Vzájomná poloha priamky a kružnice

RNDr. Viera Vodičková

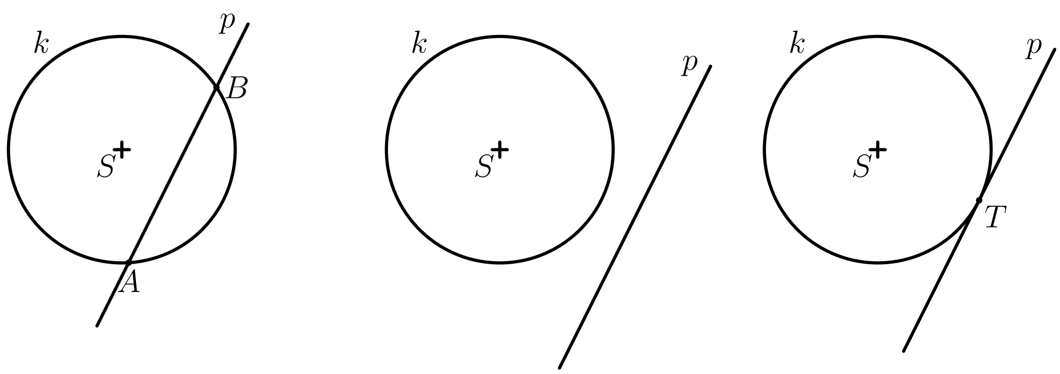
U: Spomenieš si, aká môže byť vzájomná poloha priamky a kružnice?

Ž: *Priamka a kružnica? Priamka môže kružnicu pretínať, alebo ísť mimo. Ešte môže byť dotyčnicou.*

U: No, predstavu máš. Ja to už len presnejšie sformulujem. Vzájomná poloha priamky a kružnice závisí od počtu ich spoločných bodov.

- Ak má priamka a kružnica ***práve dva*** spoločné body, hovoríme, že priamka je ***sečnicou*** kružnice.
- Ak priamka ***nemá*** s kružnicou spoločné body, hovoríme, že priamka je ***nesečnicou*** kružnice.
- Ak má priamka a kružnica ***práve jeden*** spoločný bod, hovoríme, že priamka je ***dotyčnicou*** kružnice.

Ž: *Vedel by som takéto prípady aj nakresliť. Tu je obrázok:*



sečnica $k \bigcap p = \{A; B\}$ | nesečnica $k \bigcap p = \emptyset$ | dotyčnica $k \bigcap p = \{T\}$

Ž: *Ako vyriešime vzájomnú polohu priamky a kružnice analyticky?*

U: Kružnicu aj priamku máme danú rovnicou. Nájsť prienik priamky a kružnice znamená hľadať všetky body, ktorých súradnice vyhovujú aj rovnici kružnice aj rovnici priamky.

Ž: *Stačí vyriešiť sústavu rovníc.*

U: Áno. Ako bude sústava rovníc vyzerať, závisí od toho, akým spôsobom je vyjadrená kružnica a priamka.

Ž: *Kružnicu vieme vyjadriť stredovým tvarom:*

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

pričom m, n sú súradnice stredu kružnice a r je jej polomer.

U: A ako môžeme vyjadriť priamku v rovine?

Ž: *Myslím, že parametricky alebo všeobecnou rovnicou.*

U: Ak je priamka daná parametricky, pri hľadaní prieniku dostávame túto sústavu:

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$

$$\begin{aligned} x &= a_1+tu_1 \\ y &= a_2+tu_2, \qquad t\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

A ak je priamka daná všeobecnou rovnicou máme zase túto sústavu:

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$

$$ax+by+c=0.$$

Ž: *V každom prípade to však bude sústava kvadratickej a lineárnych rovníc alebo kvadratickej a lineárnej rovnice.*

U: Riešiť ju budeme dosadzovacou metódou a získame kvadratickú rovnicu.

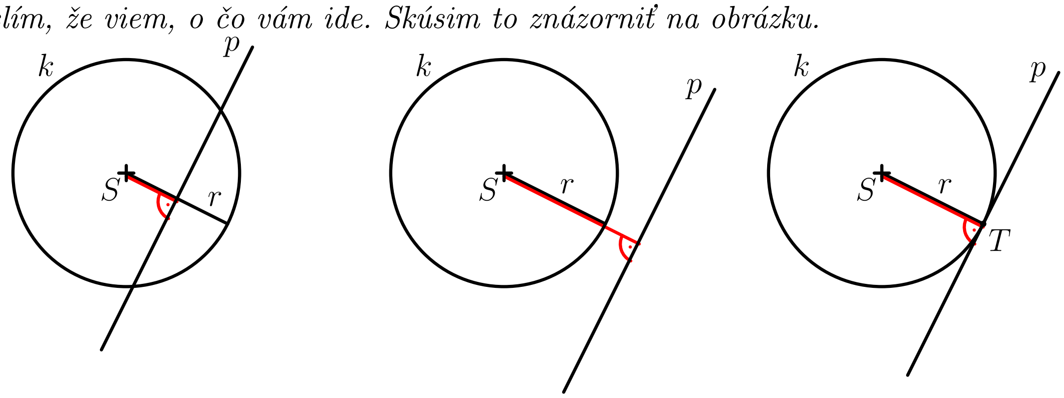
Ž: *Tá môže mať nula, jedno alebo dve riešenia.*

U: Správne. A v závislosti od toho určíme vzájomnú polohu. Ak vzniknutá kvadratická rovnica nebude mať riešenie, priamka je nesečnicou. Ak bude mať práve jedno riešenie, je to dotyčnica.

