Vzájomná poloha priamky a kužeľosečky

RNDr. Viera Vodičková

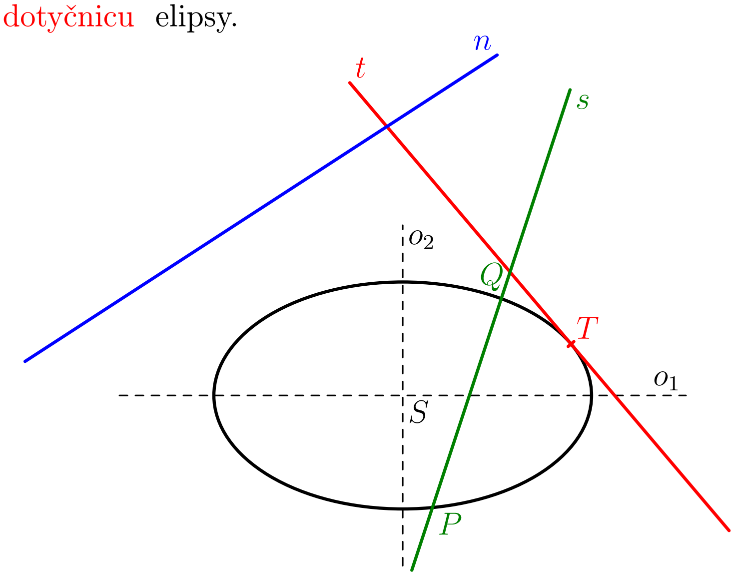
U: Aké kužeľosečky poznáš?

Ž: *Kužeľosečky – to je napr. kružnica, elipsa, parabola alebo hyperbola.*

U: Áno. Budeme sa zaoberať vzájomnou polohou priamky a elipsy, hyperboly alebo paraboly. Začneme ***s priamkou a elipsou***.

Ž: *Vzájomná poloha priamky a elipsy... Elipsa je „sploštená kružnica", tak by to malo byť také isté ako pri kružnici a priamke. Podľa mňa priamka môže byť sečnicou, nesečnicou alebo dotyčnicou elipsy.*

U: Súhlasím. Na nasledujúcom obrázku máš vyznačenú elipsu a tri priamky: s – sečnicu, n – nesečnicu a t – dotyčnicu elipsy.



Ž: *Je to jasné. Priamka buď pretína elipsu v dvoch bodoch, alebo sa jej dotýka v jednom bode, alebo ju nepretína.*

U: Už to len presnejšie sformulujem. Vzájomná poloha priamky a elipsy závisí od počtu spoločných bodov.

- Ak má priamka a elipsa ***práve dva*** spoločné body, hovoríme, že priamka je ***sečnicou*** elipsy.
- Ak priamka ***nemá*** s elipsou spoločné body, hovoríme, že priamka je ***nesečnicou*** elipsy.
- Ak má priamka a elipsa ***práve jeden*** spoločný bod, hovoríme, že priamka je ***dotyčnicou*** elipsy.

Ž: *Z obrázka je všetko jasné. Ako ale vyriešime vzájomnú polohu priamky a elipsy analyticky?*

U: Elipsu aj priamku máme danú rovnicou. Nájsť prienik priamky a elipsy znamená hľadať všetky body, ktorých súradnice vyhovujú aj rovnici elipsy aj rovnici priamky.

Ž: *Stačí vyriešiť sústavu rovníc.*

U: Áno. Ako bude sústava rovníc vyzerať, závisí od toho, akým spôsobom bude vyjadrená elipsa a priamka.

Ž: *Elipsu vieme vyjadriť stredovým tvarom:*

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1,$$

pričom m, n sú súradnice stredu elipsy a a, b sú veľkosti jej polosí.

U: A ako môžeme vyjadriť priamku v rovine?

Ž: *Myslím, že parametricky alebo všeobecnou rovnicou.*

U: Ak je priamka daná parametricky, pri hľadaní prieniku dostávame túto sústavu:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A ak je priamka daná všeobecnou rovnicou máme zase túto sústavu:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

$$ax+by+c=0.$$

Ž: *V každom prípade to však bude sústava kvadratickej a lineárnej rovnice alebo sústava kvadratickej a lineárnych rovníc.*

U: Riešiť ju budeme dosadzovacou metódou a získame kvadratickú rovnicu.

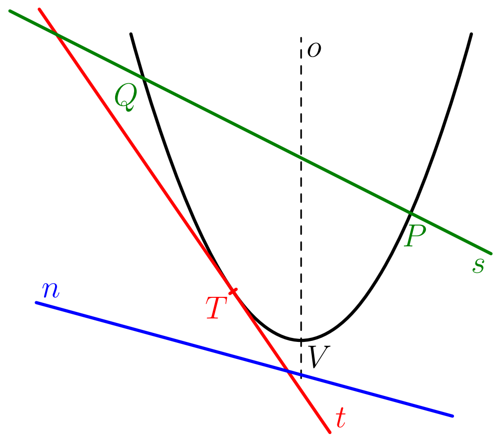
Ž: *Tá môže mať nula, jedno alebo dve riešenia.*

U: Správne. A v závislosti od toho určíme vzájomnú polohu. Ak vzniknutá kvadratická rovnica nebude mať riešenie, priamka je nesečnicou. Ak bude mať práve jedno riešenie, je to dotyčnica.

Ž: *A ak bude mať práve dve riešenia, priamka je sečnicou elipsy. Rozumiem.*

U: Ako to bude so ***vzájomnou polohou paraboly a priamky***?

