupuje, je číslo 0,88. To je menšie ako jedna, preto je táto funkcia klesajúca.

Ž: *V nadmorskej výške* 0 *metrov je tlak vzduchu* $p_0 \doteq 1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$. *Mám vypočítať, aký bude tlak vo výške* 800 m. *Myslím, že stačí jednoducho dosadiť do vzorca*

$$p = p_0 \cdot 0{,}88^h.$$

Len premením metre na kilometre, $800\,\mathrm{m} = 0{,}8\,\mathrm{km}$.

U: Vezmi si na pomoc klakulačku.

Ž: *Dobre, teda*

$$p = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 0{,}88^{0{,}8},$$

po zaokrúhlení

$$p \doteq 0{,}914 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}.$$

U: Poďme teraz na Mount Everest.

Ž: *Rád by som tam niekedy išiel.*

U: Ak by sa ti to podarilo, ocitol by si sa v nadmorskej výške 8848 metrov. V takej veľkej výške by ťa okrem zimy a vetra trápil aj nedostatok vzduchu. Ten súvisí práve s poklesom tlaku.

Ž: *Na koľko klesne tlak vzduchu, to vypočítam rovnako ako pred chvíľou – dosadením do vzorca. Dostanem*

$$p = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 0{,}88^{8{,}848},$$

odtiaľ po zaokrúhlení

$$p \doteq 0{,}327 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}.$$

U: V porovnaní s hodnotou pri hladine mora je tlak vzduchu na najvyššom mieste Zeme asi trikrát menší.

Úloha 2: *Vzorec $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ udáva závislosť hmotnosti m rádioaktívnej látky pri jej rádioaktívnej premene od času t. Začiatočná hmotnosť látky v čase* 0 *sekúnd je m_0 gramov, v čase t sekúnd je m gramov. Polčas rozpadu je T sekúnd (je to čas, za ktorý sa pôvodná hmotnosť m_0 zmenší na polovicu). Polčas rozpadu rádia je približne* 180 *sekúnd. Aká časť pôvodnej hmotnosti zostane za* 12 *minút od začiatku premeny?*

Výsledok: jedna šestnástina

Príklad 3: *Rozhodnite, pre ktoré hodnoty reálneho parametra m je funkcia $f : y = \left(\frac{m+3}{m-1}\right)^x$ klesajúca.*

U: V úlohe je daná exponenciálna funkcia. Pripomeňme si najprv jej definíciu.

Ž: *Exponenciálnou funkciou so základom a nazývame každú funkciu danú rovnicou*

$$f : y = a^x,$$

kde $a > 0$, $a \neq 1$. Jej definičný obor je množina $\mathbb{R}$.

U: Veľmi dobre. Ako to je s monotónnosťou tejto funkcie?

Ž: *Tá závisí od základu. Ak je $a > 1$, tak je funkcia rastúca. Ale ak je $a < 1$, tak je klesajúca.*

U: Teóriu ovládaš, poďme na prax. Máš určiť, kedy je funkcia

$$f : y = \left(\frac{m+3}{m-1}\right)^x$$

klesajúca.

Ž: *Základ tejto funkcie je*

$$a = \frac{m+3}{m-1}.$$

Podľa toho, čo som pred chvíľou povedal, musí platiť podmienka

$$\frac{m+3}{m-1} < 1.$$

U: Pozor, to nestačí. V definícii exponenciálnej funkcie je skrytá ešte jedna podmienka.

Ž: *Aha, základ musí byť kladné číslo, teda*

$$\frac{m+3}{m-1} > 0.$$

U: Obe podmienky musia platiť súčasne, preto to môžeme chápať ako sústavu dvoch nerovníc.

Ž: *Ale každú budem riešiť zvlášť, spojím to až na konci. Začnem prvou racionálnou nerovnicou*

$$\frac{m+3}{m-1} < 1.$$

Jednotku prenesiem na ľavú stranu

$$\frac{m+3}{m-1} - 1 < 0.$$

Ďalej upravím na jeden zlomok

$$\frac{4}{m-1} < 0.$$

U: Dospel si k pomerne jednoduchému zlomku, ktorý má byť záporný. Pritom jeho čitateľ je kladný.