Ž: *A ak bude mať práve dve riešenia, priamka je sečnicou kružnice. Rozumiem.*

U: Vzájomnú polohu priamky a kružnice môžeme klasifikovať aj iným spôsobom. Nie na základe počtu spoločných bodov, ale na základe vzdialenosti stredu kružnice od priamky.

Ž: *Myslím, že viem, o čo vám ide. Skúsim to znázorniť na obrázku.*



sečnica $|Sp|<r$ | nesečnica $|Sp|>r$ | dotyčnica $|Sp|=r$

U: Vystihol si to.

- Ak je vzdialenosť stredu kružnice od priamky ***menšia*** ako polomer, priamka je ***sečnicou*** kružnice.
- Ak je vzdialenosť stredu kružnice od priamky ***väčšia*** ako polomer, priamka je ***nesečnicou*** kružnice.
- Ak je vzdialenosť stredu kružnice od priamky ***rovná*** polomeru, priamka je ***dotyčnicou*** kružnice.

Ž: *Dá sa to využiť aj v analytike?*

U: Samozrejme. Vzdialenosť bodu od priamky v rovine vieme vypočítať. Pripomeniem ti vzorec. Vzdialenosť bodu $M[m_1; m_2]$ od priamky $p: \ \ ax + by + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, pričom $a \neq 0 \vee b \neq 0$, vypočítame takto:

$$|Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pomocou tohto vzorca vypočítame vzdialenosť stredu kružnice od priamky a následne určíme vzájomnú polohu.

Ž: *Akurát tak nedostaneme súradnice spoločných bodov.*

U: To máš pravdu. Ale je to zase rýchlejší spôsob ako riešiť sústavu rovníc.

U: Na záver sa pristavíme pri ***dotyčnici kružnice***.

Ž: *Aj v geometrii bola dotyčnica zvlášť dôležitá...*

U: ***Dotyčnicou kružnice*** nazývame priamku, ktorá leží v rovine kružnice a má tieto vlastnosti:

- obsahuje práve jeden bod kružnice,
- stred kružnice má od nej vzdialenosť rovnú polomeru r,
- je kolmá na polomer, ktorý obsahuje bod dotyku.

Ž: *To je celkom jasné.*

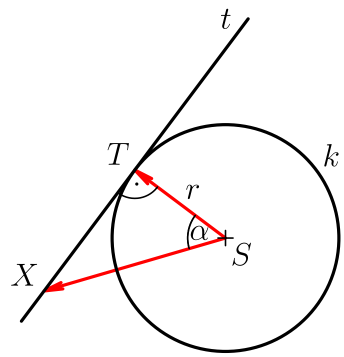
U: Často je vhodné poznať rovnicu dotyčnice kružnice v danom dotykovom bode. Preto si ju teraz odvodíme.

U: Majme danú kružnicu k so stredom $S[m; n]$ a polomerom r. Akú má stredovú rovnicu?

Ž: *Stredová rovnica tejto kružnice je:*

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

U: Predpokladajme, že máme daný dotykový bod $T[x_0; y_0]$. V tomto bode nech je zostrojená dotyčnica t ku kružnici k. Nech $X[x; y]$ je ľubovoľný bod patriaci dotyčnici t. Situáciu znázorňuje aj obrázok.



Ž: *Všetko vidím. Okrem toho je tam vyznačený pravý uhol, ktorý zviera dotyčnica t a polomer kružnice zostrojený v dotykovom bode T.*

U: Zvolíme si dva vektory, aj tie máš na obrázku. Vektor $T - S$ a $X - S$. Aké majú súradnice?

Ž: *Súradnice vektorov, to sú rozdiely súradníc príslušných krajných bodov. Nakoľko bod $S[m;n;]$, bod $T[x_0;y_0]$ a bod $X[x;y]$, vektory majú tieto súradnice:*

$$T - S = (x_0 - m; y_0 - n),$$

$$X - S = (x - m; y - n).$$

U: Teraz si určíme ich skalárny súčin.

Ž: *Ak sa dobre pamätám, skalárny súčin sa počítal tak, že k súčinu prvých súradníc príslušných vektorov sa pripočíta súčin druhých súradníc.*

U: Máš pravdu. Takže:

$$(T - S) \cdot (X - S) = (x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n).$$

U: Skalárny súčin sa však dá vyjadriť aj iným spôsobom.

Ž: *To je už na mňa veľa, nespomínam si.*

U: Skalárny súčin dvoch vektorov sa rovná súčinu veľkostí týchto vektorov a kosínusu uhla, ktorý zvierajú.

Ž: *Aha! Súvisí to s výpočtom odchýlky dvoch vektorov.*

U: Pre naše vektory teda platí:

$$(T - S) \cdot (X - S) = |T - S| \cdot |X - S| \cdot \cos\alpha = |TS| \cdot |SX| \cdot \cos\alpha.$$

Ž: *Uhol α je vyznačený aj na obrázku.*

U: Áno. A práve z obrázku si vyjadríme $\cos\alpha$.

Ž: *Hm... Máme tam pravouhlý trojuholník TXS. „Kosínus“ je pomer priľahlej odvesny ku prepone. Preto platí:*

$$\cos\alpha = \frac{|TS|}{|SX|}.$$

U: Dosadíme tento vzťah do modrej rovnice:

$$(T - S) \cdot (X - S) = |TS| \cdot |SX| \cdot \frac{|TS|}{|SX|}.$$

Ž: *Niečo sa vykráti! Dostávame:*

$$(T - S) \cdot (X - S) = |TS|^2.$$

U: Ešte si uvedomíme, že veľkosť úsečky $|TS|$ je rovná polomeru kružnice r. Preto:

$$(T - S) \cdot (X - S) = r^2.$$

Máme dvoma spôsobmi vyjadrený skalárny súčin. Porovnaním modrého a červeného vzťahu dostávame rovnicu dotyčnice kružnice:

$$(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2.$$

Ž: *Myslel som si, že priamka má jednoduchšiu rovnicu... A nie kvadratickú...*

U: Súhlasím, rovnica priamky je lineárna. A takou je aj získaná rovnica dotyčnice. Pre danú dotyčnicu sú parametre x_0, y_0, m, n, r konštanty.