Ž: *Asi tak isto. Priamka môže parabolu pretať v dvoch bodoch, nepretať vôbec, alebo môže byť dotyčnicou. Skúsim to nakresliť aj na obrázok.*

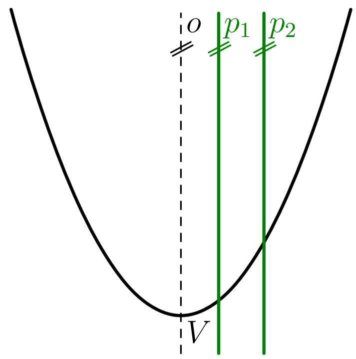


U: Výborne. Máme tam sečnicu, nesečnicu a dotyčnicu. No ostáva nám ešte jeden prípad. Zoberme si napr. vzájomnú polohu paraboly a jej osi o.

Ž: *Os paraboly ju pretína len v jednom bode, vo vrchole. Ale dotyčnica to predsa nie je! Aj keď majú spoločný len jeden bod.*

U: Presne tak. Ak prienikom priamky a paraboly je práve jeden bod, ešte to nemusí byť dotyčnica.

Ž: *Hm… viem nakresliť aj ďalšie priamky, ktoré majú s parabolou spoločný len jeden bod a nie sú to dotyčnice. Tu sú na obrázku.*



Nemajú šancu sa pretnúť s druhou stranou paraboly. Sú to rovnobežky s jej osou.

U: Správne. Zhrnieme to. Vzájomná poloha priamky a paraboly závisí od počtu spoločných bodov a od vzájomnej polohy priamky a osi paraboly.

- Ak má priamka a parabola ***práve dva*** spoločné body, hovoríme, že priamka je ***sečnicou*** paraboly.
- Ak priamka ***nemá*** s parabolou spoločné body, hovoríme, že priamka je ***nesečnicou*** paraboly.
- Ak má priamka a parabola ***práve jeden*** spoločný bod a zároveň priamka je ***rôznobežná s osou paraboly***, hovoríme, že priamka je ***dotyčnicou*** paraboly.
- Ak má priamka a parabola ***práve jeden*** spoločný bod a zároveň priamka je ***rovnobežná s osou paraboly***, hovoríme, že priamka je ***sečnicou*** paraboly.

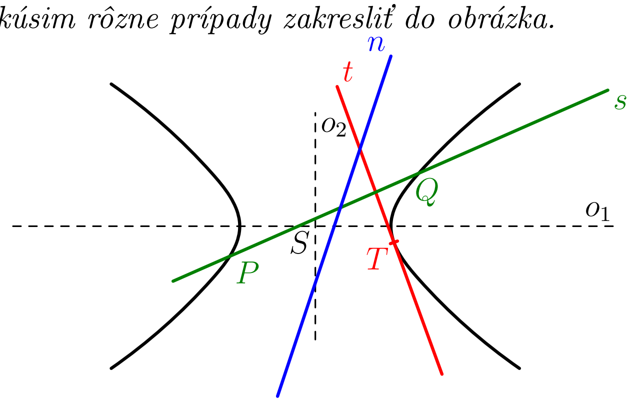
Ž: *Určiť vzájomnú polohu priamky a paraboly analyticky znamená opäť len riešiť sústavu rovníc. Akurát, ak dostaneme len jedno riešenie, musíme sa pozrieť, či priamka nie je náhodou rovnobežná s osou paraboly.*

U: Nakoľko sme sa zaoberali len s parabolami, ktorých os je rovnobežná s niektorou osou sústavy súradníc, zistiť prípadnú rovnobežnosť bude jednoduché.

Ž: *Áno, ak mi vo všeobecnej rovnici priamky bude chýbať x alebo y, viem, že ide o priamku rovnobežnú buď s osou y alebo s osou x sústavy súradníc.*

U: Ostáva nám ***vzájomná poloha hyperboly a priamky***.

Ž: *Bude to podobné. Skúsim rôzne prípady zakresliť do obrázka.*

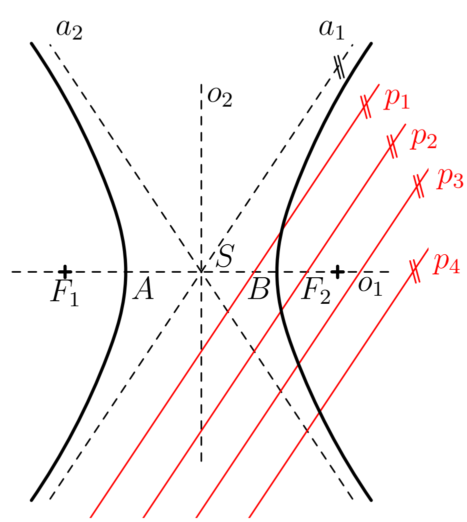


Sečnica s pretína hyperbolu v dvoch bodoch P a Q, nesečnica n ju nepretína vôbec. A dotyčnica t sa hyperboly dotýka, pretína ju práve v jednom bode T.

U: S tým zatiaľ súhlasím. Do týchto kategórií sa však nedajú zaradiť všetky priamky.

Ž: *Hm... ešte sú tu asymptoty.*

U: Áno. Ide o asymptoty a o všetky priamky patriace do smerov hyperboly. Pripomeniem, že smery hyperboly sú také smery, ktorých každá priamka má s hyperbolou najviac jeden spoločný bod. Priamky týchto smerov, ktoré neobsahujú ani jeden bod hyperboly nazývame ***asymptoty hyperboly***.



Ž: *Aha! Asymptota hyperbolu nepretína, tak to bude nesečnica. A ostatné rovnobežky s asymptotou budú sečnice, aj keď pretínajú hyperbolu len raz.*

U: Zhrnieme to. Vzájomná poloha priamky a hyperboly závisí od počtu spoločných bodov a od vzájomnej polohy priamky a asymptot hyperboly.