Ž: *Z toho vyplýva, že menovateľ musí byť záporný, teda* $m - 1 < 0$*, odtiaľ*

$$m < 1.$$

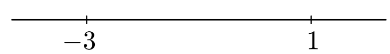
U: Prvú nerovnicu si zvládol výborne, poďme na druhú.

Ž: *Tu má platiť*

$$\frac{m+3}{m-1} > 0.$$

Toto je nerovnica v podielovom tvare, budem ju riešiť intervalovou metódou nulových bodov. To sú body $m = -3$ *a* $m = 1$*.*

U: Tieto body rozdelia celú množinu reálnych čísel na tri intervaly. Vidíme to na obrázku.



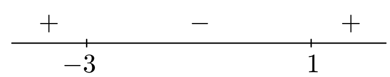
Ž: *V každom z týchto intervalov si vyberiem jedno číslo, dosadím do výrazu* $\dfrac{m+3}{m-1}$*, aby som zistil, či nadobudne kladnú alebo zápornú hodnotu. Pre ľavý interval zoberiem číslo* -5*. Po dosadení vznikne*

$$\frac{-5+3}{-5-1} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

To je kladné číslo, napíšem plus.

U: Dobre, vidím, že vieš čo máš robiť, napíš mi už len výsledok.

Ž: *Ja ho radšej nakreslím:*



Mňa zaujíma tá časť, kde zlomok nadobúda kladné hodnoty. Preto

$$m \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty).$$

U: Veľmi dobre, spojme teraz riešenia oboch nerovníc.

Ž: *Keďže majú platiť súčasne, urobím prienik s množinou* $(-\infty; 1)$ *a konečný výsledok je*

$$m \in (-\infty; -3).$$

Úloha 3: *Rozhodnite, pre ktoré hodnoty reálneho parametra* m *je funkcia* $f : y = \left(\frac{2m-1}{m+2}\right)^x$ *rastúca.*

Výsledok: $m \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$

Príklad 4: *Pre výpočet budúcej hodnoty kapitálu K_n po n úrokových obdobiach platí pri jednoduchom úrokovaní vzťah $K_n = K_0\,(1 + i \cdot n)$. Pri zloženom úrokovaní platí vzťah $K_n = K_0\,(1 + i)^n$, kde K_0 je začiatočná hodnota kapitálu, i je úroková sadzba. Zostrojte grafy funkcií, vyjadrujúcich závislosť budúcej hodnoty kapitálu od počtu úrokových období. Na základe grafov porovnajte výhodnosť jednoduchého a zloženého úrokovania. Porovnajte nárast sumy* 100 000 € *pri jednoduchom a zloženom úrokovaní pri ročnej úrokovej miere 1% za obdobia* 6 *rokov a* 66 *rokov.*

Ž: *Môžete mi stručne vysvetliť rozdiel medzi jednoduchým a zloženým úrokovaním?*

U: Samozrejme. Pre jednoduchosť uvažujme o ročnom úrokovom období. To znamená, že k našej začiatočnej hodnote kapitálu K_0 sa budú vždy na konci roka pripisovať úroky. Pri jednoduchom úrokovaní platí, že sa pripisuje stále ten istý úrok ako prvý rok. Závislosť medzi budúcou hodnotou kapitálu K_n a počtom rokov n vyjadruje vzťah

$$K_n = K_0\,(1 + i \cdot n).$$

Aký druh funkcie to je?

Ž: *Ak tomu dobre rozumiem, tak namiesto premennej y mám K_n a namiesto premennej x mám n.*

U: Presne tak.

Ž: *Tá zátvorka ma mýli, roznásobím ju a dostanem*

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot n.$$

Myslím, že závislosť K_n od n je lineárna funkcia.