Ž: *Jasné. Veď sú to súradnice bodov T a S, r je polomer. Preto výraz v prvej zátvorke $(x_0 - m)$ je vlastne konštanta a kvadratický člen tam nemá ako vzniknúť.*

U: Na záver to už len zopakujem.
Rovnica $(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$ je analytickým vyjadrením ***dotyčnice kružnice*** $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ v dotykovom bode $T[x_0; y_0]$.

Ž: *Napísať rovnicu dotyčnice bude teda ľahké! Dosadím potrebné hodnoty a mám to.*

U: Ale len v prípade, že poznáme súradnice dotykového bodu T.

Príklad 1: *Určte vzájomnú polohu kružnice $k(S,4)$ a priamky $\overleftrightarrow{AB}$, ak $S[-1;3]$, $A[-2;-4]$ a $B[1;5]$.*

Ž: *Vzájomná poloha kružnice a priamky... Viem, že priamka môže byť dotyčnicou, sečnicou alebo nesečnicou.*

U: Od čoho to závisí?

Ž: *Od toho, koľkokrát sa pretnú.*

U: Presnejšie od ich prieniku. Určme si teda ich prienik. Najprv budeme potrebovať ich analytické vyjadrenia.

Ž: *Myslíte rovnice, však? Začnem kružnicou. Mám daný stred a polomer, napíšem preto stredovú rovnicu kružnice. Tu je:*

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 16.$$

U: Výborne. Ostáva priamka $\overleftrightarrow{AB}$.

Ž: *Mám dané dva jej body. Z nich môžem určiť jej smerový vektor:*

$$\vec{u} = B - A = (3;9).$$

U: Súhlasím, ale kvôli zjednodušeniu výpočtov navrhujem zobrať ako smerový vektor, vektor $\frac{1}{3}\vec{u} = (1;3)$.

Ž: *No a keď už mám smerový vektor priamky $\overleftrightarrow{AB}$, napíšem jej parametrické vyjadrenie:*

$$\begin{aligned} x &= -2 + t \\ y &= -4 + 3t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

U: Ak chceme nájsť spoločné body kružnice a priamky, musíme nájsť všetky body, ktorých súradnice vyhovujú tak červenej rovnici kružnice ako aj modrým rovniciam priamky $\overleftrightarrow{AB}$.

Ž: *Mám vyriešiť sústavu rovníc. Zvolím si dosadzovaciu metódu. Modré vyjarenia dosadím do červenej rovnice:*

$$(-2+t+1)^2 + (-4+3t-3)^2 = 16.$$

U: Získali sme tak rovnicu s jednou neznámou t.

Ž: *Dobre, vyriešim ju. Upravím najprv vnútra zátvoriek:*

$$(-1+t)^2 + (-7+3t)^2 = 16,$$

následne zátvorky umocním:

$$1 - 2t + t^2 + 49 - 42t + 9t^2 = 16.$$

U: Dostávame kvadratickú rovnicu... Od počtu jej koreňov závisí počet spoločných bodov kružnice a priamky.

Ž: *To znamená, že sčítam, čo sa dá a všetko dám na jednu stranu:*

$$10t^2 - 44t + 34 = 0.$$

Môžem ešte celú rovnicu vydeliť číslom dva:

$$5t^2 - 22t + 17 = 0.$$

Vyriešim ju pomocou diskriminantu. Teda

$$D = (-22)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 17 = 484 - 340 = 144.$$

Vypočítam korene:

$$t_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 5} = \frac{22 \pm 12}{10},$$

a teda

$$t_1 = \frac{17}{5} \quad a \quad t_2 = 1.$$

U: Máme dve riešenia, to znamená, že kružnica a priamka majú ***dva*** spoločné body. Priamka $\overleftrightarrow{AB}$ je ***sečnicou*** kružnice k. Určme súradnice priesečníkov.

Ž: *To urobím asi tak, že vypočítanú hodnotu t dosadím do parametrických rovníc priamky $\overleftrightarrow{AB}$.*

U: Označme si priesečníky ako C a D.

Ž: *Dobre. Začnem s bodom C. Jemu priradím hodnotu $t_1 = \frac{17}{5}$. Dosadím ju do parametrických rovníc a dostávam:*

$$x = -2 + \frac{17}{5} = \frac{7}{5},$$
$$y = -4 + 3 \cdot \frac{17}{5} = \frac{31}{5}.$$

Bod C má súradnice $C[\frac{7}{5}; \frac{31}{5}]$. Podobne pre $t_2 = 1$ dostávam, že $D[-1; -1]$.

U: Súhlasím.

Úloha 1: *Je daná kružnica k so stredom $S[1; 2]$ a polomerom $r = 5$. Ďalej sú dané body $A[2; 0]$ a $B[5; 9]$. Vyšetrite vzájomnú polohu kružnice k a*

a) priamky $\overleftrightarrow{AB}$,

b) úsečky AB,

c) polpriamky $\overrightarrow{SA}$.

Výsledok:

a) $\overleftrightarrow{AB}$ je sečnicou kružnice k, $\overleftrightarrow{AB} \cap k = \{C[4; 6], D[1; -3]\}$,

b) $AB \cap k = \{C[4; 6]\}$,

c) $\overrightarrow{SA} \cap k = \{P[1+\sqrt{5}; 2-2\sqrt{5}]\}$

Príklad 2: *Určte vzájomnú polohu kružnice* $k:\ (x-4)^2+(y-1)^2=9$ *a priamky* $p:\ x+3y+6=0$.