- Ak má priamka a hyperbola ***práve dva*** spoločné body, hovoríme, že priamka je ***sečnicou*** hyperboly.
- Ak priamka ***nemá*** s hyperbolou spoločné body, hovoríme, že priamka je ***nesečnicou*** hyperboly. Môže to byť aj asymptota.
- Ak má priamka a hyperbola ***práve jeden*** spoločný bod a zároveň priamka nepatrí do smeru hyperboly, hovoríme, že priamka je ***dotyčnicou*** hyperboly.
- Ak má priamka a hyperbola ***práve jeden*** spoločný bod a zároveň priamka ***patrí do smeru hyperboly***, hovoríme, že priamka je ***sečnicou*** hyperboly.

Ž: *Vzájomnú polohu priamky a hyperboly určím opäť riešením sústavy rovníc. Zároveň si musím dať pozor, či to nebude priamka rovnobežná s asymptotou, teda patriaca do smeru hyperboly.*

U: Nakoniec sa pristavíme pri dotyčniciach kužeľosečiek.

Ž: *Tie musia byť vždy výnimočné!*

U: Najprv ich skúsime definovať.

Ž: *To je ľahké! Dotyčnica je taká priamka, ktorá má s danou kužeľosečkou spoločný práve jeden bod.*

U: A to práve nie je pravda. Spomeň si na parabolu a hyperbolu.

Ž: *Aha! Napr. pri parabole musíme vylúčiť priamky rovnobežné s jej osou. A pri hyperbole zase priamky patriace do smerov hyperboly.*

U: Zavedieme si pojmy ***vnútro*** a vonkajšok kužeľosečky.

Ž: *To je snáď jasné, čo je vonku a čo vo vnútri!*

U: Kužeľosečka rozdelí rovinu na tri oblasti. Jednu tvoria tie body, ktoré ležia na kužeľosečke, druhá oblasť vnútro je tá časť roviny, kde ležia ohniská, prípadne ohnisko a tretia vonkajšok je zvyšná časť roviny.

Ž: *Podľa toho má hyperbola dve vnútra?*

U: Áno. Vnútro hyperboly tvoria dve navzájom disjuktné množiny.

Ž: *Disjuktné... aha! Nemajú prienik.*

U: Dotyčnicou kužeľosečky nazývame priamku, ktorá má s kužeľosečkou spoločný práve jeden bod a zároveň neobsahuje žiaden bod vnútra kužeľosečky.

Ž: *Tomu rozumiem.*

U: Analytické vyjadrenie dotyčnice kužeľosečky súvisí s jej stredovou, prípadne vrcholovou rovnicou. Nech dotykový bod je bod $T[x_0; y_0]$. Potom:

- Ak má elipsa rovnicu:
$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$$
jej dotyčnica v bode $T[x_0; y_0]$ je vyjadrená rovnicou:
$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1.$$

- Ak má hyperbola rovnicu:
$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$$
jej dotyčnica v bode $T[x_0; y_0]$ je vyjadrená rovnicou:
$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1.$$

- Ak má parabola rovnicu:
$$(x-m)^2 = 2p(y-n),$$
jej dotyčnica v bode $T[x_0; y_0]$ je vyjadrená rovnicou:
$$(x-m)(x_0-m) = 2p[(y-n) + (y_0-n)].$$

Príklad 1: *Určte prienik paraboly $(x+1)^2 = 4(y-2)$ a polpriamky $\overrightarrow{AB}$, ak $A[2;5]$ a $B[5;8]$.*

Ž: *Budem potrebovať rovnicu polpriamky $\overrightarrow{AB}$. Ide o polpriamku, preto využijem parametrické vyjadrenie.*

U: Súhlasím. Začnime smerovým vektorom.

Ž: *Smerovým vektorom polpriamky $\overrightarrow{AB}$ je vektor $\vec{u} = B - A$. Jeho súradnice určím tak, že od súradníc bodu B odčítam súradnice bodu A, preto:*

$$\vec{u} = B - A = (3;3).$$

U: Dobre. Aké parametrické vyjadrenie má polpriamka $\overrightarrow{AB}$?

Ž: *Parametrické vyjadrenie polpriamky $\overrightarrow{AB}$ je:*

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t \\ y &= 5 + 3t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Použil som bod A a vektor $\vec{u}$.

U: To je v poriadku, avšak nesúhlasím s výberom parametra.

Ž: *Aha! Zabudol som. Ide o polpriamku, preto parameter t nadobúda len nezáporné hodnoty. Teda:*

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t \\ y &= 5 + 3t, \qquad t \in \langle 0; \infty). \end{aligned}$$

U: Ako zistíme vzájomnú polohu, teda prienik paraboly a polpriamky?

Ž: *Nemám asi šancu to presne narysovať, tak mi ostáva len riešiť sústavu rovníc.*

U: Áno. Sústava rovníc pozostáva z rovnice ***paraboly*** a z parametrických rovníc polpriamky:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= 4(y-2) \\ x &= 2 + 3t \\ y &= 5 + 3t. \end{aligned}$$

Riešiť túto sústavu znamená dosadiť vyjadrenia pre x a y z parametrických rovníc do rovnice paraboly.

Ž: *Modré vyjadrenia dosadzujem do červenej rovnice. Dostávam:*

$$(2 + 3t + 1)^2 = 4(5 + 3t - 2).$$

U: Je to rovnica s jednou neznámou t. Vyriešme ju.

Ž: *Upravím najprv vnútra zátvoriek:*

$$(3t+3)^2 = 4(3t+3).$$

Ľavú stranu umocním a pravú roznásobím:

$$9t^2 + 18t + 9 = 12t + 12.$$

Vyzerá to na kvadratickú rovnicu:

$$9t^2 + 6t - 3 = 0.$$

U: Vykrátime ju ešte číslom 3:

$$3t^2 + 2t - 1 = 0.$$

Ž: *Vyriešim ju pomocou diskriminantu. Diskriminant*

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16.$$

Korene sú:

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 4}{6}.$$

Dostávam dve riešenia:

$$t_1 = \frac{1}{3} \quad a \quad t_2 = -1.$$

U: Aká je teda vzájomná poloha paraboly a polpriamky?