U: Máš pravdu. Preto určite vieš, že grafom tejto závislosti je …

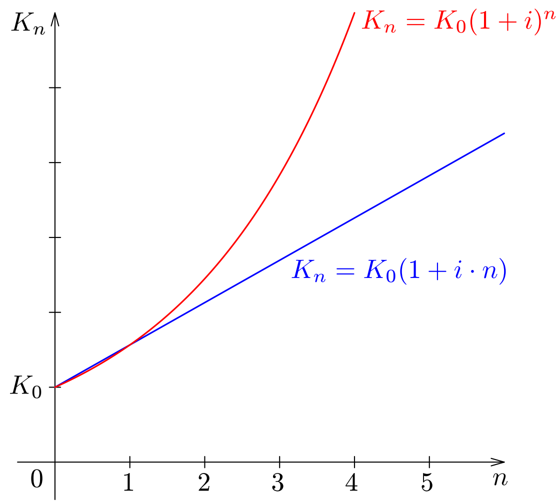
Ž: *…priamka.*

U: Presnejšie povedané polpriamka, nakoľko nemá zmysel uvažovať o zápornom čase. Pri zloženom úrokovaní je to tak, že úrok sa pripíše ku kapitálu a v ďalšom roku sa už úrok počíta z tejto novej hodnoty kapitálu. Pre výpočet budúcej hodnoty kapitálu K_n po n rokoch možno odvodiť vzťah

$$K_n = K_0\,(1 + i)^n.$$

Ž: *Teraz je premenná n v exponente mocniny, preto by to mala byť exponenciálna funkcia.*

U: Opäť máš pravdu, jej graf bude časť exponenciálnej krivky. Na nasledujúcom obrázku máme grafy oboch funkcií.



Ž: *Oba grafy sa pretínajú dvakrát?*

U: Áno. Oba grafy začínajú v bode $[0; K_0]$, pretože v čase 0 je hodnota začiatočného kapitálu K_0. Po roku, teda pre $n = 1$ však výpočtom dostaneme pri jednoduchom úrokovaní

$$K_1 = K_0\,(1 + i \cdot 1) = K_0\,(1 + i)\,.$$

Pri zloženom úrokovaní vychádza

$$K_1 = K_0\,(1 + i)^1 = K_0\,(1 + i)\,.$$

Ž: *Vyšla tá istá hodnota, teda oba grafy prechádzajú bodom* $[1; K_1]$.

U: Našou úlohou je teraz porovnať výhodnosť oboch typov úrokovaní.

Ž: *Z obrázka vidno, že pri období kratšom ako jeden rok je výhodnejšie jednoduché úrokovanie. Tam totiž lineárna funkcia nadobúda trochu väčšie hodnoty ako exponenciálna. Ale pri období dlhšom ako jeden rok je to už naopak, výhodnejšie je zložené úrokovanie. Keďže exponenciálna krivka prudko rastie, tak pre väčšie n je tento rozdiel oveľa výraznejší.*

U: Pravdivosť tvojich slov overíme na poslednej časti úlohy, pri konkrétnych výpočtoch.

Ž: *Mám porovnať nárast sumy* 100 000 € *pri jednoduchom a zloženom úrokovaní, čiže* $K_0 = 100\,000$. *Ročná úroková miera je 1%, teda* $i = 1$*?*

U: Nie, písmenom i sme označili úrokovú sadzbu a tá sa vyjadruje desatinným číslom, je to stotina úrokovej miery.

Ž: *Takže* $i = 0{,}01$. *Mám vypočítať budúcu hodnotu kapitálu* K_n. *Pritom uvažujem o období* 6 *rokov, čiže* $n = 6$. *Môžem dosadzovať, pre jednoduché úrokovanie dostanem*

$$K_6 = 100\,000\,(1 + 0{,}01 \cdot 6) = 106\,000.$$

Pre zložené úrokovanie

$$K_6 = 100\,000\,(1 + 0{,}01)^6 \doteq 106\,152.$$

U: Zložené úrokovanie je výhodnejšie, aj keď rozdiel nie je veľmi veľký.

Ž: *Skúsim situáciu po* 66 *rokoch. Pri jednoduchom úrokovaní budeme mať*

$$K_{66} = 100\,000\,(1 + 0{,}01 \cdot 66) = 166\,000.$$

Pri zloženom úrokovaní náš kapitál vzrastie na hodnotu

$$K_{66} = 100\,000\,(1 + 0{,}01)^{66} \doteq 192\,846.$$

Tu už je rozdiel medzi jednoduchým a zloženým úrokovaním dosť veľký.