U: Aká môže byť vzájomná poloha priamky a kružnice?

Ž: *Priamka môže byť dotyčnicou, sečnicou alebo nesečnicou kružnice.*

U: A od čoho to závisí?

Ž: *Od toho, koľkokrát sa pretnú.*

U: Presnejšie od ich prieniku, od počtu ich spoločných bodov. Ak ich chceme nájsť, musíme nájsť všetky body, ktorých súradnice vyhovujú tak rovnici kružnice k ako aj rovnici priamky p.

Ž: *Čiže mám vyriešiť sústavu rovníc. Tu je:*

$$\begin{aligned}(x-4)^2+(y-1)^2&=9\\ x+3y+6&=0.\end{aligned}$$

U: Je to sústava kvadratickej a lineárnej rovnice. Riešiť ju budeme dosadzovacou metódou. Z lineárnej rovnice si vyjadríme jednu neznámu a dosadíme do kvadratickej.

Ž: *Lineárna - to je modrá rovnica. Vyjadrím si z nej napr.* x*:*

$$x=-6-3y$$

a dosadím ho do červenej rovnice:

$$(-6-3y-4)^2+(y-1)^2=9.$$

Upravím zátvorku:

$$(-10-3y)^2+(y-1)^2=9.$$

U: Zátvorky umocníme a dostaneme kvadratickú rovnicu.

Ž: *Použijem vzorec a mám:*

$$100+60y+9y^2+y^2-2y+1=9.$$

Kvadratická rovnica má tvar:

$$10y^2+58y+92=0$$

a po vykrátení číslom 2*:*

$$5y^2+29y+46=0.$$

Vyriešim ju pomocou diskriminantu.

$$D=29^2-4\cdot5\cdot46=841-920=-79<0.$$

Diskriminant je záporný, preto rovnica nemá korene.

U: To znamená, že ani priamka p a kružnica k nemajú spoločné body. Priamka p je ***nesečnicou*** kružnice k.

U: Vzájomnú polohu priamky a kružnice môžeme určiť aj iným spôsobom. Nie na základe počtu spoločných bodov, ale na základe vzdialenosti stredu kružnice od priamky.

Ž: *Aha! Túto vzdialenosť porovnám s polomerom kružnice. Ak bude väčšia, ide o nesečnicu, ak bude menšia, ide o sečnicu, a ak bude rovná polomeru, tak máme dotyčnicu.*

U: Správne. Musíme si však určiť súradnice stredu kružnice a jej polomer.

Ž: *To je ľahké. Vidno to rovno zo stredovej rovnice kružnice. Takže* $S[4;1]$ *a polomer* $r = 3$.

U: Pre výpočet využijeme vzorec na určenie vzdialenosti bodu od priamky v rovine.

Ž: *Spomínam si na neho. Podľa neho platí:*

$$|Sp| = \frac{|4 + 3 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{10}}.$$

U: Ešte odstránime odmocninu z menovateľa:

$$|Sp| = \frac{13\sqrt{10}}{10} \doteq 4,11.$$

Ž: *Vidím, že* $|Sp| > r$, *preto* **priamka je nesečnicou kružnice**.

U: Nevýhodou tohto postupu je, že v prípade sečnice alebo dotyčnice kružnice, nezískame súradnice spoločných bodov.

Úloha 1: *Určte vzájomnú polohu kružnice* $k:\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ *a priamky* $p:\ x + 3y + 6 = 0$.

Výsledok: priamka p je sečnicou, prienik $A[\frac{12}{5}; -\frac{14}{5}]$, $B[-3;-1]$

Príklad 3: *Určte všetky hodnoty parametra $c \in \mathbb{R}$, pre ktoré je priamka $p: 2x - y + c = 0$*

a) dotyčnicou,

b) sečnicou,

c) nesečnicou

kružnice $k: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Ž: *Úloha s parametrom...*

U: Predstav si, že je to len obyčajná úloha na určenie vzájomnej polohy priamky a kružnice. Ako by si postupoval?

Ž: *Určiť vzájomnú polohu priamky a kružnice znamená vyriešiť sústavu rovníc. Tá pozostáva z rovnice priamky a z rovnice kružnice. Koľko bude mať riešení, toľko bude aj spoločných bodov. Podľa toho určím, či ide o dotyčnicu, sečnicu albo nesečnicu.*

U: To si povedal vynikajúco. Tak to aj urobíme. Akurát sústava bude s parametrom.

Ž: *Takže si zostavím spomenutú sústavu. Červenou vyznačím rovnicu kružnice a modrou rovnicu priamky:*

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (y+1)^2 &= 4\\ 2x - y + c &= 0.\end{aligned}$$

U: Je to sústava kvadratickej a lineárnej rovnice. Riešiť ju budeme dosadzovacou metódou. Z lineárnej rovnice si vyjadríme jednu neznámu a dosadíme do kvadratickej.

Ž: *Lineárna - to je modrá rovnica. Vyjadrím si z nej napr. y:*

$$y = 2x + c$$

a dosadím ho do červenej rovnice:

$$(x-3)^2 + (2x + c + 1)^2 = 4.$$

U: Roznásobíme zatvorky a dostaneme kvadratickú rovnicu.

Ž: *Použijem vzorec a mám:*

$$x^2 - 6x + 9 + 4x^2 + 4xc + c^2 + 4x + 2c + 1 = 4.$$

To je veľa písmenok!

U: Dostali sme kvadratickú rovnicu s neznámou x a s parametrom c. Potrebujeme len vhodne zoradiť jej členy a to takto:

$$5x^2 + x(4c-2) + (6 + c^2 + 2c) = 0.$$

Ž: *Aha! Zoradili ste ich podľa mocnín x, najprv x^2, potom x^1 a nakoniec x^0.*

U: Od čoho závisí počet koreňov kvadratickej rovnice?