Ž: *Dve riešenia – je to sečnica.*

U: Pozor! Nezabudol si, že je to polpriamka $\overrightarrow{AB}$ a nie priamka?

Ž: *Naozaj! Zase som na to zabudol. Parameter t je nezáporné číslo, preto máme len jedno riešenie $t_1 = \frac{1}{3}$. Ale aj tak je polpriamka $\overrightarrow{AB}$ sečnicou paraboly.*

U: Súhlasím, ale pretína ju len v jednom bode. Určme jeho súradnice.

Ž: *Dosadím $t = \frac{1}{3}$ do parametrických rovníc polpriamky $\overrightarrow{AB}$ a dostávam:*

$$x = 2 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 3$$
$$y = 5 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 6.$$

Prienikom polpriamky $\overrightarrow{AB}$ a paraboly je bod $P[3; 6]$.

Úloha 1: *Určte prienik kužeľosečky: $\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-4)^2}{8} = 1$ a polpriamky $\overrightarrow{KL}$, ak $K[3; 0]$ a $L[0; 10]$.*

Výsledok: prienikom hyperboly a polpriamky $\overrightarrow{KL}$ je prázdna množina

Príklad 2: *Vyšetrite vzájomnú polohu priamku* $p: 3x - y - 5 = 0$ *a kužeľosečky* $2x^2 - y^2 - 2x - 5 = 0$.

U: Tak najprv: O akú kužeľosečku ide?

Ž: *Obidve neznáme sú v druhej mocnine, parabola to nebude... Pri* y *je znamienko mínus, je to hyperbola.*

U: Dobre. Ako zistíme vzájomnú polohu priamky a hyperboly?

Ž: *Budem riešiť sústavu rovníc hyperboly a priamky. Tým nájdem ich spoločné body a podľa nich určím vzájomnú polohu.*

U: Povedzme... Tak začni.

Ž: *Sústava rovníc priamky a hyperboly vyzerá takto:*

$$\begin{aligned} 3x - y - 5 &= 0 \\ 2x^2 - y^2 - 2x - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Nemám najprv upraviť všeobecnú rovnicu hyperboly na stredový tvar?

U: Zatiaľ to nie je potrebné. Máme sústavu lineárnej a kvadratickej rovnice. Budeme ju riešiť dosadzovacou metódou.

Ž: *Z prvej, lineárnej rovnice, si vyjadrím jednu neznámu, hodí sa* y*:*

$$y = 3x - 5.$$

Dosadím do druhej, kvadratickej rovnice:

$$2x^2 - (3x - 5)^2 - 2x - 5 = 0.$$

Upravím, umocním zátvorku:

$$2x^2 - (9x^2 - 30x + 25) - 2x - 5 = 0.$$

Sčítam, čo sa dá a dostávam kvadratickú rovnicu:

$$-7x^2 + 28x - 30 = 0.$$

Vyriešim ju pomocou diskriminantu. Teda:

$$D = 28^2 - 4 \cdot (-7) \cdot (-30) = 784 - 840 = -56.$$

Diskriminant je záporný, rovnica nemá riešenie! To znamená, že hyperbola a priamka nemajú spoločné body, priamka je nesečnicou hyperboly.

U: So všetkým súhlasím. Mám len jednu otázku: Nemôže byť priamka p asymptotou hyperboly?

Ž: *A to som si myslel, že už mám úlohu vyriešenú! Máte na mysli to, že ani asymptota hyperboly nemá s ňou spoločný bod. Čo ak je to práve tento prípad?!*

U: Presne tak.

Ž: *Neostáva mi nič iné, ako nájsť rovnice asymptot.*

U: Pripomeniem, že asymptoty hyperboly

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

majú tvar:

$$a_1:(y-n)=\frac{b}{a}(x-m),$$

$$a_2:(y-n)=-\frac{b}{a}(x-m).$$

Ž: *Predsa len budem musieť upraviť rovnicu hyperboly na stredový tvar.*

U: Súhlasím. Potrebujeme poznať súradnice stredu a veľkosti jej polosí.

Ž: *Upravím všeobecnú rovnicu hyperboly*

$$2x^2-y^2-2x-5=0$$

na stredový tvar. Dám si najprv dohromady členy s x a členy s y. Takže:

$$(2x^2-2x)-y^2-5=0.$$

Hurá! S y^2 nemusím nič robiť! Upravím len členy s x. Vyberiem 2 pred zátvorku:

$$2(x^2-x)-y^2-5=0$$

a zátvorku upravím na štvorec:

$$2\left[\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\right]-y^2-5=0.$$

U: Výborne. Prvá zátvorka nám dáva $(x-\frac{1}{2})^2$.

Ž: *Áno. Máme:*

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{11}{2}.$$

U: Dobre. Na pravej strane vyrobíme jednotku a to tak, že obe strany rovnice vydelíme číslom $\frac{11}{2}$.

Ž: *Dostávame:*

$$\frac{4(x-\frac{1}{2})^2}{11}-\frac{2y^2}{11}=1.$$

U: Aby sme z tejto rovnice ľahko prečítali veľkosti polosí hyperboly, upravíme ju na takýto tvar:

$$\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{11}{4}}-\frac{y^2}{\frac{11}{2}}=1.$$

U: Aké sú súradnice stredu hyperboly a veľkosti jej polosí?

Ž: *Stred hyperboly je bod* $S[\frac{1}{2}; 0]$. *Veľkosť hlavnej polosi* $a = \frac{\sqrt{11}}{2}$ *a veľkosť vedľajšej polosi* $b = \frac{\sqrt{22}}{2}$.