Príklad 5: *Pri riešení nasledujúcich úloh využite monotónnosť exponenciálnej funkcie:*
a) Aký je vzťah medzi číslami m, n, ak platí $\left(\frac{3}{7}\right)^m < \left(\frac{3}{7}\right)^n$?
b) Pre ktoré kladné reálne čísla a platí $a^{\frac{3}{4}} < a^{\frac{5}{3}}$?
c) Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré platí $0{,}3^x > 1$.

Ž: *Exponenciálna funkcia je taká funkcia, ktorá má neznámu v exponente. Jej rovnica je*

$$f : y = a^x.$$

U: Pre základ mocniny však platia určité obmedzenia.

Ž: *Musí to byť kladné číslo rôzne od jednej.*

U: Dobre. Čo vieš povedať o monotónnosti exponenciálnej funkcie?

Ž: *Tá závisí od základu. Ak je $a > 1$, tak je funkcia rastúca. Ale ak je $a \in (0; 1)$, tak je klesajúca.*

U: Práve túto informáciu treba využiť pri riešení úlohy. Môžeš začať.

Ž: *V prvej časti mám určiť, aký je vzťah medzi číslami m, n, ak platí*

$$\left(\frac{3}{7}\right)^m < \left(\frac{3}{7}\right)^n.$$

Mám si zobrať na pomoc nejakú exponenciálnu funkciu?

U: Samozrejme. Pracuješ s mocninami so základom $\frac{3}{7}$, preto uvažuj o funkcii

$$y = \left(\frac{3}{7}\right)^x.$$

Aká je to funkcia z hľadiska monotónnosti?

Ž: *Keďže jej základ je $\frac{3}{7}$, čo je číslo kladné, ale menšie než 1, tak je klesajúca.*

U: Teraz si pripomeňme, čo to vlastne znamená. Funkcia f sa nazýva klesajúca práve vtedy, keď pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ platí: ak $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) > f(x_2)$. V našom prípade medzi hodnotami funkcie platí vzťah

$$\left(\frac{3}{7}\right)^m < \left(\frac{3}{7}\right)^n.$$

Ž: *Potom však medzi exponentami musí platiť opačná nerovnosť, teda*

$$m > n.$$

U: Veľmi dobre. V druhej časti máš určiť, pre ktoré kladné reálne čísla a platí

$$a^{\frac{3}{4}} < a^{\frac{5}{3}}.$$

Ž: *Začnem porovnaním exponentov. $\frac{3}{4}$ je menej ako 1, ale $\frac{5}{3}$ je viac ako 1. Preto $\frac{3}{4} < \frac{5}{3}$.*

U: Vieme, že každá exponenciálna funkcia je buď rastúca alebo klesajúca. Aká je v tomto prípade?

Ž: *Keďže* $\frac{3}{4} < \frac{5}{3}$ *a zároveň* $a^{\frac{3}{4}} < a^{\frac{5}{3}}$*, tak funkcia* $y = a^x$ *je rastúca. Z toho potom vyplýva, že jej základ musí byť väčší ako jedna, čiže*

$$a > 1.$$

U: Výborne.

Ž: *Ostala mi posledná časť. Mám určiť všetky reálne čísla* x*, pre ktoré platí*

$$0{,}3^x > 1.$$

Zrejme to bude súvisieť s exponenciálnou funkciou $y = 0{,}3^x$*. Je to klesajúca funkcia, pretože* $0{,}3 \in (0; 1)$.

U: Ďalej môžeš využiť fakt, že každá exponenciálna funkcia nadobúda hodnotu 1 v bode nula. Preto vzťah $0{,}3^x > 1$ môžeme prepísať do tvaru

$$0{,}3^x > 0{,}3^0.$$

Ž: *Keďže naša funkcia je klesajúca, tak pre exponenty musí platiť nerovnosť* $x < 0$*. Preto riešením sú všetky*

$$x \in (-\infty; 0).$$

Úloha 5: *Určte, pre ktoré kladné reálne čísla* b *platí:*
a) $b^{\frac{2}{3}} < b^{\frac{5}{4}}$; *b)* $b^{-\frac{3}{4}} > b^{\frac{6}{5}}$.

Výsledok: a) $b > 1$; b) $b \in (0; 1)$