Ž: *Od jej diskriminantu.*

U: Áno, máš pravdu. A to takto:

- Ak je hodnota diskriminantu D ***rovná*** nule, kvadratická rovnica má práve jedno riešenie a priamka je ***dotyčnicou*** kružnice.
- Ak je hodnota diskriminantu D ***väčšia*** ako nula, kvadratická rovnica má práve dve riešenia a priamka je ***sečnicou*** kružnice.
- Ak je hodnota diskriminantu D ***menšia*** ako nula, kvadratická rovnica nemá riešenie a priamka je ***nesečnicou*** kružnice.

Ž: *Rozumiem. Vypočítam si najprv diskriminant kvadratickej rovnice. Diskriminant sa počíta podľa vzorca:*

$$D = B^2 - 4AC.$$

Pre našu rovnicu platí:

$$A = 5, \quad B = 4c - 2, \quad C = 6 + c^2 + 2c.$$

Preto:

$$D = (4c-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (6 + c^2 + 2c).$$

U: Súhlasím. Upravme tento výraz.

Ž: *Dostávam:*

$$D = 16c^2 - 16c + 4 - 120 - 20c^2 - 40c = -4c^2 - 56c - 116.$$

Môžem ešte vybrať (-4) *pred zátvorku:*

$$D = -4(c^2 + 14c + 29).$$

U: V poriadku. Ak má byť priamka p dotyčnicou kružnice k, musí mať kvadratická rovnica práve jedno riešenie.

Ž: *Čiže diskriminant musí byť rovný nule. Platí:*

$$D = -4(c^2 + 14c + 29) = 0.$$

Uf! Zase kvadratická rovnica. (-4) *si nemusím všímať. Budem ju riešiť opäť diskriminantom.*

U: Aby sa nám to nepoplietlo, označme ho napr. D_1.

Ž: *Dobre. Takže:*

$$D_1 = 14^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29 = 196 - 116 = 80.$$

Potom:

$$\sqrt{D_1} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Korene sú:

$$c_{1,2} = \frac{-14 \pm 4\sqrt{5}}{2 \cdot 1}.$$

Po úprave dostávam dva korene:

$$c_1 = -7 + 2\sqrt{5} \quad a \quad c_2 = -7 - 2\sqrt{5}.$$

U: Výborne. Pre hodnotu $c \in \{-7 + 2\sqrt{5}; -7 - 2\sqrt{5}\}$ je hodnota diskriminantu $D = 0$, kvadratická rovnica

$$5x^2 + x(4c - 2) + (6 + c^2 + 2c) = 0$$

má práve jedno riešenie a priamka p je dotyčnicou kružnice k.

U: Ako to bude so sečnicou?

Ž: *Ak je priamka sečnicou, musí sa pretať s kružnicou dvakrát. Preto kvadratická rovnica má mať práve dve riešenia. Pre jej diskriminant platí:*

$$D = -4(c^2 + 14c + 29) > 0.$$

U: Potrebujeme vyriešiť kvadratickú nerovnicu s neznámou c. Najprv vydelíme obe strany nerovnice číslom (-4):

$$c^2 + 14c + 29 < 0.$$

Ž: *Aha! Číslo (-4) je záporné, znak nerovnosti sa preto obrátil.*

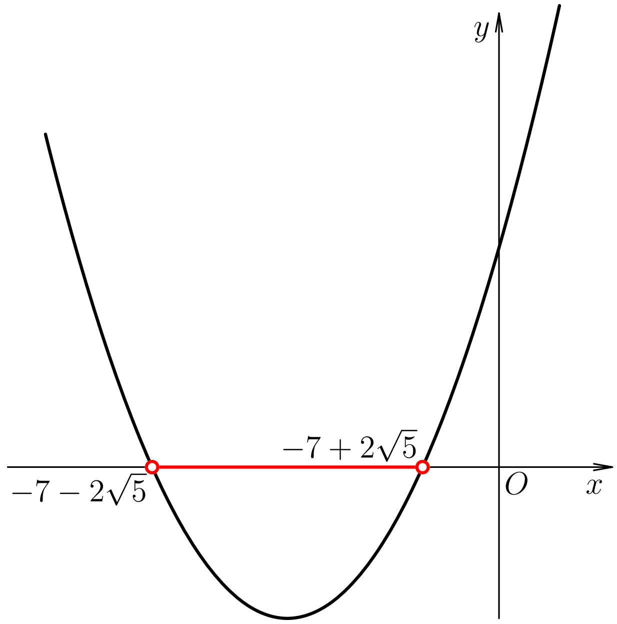
U: Nerovnicu vyriešime graficky. Využijeme, že už poznáme korene rovnice

$$c^2 + 14c + 29 = 0.$$

Ž: *Áno. Tie sme vypočítali pri určovaní dotyčnice. Sú to*

$$c_1 = -7 + 2\sqrt{5} \quad a \quad c_2 = -7 - 2\sqrt{5}.$$

U: Načrtneme si graf funkcie: $f : y = c^2 + 14c + 29$. Jej grafom je parabola.



U: Hľadáme, pre aké c sú jej funkčné hodnody záporné.

Ž: *To je jasné. Stačí sa pozrieť, kde je parabola pod osou x. Bude to pre* $c \in (-7-2\sqrt{5}; -7+2\sqrt{5})$.

U: Správne. A pre tieto c je priamka p sečnicou kružnice k.
Ostala nám už len nesečnica.

Ž: *To už bude ľahké. Je to pre všetky zvyšné hodnoty. Priamka p je nesečnicou kružnice k pre* $c \in (-\infty; -7-2\sqrt{5}) \cup (-7+2\sqrt{5}; \infty)$.