U: Rovnice asymptot sú:

$$a_1 : (y - n) = \frac{b}{a}(x - m),$$

$$a_2 : (y - n) = -\frac{b}{a}(x - m).$$

Ž: *V našom prípade majú tvar:*

$$a_1 : y = \frac{\frac{\sqrt{22}}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}(x - \frac{1}{2}),$$

$$a_1 : y = -\frac{\frac{\sqrt{22}}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}(x - \frac{1}{2}).$$

U: Upravme napr. rovnicu prvej asymptoty.

Ž: *Dobre. Dostávam:*

$$y = \sqrt{2}(x - \frac{1}{2}),$$

čo môžem upraviť ako:

$$\sqrt{2}x - y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

U: Priamka p má rovnicu:

$$3x - y - 5 = 0.$$

Je zrejmé, že to nie je asymptota.

Ž: *Priamka* p *je nesečnicou hyperboly, pričom je rôzna od jej asymptot.*

Úloha 1: *Vyšetrite vzájomnú polohu priamku* $p : x - y - 1 = 0$ *a kužeľosečky* $y^2 - 2x + 3 = 0$.

Výsledok: priamka p je dotyčnicou paraboly, $T[2; 1]$

Príklad 3: *Určte rovnicu dotyčnice paraboly $y^2 = 18x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: 3x - 4y + 69 = 0$.*

Ž: *Na určenie rovnice dotyčnice paraboly v danom bode máme vzorec.*

U: Myslím, že ho nebudeme potrebovať. Naviac nemáme daný dotykový bod. Najprv si uvedomíme informáciu, že dotyčnica, teda priamka, je rovnobežná s priamkou p. Čo platí pre rovnobežné priamky?

Ž: *Rovnobežné priamky sa nikdy nepretnú.*

U: Aj tak sa to dá povedať. Nás však bude viac zaujímať, čo platí pre rovnice rovnobežných priamok. Priamka p je daná všeobecnou rovnicou. Z nej vieme určiť normálovový vektor priamky p. Aký normálový vektor má dotyčnica?

Ž: *Jáj! Už viem, čo chcete vedieť. Rovnobežné priamky môžu mať ten istý normálový vektor. Alebo jeho násobok.*

U: Presne tak. Preto normálový vektor priamky p je aj normálovým vektorom dotyčnice.

Ž: *Normálový vektor priamky p ľahko vyčítam z jej rovnice, teda*

$$\vec{n} = (3; -4).$$

U: Rovnica dotyčnice má preto tvar:

$$3x - 4y + c = 0.$$

Ž: *Mojou úlohou bude nájsť koeficient c.*

U: Áno. Akú vlastnosť má dotyčnica paraboly?

Ž: *Dotyčnica paraboly má s ňou spoločný práve jeden bod. A nesmie to byť priamka rovnobežná s osou paraboly.*

U: Dobre.

U: Podmienku o osi vyriešime hneď. S ktorou osou sústavy súradníc je rovnobežná os našej paraboly?

Ž: *Parabola má rovnicu $y^2 = 18x$, v druhej mocnine je y. Os paraboly je rovnobežná s osou x.*

U: Súhlasím. Je zrejmé, že priamka s normálovým vektorom $\vec{n} = (3; -4)$ nie je rovnobežná s osou x.

Ž: *To áno.*

U: Povedal si, dotyčnica paraboly je priamka, ktorá má s ňou spoločný práve jeden bod. Ako nájdeme spoločné body paraboly a priamky?

Ž: *Vytvoríme si sústavu z rovníc paraboly a priamky a riešime ju...*

U: Výborne. V našom prípade sústava vyzerá takto:

$$\begin{aligned} y^2 &= 18x \\ 3x - 4y + c &= 0. \end{aligned}$$

Ž: *Ale to je sústava s parametrom c!*

U: Súhlasím. Nesmieme však zabudnúť, že chceme, aby sústava mala práve jedno riešenie.

Ž: *Skúsim ju vyriešiť dosadzovacou metódou. Z druhej, lineárnej rovnice si vyjadrím jednu neznámu, napr. x:*

$$x = \frac{4y - c}{3}.$$

Dosadím do prvej, kvadratickej rovnice:

$$y^2 = 18 \cdot \frac{4y - c}{3}.$$

Upravím:

$$y^2 = 24y - 6c.$$

Dostávam kvadratickú rovnicu s parametrom c:

$$y^2 - 24y + 6c = 0.$$

U: Správne. Chceme, aby kvadratická rovnica mala práve jedno riešenie. Od čoho závisí počet riešení kvadratickej rovnice?

Ž: *Od diskriminantu. Práve jedno riešenie – diskriminant musí byť rovný nule. Vyjadrím si diskriminant:*

$$D = (-24)^2 - 4 \cdot 6c = 576 - 24c.$$

U: Diskriminant má byť rovný nule, preto dostávame rovnicu:

$$576 - 24c = 0.$$

Ž: *Tá je ľahká. Platí:*

$$c = 24.$$

U: Súhlasím. Všeobecná rovnica dotyčnice paraboly, ktorá je rovnobežná s priamkou p má tvar

$$3x - 4y + 24 = 0.$$

Príklad 4: *Určte rovnice všetkých dotyčníc k elipse $5x^2 + 9y^2 = 45$ z bodu $P[0; -3]$.*

Ž: *Rovnicu dotyčnice ku elipse viem vyjadriť pomocou vzorca. A to takto: Ak má elipsa rovnicu:*

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$$

jej dotyčnica v bode $T[x_0; y_0]$ je vyjadrená rovnicou:

$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1.$$

U: Dobre. Ako to bude v našom prípade?

Ž: *Elipsa má rovnicu:*

$$5x^2 + 9y^2 = 45,$$

preto jej dotyčnica v bode $T[x_0; y_0]$ má rovnicu:

$$5x \cdot x_0 + 9y \cdot y_0 = 45.$$

Jednoducho kvadratický člen $x \cdot x$ nahradím členom $x \cdot x_0$. A to isté urobím aj s y.

U: Súhlasím. Nepoznáme však súradnice dotykového bodu $T[x_0; y_0]$.

Ž: *Hm...*

U: Kde leží dotykový bod T?

Ž: *Na dotyčnici... ale aj na elipse. Jasné! Jeho súradnice musia vyhovovať rovnici elipsy. Preto platí:*

$$5x_0^2 + 9y_0^2 = 45.$$

U: Výborne. Zo zadania vieme, že dotyčnica prechádza bodom $P[0; -3]$.

Ž: *Aha! Jeho súradnice zase dosadím do rovnice dotyčnice $5x \cdot x_0 + 9y \cdot y_0 = 45$:*

$$5 \cdot 0 \cdot x_0 + 9 \cdot (-3) \cdot y_0 = 45.$$

U: Z červenej a modrej rovnice získame sústavu rovníc s dvoma neznámymi x_0, y_0:

$$\begin{aligned} 5x_0^2 + 9y_0^2 &= 45 \\ 5 \cdot 0 \cdot x_0 + 9 \cdot (-3) \cdot y_0 &= 45. \end{aligned}$$

Je to sústava kvadratickej a lineárnej rovnice. Riešiť ju budeme dosadzovacou metódou. Z lineárnej rovnice si vyjadríme jednu neznámu a dosadíme do kvadratickej.

Ž: *Lineárna - to je modrá rovnica. Upravím ju a dostávam:*

$$-27y_0 = 45.$$

Z čoho mám rovno vyjadrenú jednu neznámu

$$y_0 = -\frac{5}{3}.$$

Dosadím do červenej rovnice:

$$5x_0^2 + 9\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = 45.$$

Upravím zátvorku:

$$5x_0^2 + 25 = 45.$$

Už to vyzerá ľahko. Takže:

$$5x_0^2 = 20,$$

z čoho

$$x_0 = 2.$$

U: Pozor, neunáhli sa. Čo myslíš, koľko existuje dotyčníc z bodu P ku elipse?

Ž: *Jedna. Alebo... moment! Môžu byť aj dve.*

U: Áno. A ty si práve jedno riešenie stratil! Kvadratická rovnica $x_0^2 = 4$ má predsa dve riešenia!

Ž: *Zabudol som. Riešenia sú naozaj dve*

$$x_{0_1} = 2 \quad a \quad x_{0_2} = -2.$$

U: Ostáva napísať už len rovnice dotyčníc.

Ž: *Začnem s dotykovým bodom $T_1[2; -\frac{5}{3}]$. Dosadím jeho súradnice za x_0 a y_0 do rovnice dotyčnice:*

$$5x \cdot 2 + 9y \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = 45.$$

Po úprave mám:

$$t_1 : 2x - 3y - 9 = 0.$$

Pre druhý dotykový bod $T_2[-2; -\frac{5}{3}]$ platí:

$$5x \cdot (-2) + 9y \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = 45.$$

Čo je po úprave:

$$t_2 : 2x + 3y + 9 = 0.$$

U: Ponúknem ti ešte iný spôsob riešenia tejto úlohy.

Ž: *Bude ľahší? Alebo kratší?*

U: Možno ani jedno ani druhé. Len iný postup. Netreba si pamätať tvar rovnice dotyčnice ku elipse. Použijeme smernicový tvar rovnice dotyčnice.

Ž: *Myslíte* $y = kx + q$*?*

U: Presne ten. Nedá sa, samozrejme, použiť v prípade, ak by dotyčnica bola rovnobežná s osou y. Nech teda dotyčnica má rovnicu

$$y = kx + q.$$

Prechádza bodom $P[0; -3]$.

Ž: *To znamená, že jeho súradnice dosadím do rovnice dotyčnice a mám:*

$$-3 = k \cdot 0 + q.$$

Z toho $q = -3$.

U: Súhlasím. Dotyčnica má preto rovnicu

$$y = kx - 3.$$

Teraz využijeme to, že prienikom dotyčnice a elipsy je práve jeden bod. Znamená to, že sústava rovníc dotyčnice a elipsy

$$\begin{aligned} 5x^2 + 9y^2 &= 45 \\ y &= kx - 3 \end{aligned}$$

má práve jedno riešenie.

Ž: *Je to sústava s parametrom* k*. Vyriešim ju dosadzovacou metódou.* y *z druhej rovnice dosadím do prvej rovnice:*

$$5x^2 + 9(kx - 3)^2 = 45.$$

Upravím:

$$5x^2 + 9(k^2x^2 - 6kx + 9) = 45.$$

Roznásobím zátvorku:

$$5x^2 + 9k^2x^2 - 54kx + 81 = 45.$$

Dostávam kvadratickú rovnicu s parametrom k*:*

$$x^2(5 + 9k^2) - 54kx + 36 = 0.$$

U: Správne.

U: Chceme, aby kvadratická rovnica mala práve jedno riešenie. Od čoho závisí počet riešení kvadratickej rovnice?

Ž: *Od diskriminantu. Práve jedno riešenie – diskriminant musí byť rovný nule. Vyjadrím si diskriminant:*

$$D = (-54k)^2 - 4 \cdot (5 + 9k^2) \cdot 36 = 2916k^2 - 720 - 1296k^2 = 1620k^2 - 720.$$

U: Diskriminant má byť rovný nule, preto dostávame rovnicu:

$$1620k^2 - 720 = 0.$$

Ž: *To sú veľké čísla! Trochu ju vykrátim, najprv* 10 *a potom* 18. *Dostávam:*

$$9k^2 - 4 = 0.$$

To už vyzerá lepšie. Takže:

$$k = \pm\frac{2}{3}.$$

U: Súhlasím. Dotyčnice ku elipse majú rovnice:

$$t_1 : y = \frac{2}{3}x - 3 \quad \text{a} \quad t_2 : y = -\frac{2}{3}x - 3.$$

Ak tieto rovnice upravíme na všeobecný tvar, dostaneme to isté riešenie ako prvým postupom.