Úloha 1: *Určte parameter $a \in \mathbb{R}$ tak, aby priamka $t: x-3y+a=0$ bola dotyčnicou kružnice $k: x^2+y^2=10$.*

Výsledok: $a \in \{-10; 10\}$

Príklad 4: *Je daná kružnica* $k : (x-3)^2 + (y+12)^2 = 100$. *Určte rovnice všetkých dotyčníc kružnice* k, *ktoré prechádzajú bodom*

a) $L[9; -4]$,

b) $M[5; 2]$.

Ž: *To bude ľahká úloha. Máme odvodenú rovnicu dotyčnice kružnice, stačí len dosadiť. Vyzerá takto:*

$$(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2.$$

U: Je potrebné dodať, že ide o dotyčnicu kružnice v bode $T[x_0; y_0]$, pričom kružnica je vyjadrená rovnicou:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Ž: *Myslel som, že je to samozrejmé. My máme danú kružnicu:*

$$(x - 3)^2 + (y + 12)^2 = 100.$$

Preto jej dotyčnica má rovnicu:

$$(x_0 - 3)(x - 3) + (y_0 + 12)(y + 12) = 100.$$

Tak a teraz dosadím súradnice bodu L *za* x_0 *a* y_0, *upravím a mám to!*

U: Len sa tak neponáhľaj! Si si istý, že bod L patrí kružnici? Je to vôbec dotykový bod?

Ž: *No... Môžem to vyskúšať. Dosadím súradnice bodu* $L[9; -4]$ *do rovnice kružnice a zistím, či platí rovnosť:*

$$(9 - 3)^2 + (-4 + 12)^2 = 100.$$

Upravím - spočítam ľavú stranu a mám:

$$36 + 64 = 100.$$

A to je pravda. Tak vidíte, bod L *patrí kružnici, bude to dotykový bod hľadanej dotyčnice.*

U: Teraz už nemám námietky.

Ž: *Dosadím jeho súradnice za* x_0 *a* y_0 *do červenej rovnice dotyčnice:*

$$(9 - 3)(x - 3) + (-4 + 12)(y + 12) = 100.$$

U: Upravíme vzniknutú rovnicu tak, aby predstavovala všeobecnú rovnicu priamky.

Ž: *Dobre. Takže:*

$$6(x - 3) + 8(y + 12) = 100,$$

čo dáva:

$$6x + 8y - 22 = 0.$$

U: Rovnicu môžeme vydeliť číslom 2, rovnica dotyčnice kružnice k v bode L je:

$$3x + 4y - 11 = 0.$$

Ž: *Pokračujem úlohou b). Postupujem presne tak isto. Dosadím súradnice bodu* $M[5;2]$ *do rovnice dotyčnice...*

U: Zabudol si overiť, či bod M patrí kružnici.

Ž: *Vy si nedáte pokoj! No dobre:*

$$(5-3)^2 + (2+12)^2 = 100.$$

Upravím - spočítam ľavú stranu a mám:

$$4 + 196 = 100.$$

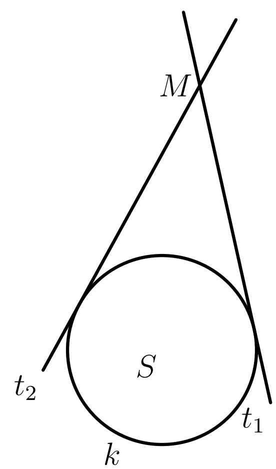
A to nie je pravda. Uf! Bod M nepatrí kružnici!

U: A navyše platí:

$$4 + 196 > 100.$$

Bod M leží vo vonkajšej oblasti kružnice k. Ak by bod M ležal vo vnútornej oblasti kružnice, dotyčnica by neexistovala. Koľko bude existovať dotyčníc kružnice prechádzajúcich bodom M?

Ž: *Ja si to radšej nakreslím.*



Mali by byť dve.

U: Aby sme mohli použiť odvodenú rovnicu dotyčnice, musíme najprv nájsť súradnice dotykového bodu $T[x_0;y_0]$.

Ž: *Máme rovnicu kružnice:*

$$(x-3)^2 + (y+12)^2 = 100$$

a rovnicu dotyčnice:

$$(x_0-3)(x-3) + (y_0+12)(y+12) = 100.$$

Dotykový bod $T[x_0;y_0]$ *patrí kružnici, preto jeho súradnice musia vyhovovať jej rovnici. Dosadíme ich.*

Ž: *Dosadzujem:*

$$(x_0-3)^2 + (y_0+12)^2 = 100.$$

U: Bod $M[5;2]$ zase patrí dotyčnici.

Ž: *Jeho súradnice dosadím do rovnice dotyčnice:*

$$(x_0-3)(5-3)+(y_0+12)(2+12)=100.$$

U: Tým sme získali sústavu dvoch rovníc (modrej a červenej) s neznámymi x_0 a y_0, čo sú súradnice dotykového bodu T.

Ž: *Začínam tomu rozumieť. Vyriešim sústavu, nájdem dotykový bod a potom to už bude úloha ako po a).*

U: Upravíme červenú rovnicu a máme takúto sústavu:

$$\begin{aligned}(x_0-3)^2+(y_0+12)^2&=100\\ 2(x_0-3)+14(y_0+12)&=100.\end{aligned}$$

Je to sústava kvadratickej a lineárnej rovnice. Riešiť ju budeme dosadzovacou metódou. Z lineárnej rovnice si vyjadríme jednu neznámu a dosadíme do kvadratickej.

Ž: *Lineárna - to je červená rovnica. Len tie indexy ma trochu pletú. Vyjadrím si z nej napr.* x_0*:*

$$x_0=-7y_0-31$$

a dosadím ho do modrej rovnice:

$$(-7y_0-31-3)^2+(y_0+12)^2=100.$$

Upravím zátvorku:

$$(-7y_0-34)^2+(y_0+12)^2=100.$$

U: Zátvorky umocníme a dostaneme kvadratickú rovnicu s neznámou y_0.

Ž: *Použijem vzorec a mám:*

$$49y_0^2+476y_0+1156+y_0^2+24y_0+144=100.$$

Kvadratická rovnica má tvar:

$$50y_0^2+500y_0+1200=0.$$

Vydelím ju celú 50*:*

$$y_0^2+10y_0+24=0.$$

Z takých škaredých veľkých čísel vyšla celkom pekná rovnica. Vyriešim ju rozkladom na súčin:

$$(y_0+4)(y_0+6)=0.$$

Korene sú

$$y_{0_1}=-4 \quad a \quad y_{0_2}=-6.$$

U: Pomocou červeného vyjadrenia $x_0=-7y_0-31$ dopočítame x_0.

Ž: *Dostávam:*

$$x_{0_1} = -3 \quad a \quad x_{0_2} = 11.$$

U: Ostáva napísať už len rovnice dotyčníc. Rovnica dotyčnice má tvar:

$$(x_0 - 3)(x - 3) + (y_0 + 12)(y + 12) = 100.$$

Stačí už len dosadiť súradnice dotykového bodu.

Ž: *Začnem s dotykovým bodom $T_1[-3; -4]$. Dosadím jeho súradnice za x_0 a y_0 do rovnice dotyčnice:*

$$(-3 - 3)(x - 3) + (-4 + 12)(y + 12) = 100.$$

Po úprave mám:

$$t_1 : -3x + 4y + 7 = 0.$$

Pre druhý dotykový bod $T_2[11; -6]$ platí:

$$(11 - 3)(x - 3) + (-6 + 12)(y + 12) = 100.$$

Čo je po úprave:

$$t_1 : 4x + 3y - 26 = 0.$$

Úloha 1: *Je daná kružnica $k : x^2 + y^2 - 2y = 0$. Určte rovnice všetkých dotyčníc kružnice k, ktoré prechádzajú bodom $M[-3; 0]$.*

Výsledok: $T_1[0; 0]$, $t_1 : y = 0$, $T_2[-\frac{3}{5}; \frac{9}{5}]$, $t_2 : 3x - 4y + 9 = 0$

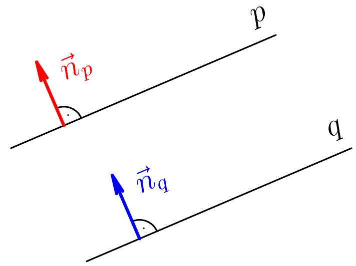
Príklad 5: *Napíšte rovnice dotyčníc kružnice $k: x^2+y^2-8x-y+5=0$, ktoré sú rovnobežné s priamkou $p: 2x-y+2=0$.*

U: Tak najprv, akú rovnicu majú všetky priamky, ktoré sú rovnobežné s priamkou p?

Ž: *O rovnobežných priamkach viem, že nemajú spoločné body.*

U: A čo vieš o ich normálových vektoroch?

Ž: *Normálové vektory? Nakreslím si to. Aha! Ak sú priamky rovnobežné, tak jeden normálový vektor je násobkom druhého.*



U: Správne. Preto môžeme tvrdiť, že všetky priamky rovnobežné s priamkou p majú ten istý normálový vektor ako priamka p.

Ž: *Čiže to platí aj pre hľadané dotyčnice. Normálový vektor priamky p ľahko vyčítam z jej všeobecnej rovnice. Má súradnice*

$$\vec{n}_p = (2; -1).$$

U: Áno. A je to aj normálový vektor hľadanej dotyčnice. Preto dotyčnica kružnice rovnobežná s priamkou p má všeobecnú rovnicu:

$$2x - y + c = 0.$$

Ž: *To bolo ľahké. Už nám ostala len jedna neznáma, koeficient c.*

U: Budeme musieť trošku počítať. Zatiaľ sme nevyužili, že priamka je dotyčnicou kružnice.

Ž: *Viem, že dotyčnica má s kružnicou spoločný práve jeden bod.*

U: Môžeme to využiť. Znamená to, že sústava zložená z rovnice kružnice a rovnice priamky

$$\begin{aligned} x^2+y^2-8x-y+5&=0\\ 2x-y+c&=0 \end{aligned}$$

má mať práve jedno riešenie.

Ž: *Pustím sa do jej riešenia. Z rovnice priamky si vyjadrím jednu neznámu, hodí sa y:*

$$y = 2x + c$$

a dosadím ho do rovnice kružnice:

$$x^2 + (2x+c)^2 - 8x - (2x+c) + 5 = 0.$$

Roznásobím zátvorky:

$$x^2 + 4x^2 + 4xc + c^2 - 8x - 2x - c + 5 = 0.$$

U: Dostali sme kvadratickú rovnicu s neznámou x a parametrom c. Upravíme ju na takýto tvar:

$$5x^2 + x(4c - 10) + c^2 - c + 5 = 0.$$

Táto kvadratická rovnica má mať práve jedno riešenie. Od čoho závisí počet riešení kvadratickej rovnice?

Ž: *Od diskriminantu. Ak je rovný nule, kvadratická rovnica má práve jedno riešenie.*

U: Výborne. Vyjadrime si teda diskriminant kvadratickej rovnice.