Úloha 1: *Určte rovnice všetkých dotyčníc k parabole $3y = (x+2)^2$, ktoré prechádzajú bodom $M[-5; 3]$.*

Výsledok: $2x + y + 7 = 0$

Úloha 2: *Určte rovnice všetkých dotyčníc k elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, ktoré zvierajú s kladnou časťou osi x uhol $45°$.*

Výsledok: $y = x + \sqrt{13}$, $y = x - \sqrt{13}$

Príklad 5: *Určte všetky hodnoty parametra $m \in \mathbb{R}$, pre ktoré priamka $p : x - y + m = 0$*

a) pretína,

b) dotýka sa,

c) nepretína

hyperbolu $4x^2 - 25y^2 = 100$.

Ž: *Mám určiť, či priamka p pretne, nepretne alebo sa dotkne hyperboly… Musím zistiť, koľko majú spoločných bodov.*

U: Výborne. Od počtu spoločných bodov závisí aj vzájomná poloha priamky a hyperboly. Ako budeš postupovať?

Ž: *Určiť spoločné body znamená vyriešiť sústavu rovníc. Tá pozostáva z rovnice priamky a z rovnice hyperboly. Koľko bude mať riešení, toľko bude aj spoločných bodov.*

U: Tak to aj urobíme. Akurát sústava bude s parametrom.

Ž: *Zostavím si spomenutú sústavu. Červenou vyznačím rovnicu hyperboly a modrou rovnicu priamky:*

$$4x^2 - 25y^2 = 100$$
$$x - y + m = 0.$$

U: Je to sústava kvadratickej a lineárnej rovnice. Riešiť ju budeme dosadzovacou metódou. Z lineárnej rovnice si vyjadríme jednu neznámu a dosadíme do kvadratickej.

Ž: *Lineárna - to je modrá rovnica. Vyjadrím si z nej napr. x:*

$$x = y - m$$

a dosadím ho do červenej rovnice:

$$4(y - m)^2 - 25y^2 = 100.$$

U: Odstránime zátvorky a dostaneme kvadratickú rovnicu.

Ž: *Zátvorku umocním podľa vzorca a mám:*

$$4(y^2 - 2ym + m^2) - 25y^2 = 100.$$

Ešte roznásobím štvorkou:

$$4y^2 - 8ym + 4m^2 - 25y^2 = 100$$

a niečo sčítam:

$$-21y^2 - 8my + 4m^2 - 100 = 0.$$

U: Dostali sme kvadratickú rovnicu s neznámou y a s parametrom m. Od čoho závisí počet koreňov kvadratickej rovnice?

Ž: *Od diskriminantu.*

U: Áno, máš pravdu. A to takto:

- Ak je hodnota diskriminantu D ***rovná*** nule, kvadratická rovnica má práve jedno riešenie a priamka je ***dotyčnicou*** hyperboly.
- Ak je hodnota diskriminantu D ***väčšia*** ako nula, kvadratická rovnica má práve dve riešenia a priamka je ***sečnicou*** hyperboly.
- Ak je hodnota diskriminantu D ***menšia*** ako nula, kvadratická rovnica nemá riešenie a priamka je ***nesečnicou*** hyperboly.

Ž: *Rozumiem. Vypočítam si najprv diskriminant kvadratickej rovnice. Diskriminant sa počíta podľa vzorca:*

$$D = B^2 - 4AC.$$

Pre našu rovnicu platí:

$$A = -21, \quad B = -8m, \quad C = 4m^2 - 100.$$

Preto:

$$D = (-8m)^2 - 4 \cdot (-21) \cdot (4m^2 - 100).$$

U: Súhlasím. Upravme tento výraz.

Ž: *Dostávam:*

$$D = 64m^2 + 84(4m^2 - 100) = \dots$$

U: Počkaj! Aby sme sa nedostali ku veľmi veľkým číslam, vyberieme, čo sa dá pred zátvorku, najprv zo zátvorky číslo 4 :

$$D = 64m^2 + 84 \cdot 4(m^2 - 25)$$

a teraz 16 môžeme vybrať pred celý výraz, takto:

$$D = 16[4m^2 + 21(m^2 - 25)].$$

Ž: *To boli šikovné úpravy, ja by som asi radšej násobil všetky veľké čísla, aj keď s kalkulačkou... Pokračujem vo vašich úpravách:*

$$D = 16[4m^2 + 21m^2 - 525]$$

a to je:

$$D = 16(25m^2 - 525)].$$

Zrejme vyberiem aj 25 *pred zátvorku:*

$$D = 16 \cdot 25(m^2 - 21).$$

U: V poriadku.

U: Začnime dotyčnicou hyperboly, teda úlohou b). Ak má byť priamka p dotyčnicou hyperboly, musí mať kvadratická rovnica práve jedno riešenie.

Ž: *Čiže diskriminant musí byť rovný nule. Platí:*

$$D = 16 \cdot 25(m^2 - 21) = 0.$$

Uf! Zase kvadratická rovnica. $16 \cdot 25$ *si nemusím všímať, takže mám:*

$$m^2 = 21.$$

Z toho

$$m = \pm\sqrt{21}.$$

U: Výborne. Pre hodnotu $m \in \{-\sqrt{21}; \sqrt{21}\}$ je priamka p dotyčnicou hyperboly. Kedy priamka pretína hyperbolu?

Ž: *Ak je priamka sečnicou, musí sa pretať s hyperbolou dvakrát. Preto kvadratická rovnica má mať práve dve riešenia. Pre jej diskriminant platí:*

$$D = 16 \cdot 25(m^2 - 21) > 0.$$

U: To znamená, že

$$m^2 > 21,$$

a teda

$$|m| > \sqrt{21}.$$

Ž: *Bude to pre* $m \in (-\infty; -\sqrt{21}) \cup (\sqrt{21}; \infty)$.

U: Správne. Ostala nám už len nesečnica.

Ž: *To už bude ľahké. Je to pre všetky zvyšné hodnoty. Priamka* p *je nesečnicou hyperboly pre* $m \in (-\sqrt{21}; \sqrt{21})$.

Úloha 1: *Daná je elipsa* $(x + 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 36$. *Určte všetky hodnoty parametra* $d \in \mathbb{R}$ *tak, aby priamka* $p : y + d = 0$ *bola dotyčnicou tejto elipsy.*

Výsledok: $d \in \{2; -4\}$

Príklad 6: *Určte vzájomnú polohu elipsy* $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{12}=1$ *a úsečky* KL*, ak* $K[2;-1]$ *a* $L[3;2]$.

Ž: *Budem potrebovať rovnicu úsečky* KL*. Využijem parametrické vyjadrenie.*

U: Súhlasím. Začnime smerovým vektorom.

Ž: *Smerovým vektorom úsečky* KL *je vektor* $\vec{u}=L-K$*. Jeho súradnice určím tak, že od súradníc bodu* $L[3;2]$ *odčítam súradnice bodu* $K[2;-1]$*, preto:*

$$\vec{u}=L-K=(1;3).$$

U: Dobre. Aké parametrické vyjadrenie má úsečka KL?

Ž: *Parametrické vyjadrenie úsečky* KL *je:*

$$\begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= -1+3t, \qquad t\in\langle 0;1\rangle. \end{aligned}$$

Použil som bod K *a vektor* $\vec{u}$.

U: Výborne. Nezabudol si ani, že v prípade úsečky patrí parameter do uzavretého intervalu $\langle 0;1\rangle$. Samozrejme len v prípade, že smerový vektor je $L-K$.
Ako zistíme vzájomnú polohu, teda prienik elipsy a úsečky?

Ž: *Vyriešim sústavu rovníc.*

U: Áno. Sústava rovníc pozostáva z rovnice ***elipsy*** a z parametrických rovníc úsečky:

$$\begin{aligned} \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{12} &= 1 \\ x &= 2+t \\ y &= -1+3t. \end{aligned}$$

Riešiť túto sústavu znamená dosadiť vyjadrenia pre x a y z parametrických rovníc do rovnice elipsy.

Ž: *Modré vyjadrenia dosadzujem do červenej rovnice. Dostávam:*

$$\frac{(2+t-2)^2}{4}+\frac{(-1+3t+3)}{12}=1.$$

U: Je to rovnica s jednou neznámou t. Vyriešme ju.

Ž: *Odstránim najprv zlomky, rovnicu násobím* 12*:*

$$3(2+t-2)^2 + (-1+3t+3)^2 = 12.$$

Upravím vnútra zátvoriek:

$$3t^2 + (3t+2)^2 = 12.$$

Druhú zátvorku umocním podľa vzorca:

$$3t^2 + 9t^2 + 12t + 4 = 12.$$

Vyzerá to na kvadratickú rovnicu:

$$12t^2 + 12t - 8 = 0.$$

U: Vykrátime ju ešte číslom 4:

$$3t^2 + 3t - 2 = 0.$$

Ž: *Vyriešim ju pomocou diskriminantu. Diskriminant*

$$D = 3^2 - 4\cdot 3\cdot(-2) = 9 + 24 = 33.$$

Korene sú:

$$t_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{33}}{2\cdot 3} = \frac{-3\pm\sqrt{33}}{6}.$$

Dostávam dve riešenia:

$$t_1 = \frac{-3+\sqrt{33}}{6} \quad a \quad t_2 = \frac{-3-\sqrt{33}}{6}.$$

U: Aká je teda vzájomná poloha elipsy a úsečky KL?

Ž: *Dve riešenia – je to sečnica. Úsečka KL pretína elipsu v dvoch bodoch, ktorým zodpovedajú vypočítané parametre t_1, t_2.*

U: Súhlasil by som, ak by išlo o priamku $\overleftrightarrow{KL}$. Zabudol si, že pri úsečke parameter t patrí do uzavretého intervalu 0 a 1.

Ž: *Naozaj! Musím overiť, či vypočítané hodnoty t_1, t_2 patria do $\langle 0;1\rangle$. Uf! Sú to škaredé čísla. Ale hodnota $t_2 = \frac{-3-\sqrt{33}}{6}$ je záporná, čiže nevyhovuje. t_1 približne vyčíslim a dostávam:*

$$t_1 = \frac{-3+\sqrt{33}}{6} \doteq 0,46.$$

Z toho viem, že $t_1 \in \langle 0;1\rangle$. Úsečka KL pretína elipsu len v jednom bode.

U: Vedel by si určiť jeho súradnice?

Ž: *Dosadím* $t_1 = \frac{-3+\sqrt{33}}{6}$ *do parametrických rovníc úsečky* KL *a dostávam:*

$$x = 2 + \frac{(-3+\sqrt{33})}{6} = \frac{9+\sqrt{33}}{6}$$
$$y = -1 + 3 \cdot \frac{(-3+\sqrt{33})}{6} = \frac{-5+\sqrt{33}}{2}.$$

Prienikom úsečky KL *a elipsy je bod* $P[\frac{9+\sqrt{33}}{6}; \frac{-5+\sqrt{33}}{2}]$.

Úloha 1: *Určte prienik elipsy* $2x^2 + (y-4)^2 = 8$ *a úsečky* MN, *ak* $M[1;1]$ *a* $N[-3;-6]$.

Výsledok: prienikom je prázdna množina, úsečka MN je nesečnicou elipsy