Ž: *Diskriminant sa počíta podľa vzorca:*

$$D = B^2 - 4AC.$$

U: Pričom A je koeficient pri kvadratickom člene, B pri lineárnom člene a C je absolútny člen. V našom prípade platí:

$$A = 5, \quad B = 4c - 10, \quad C = c^2 - c + 5.$$

Len si daj pozor, aby sa ti nepopletli „céčka“. Veľké C je koeficient kvadratickej rovnice a modré c zase parameter zo všeobecnej rovnice dotyčnice.

Ž: *Vyjadrím si diskriminant:*

$$D = (4c - 10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (c^2 - c + 5).$$

A ten sa má rovnať nule.

U: Upravme ešte diskriminant.

Ž: *Dobre. Roznásobím zátvorky:*

$$D = 16c^2 - 80c + 100 - 20c^2 + 20c - 100.$$

Môžem ešte sčítať, čo sa dá a dostávam:

$$D = -4c^2 - 60c.$$

U: Diskriminant sa má rovnať nule. Dostávame preto rovnicu

$$-4c^2 - 60c = 0.$$

Po vydelení oboch strán číslom (-4) sa nám zjednoduší:

$$c^2 + 15c = 0.$$

Ž: *To je jednoduchá kvadratická rovnica. Vyberiem c pred zátvorky a mám:*

$$c(c + 15) = 0.$$

Z toho dostávam dve riešenia:

$$c_1 = 0 \quad a \quad c_2 = -15.$$

U: Výborne. Rovnice hľadaných dotyčníc sú:

$$2x - y = 0 \text{ a } 2x - y - 15 = 0.$$

U: Ponúknem ti ešte jeden spôsob riešenia tejto úlohy. Povedali sme, že dotyčnica kružnice rovnobežná s priamkou p má všeobecnú rovnicu:

$$2x - y + c = 0.$$

Pri hľadaní neznámeho koeficientu c sme využili, že dotyčnica má s kružnicou spoločný práve jeden bod.

Ž: *Súhlasím.*

U: Akú vlastnosť má ešte dotyčnica kružnice?

Ž: *Okrem toho, že má s kružnicou spoločný práve jeden bod? Viem, že vzdialenosť stredu kružnice od dotyčnice je rovná jej polomeru.*

U: A to teraz využijeme. Najprv však potrebujeme vedieť súradnice stredu kružnice a jej polomer.

Ž: *To ľahko vyčítam z jej rovnice. Hops! Ale rovnicu kružnice nemáme v stredovom tvare!*

U: Budeš ju musieť na stredový tvar upraviť.

Ž: *Tak dobre. Máme rovnicu kružnice:*

$$x^2 + y^2 - 8x - y + 5 = 0.$$

Použijem úpravu na štvorec:

$$(x^2 - 8x + 16) - 16 + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 5 = 0.$$

Takže dostávam:

$$(x-4)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}.$$

U: Výborne. To už je stredová rovnica kružnice. Aké súradnice má jej stred? A aký je polomer kružnice?

Ž: *Stred kružnice, bod S má súradnice $S[4; \frac{1}{2}]$ a polomer $r = \sqrt{\frac{45}{4}}$.*

U: Súhlasím, akurát hodnotu polomeru môžeme ešte upraviť, t. j. čiastočne odmocniť. Čiže polomer $r = \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

U: Povedali sme, že vzdialenosť stredu kružnice od dotyčnice je rovná jej polomeru. Ako určujeme vzdialenosť bodu od priamky v rovine?

Ž: *Na určenie vzdialenosti bodu od priamky v rovine máme odvodený vzorec.*

U: Áno. Pripomeniem ti ho. Vzdialenosť bodu $M[m_1; m_2]$ od priamky $p:\ ax+by+c=0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, pričom $a \neq 0 \vee b \neq 0$, vypočítame ako

$$|Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ž: *Namiesto bodu M máme bod $S[4; \frac{1}{2}]$ a priamka p má rovnicu $2x - y + c = 0$.*

U: Súhlasím.

Ž: *Môžem dosadiť do vzorca:*

$$|Sp| = \frac{|2 \cdot 4 - 1 \cdot \frac{1}{2} + c|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}.$$

Po úprave mám:

$$|Sp| = \frac{|\frac{15}{2} + c|}{\sqrt{5}}.$$

U: Táto vzdialenosť sa má rovnať polomeru kružnice, ktorého hodnota je $\frac{3}{2}\sqrt{5}$. Dostávame tak rovnicu s neznámou c:

$$|Sp| = \frac{|\frac{15}{2} + c|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

Jej vyriešením získame hodnotu koeficientu c, ktorý zodpovedá hľadanej dotyčnici kružnice.

Ž: *Rozumiem. musím túto rovnicu vyriešiť. Začnem s tým, že obe strany vynásobím $\sqrt{5}$. Dostávam:*

$$|\tfrac{15}{2} + c| = \tfrac{15}{2}.$$

To je rovnica s absolútnou hodnotou. Vyriešim ju graficky. Vzdialenosť bodu c od bodu $-\frac{15}{2}$ na číselnej osi má byť $\frac{15}{2}$. To znamená, že:

$$c_1 = 0 \quad a \quad c_2 = -15.$$

Rovnice hľadaných dotyčníc sú:

$$2x - y = 0 \quad a \quad 2x - y - 15 = 0.$$

Úloha 1: *Napíšte rovnice dotyčníc kružnice $k: (x-2)^2 + (y+6)^2 = 13$, ktoré sú rovnobežné s priamkou $p: 2x - 3y + 5 = 0$.*

Výsledok: $2x - 3y - 35 = 0$, $2x - 3y - 9 = 0$

Úloha 2: *Napíšte rovnice dotyčníc kružnice $k: x^2 + y^2 - x - 2y = 0$, ktoré sú kolmé na priamku $p: 2x - y + 6 = 0$.*

Výsledok: $x + 2y = 0$, $x + 2y - 5 = 0$