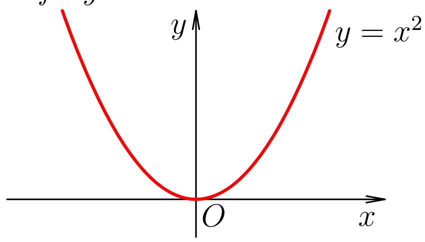
Parabola a jej analytické vyjadrenie

RNDr. Viera Vodičková

U: ***Parabolu*** poznáš, nie?

Ž: *Ale áno. Pri kvadratických funkciách sme sa ich nakreslili viac než dosť.*

U: Máš pravdu. Grafom kvadratickej funkcie je krivka, ktorá sa volá parabola. Na obrázku máš graf kvadratickej funkcie $f: y = x^2$.



Prejdeme rovno k jej definícii. ***V rovine nech je daná priamka*** d ***a bod*** F***, ktorý na nej neleží. Parabolou nazývame množinu všetkých bodov tejto roviny, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od priamky*** d ***ako aj od bodu*** F. Parabolu označujeme veľkým písmenom P.

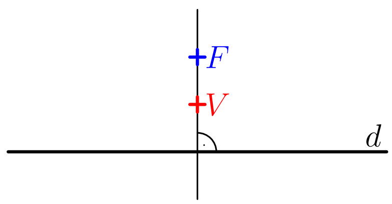
$$\boxed{P = \{X \in \mathbb{E}_2; |Xd| = |XF|\}}$$

Ž: *Hm... Myslel som si, že parabolu dobre poznám, teda jej tvar. Táto definícia ma prekvapila...*

U: Vedel by si na základe tejto definície nájsť aspoň jeden bod paraboly?

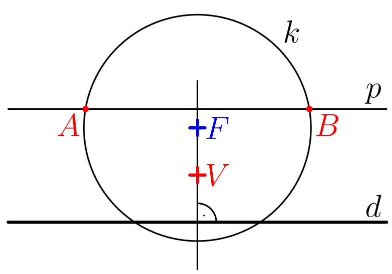
Ž: *Máme priamku a bod. Rovnaká vzdialenosť od priamky aj od bodu F... Zostrojím kolmicu na priamku z bodu F a v polovici mám jeden bod paraboly.*

U: Výborne. Máš to aj na obrázku. Tento bod označíme V. Nazveme ho vrchol paraboly.



Našiel by si aj iné vyhovujúce body?

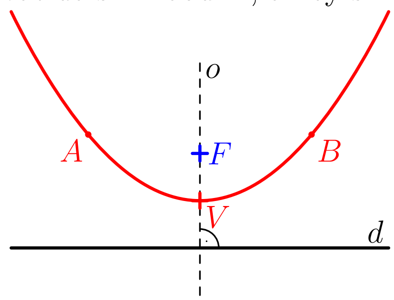
Ž: *Asi áno. Zvolím si ľubovoľnú vzdialenosť. Zostrojím kružnicu so stredom F a s polomerom rovnajúcim sa tejto vzdialenosti. Potom zostrojím rovnako vzdialenú rovnobežku s priamkou d. Tam, kde sa pretnú vznikne ďalší bod paraboly, vlastne mi vzniknú rovno dva body. Je to aj na obrázku.*



U: Súhlasím. Až na to, že vzdialenosť, ktorú si zvolíme, musí byť väčšia ako je polovica vzdialenosti bodu F od priamky d.

Ž: *Máte pravdu. Inak by som nedostal žiaden priesečník.*

U: Takto by sme mohli pokračovať ďalšími bodmi, až by sme dostali parabolu.



Bod F nazývame ***ohnisko paraboly***. Priamka d sa nazýva ***riadiaca*** alebo ***direkčná priamka***. Parabola má jednu ***os***. Je to priamka kolmá na direkčnú priamku d prechádzajúca ohniskom F. Priesečník osi a paraboly je bod V a nazýva sa ***vrchol paraboly***.

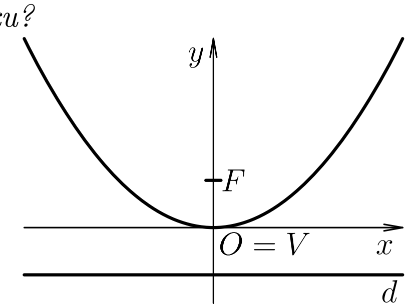
Ž: *Zatiaľ mi je všetko jasné. Vrchol paraboly bol dôležitý aj pri kreslení grafov kvadratických funkcií.*

U: Povieme si aké analytické vyjadrenie má parabola.

Ž: *Bude mať rovnicu, tak ako kružnica, elipsa alebo priamka?*

U: Áno. Rovnica paraboly závisí od jej polohy v sústave súradníc. My sa budeme zaoberať len takými parabolami, ktorých os je rovnobežná s osou x alebo osou y sústavy súradníc.

Ž: *Čiže napr. ako tu na obrázku?*



U: Áno. To je jednoduchý príklad. Os paraboly leží na súradnicovej osi y. Vrchol paraboly je bod $S[0;0]$. A direkčná priamka d je zase rovnobežná s osou x. Odvodíme rovnicu tejto paraboly. Začneme definíciou.

Ž: *Parabola je množina všetkých bodov roviny, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od priamky d ako aj od bodu F.*

U: Výborne. Zoberieme si ľubovoľný bod paraboly $X[x;y]$. Podľa definície preň platí:

$$|Xd| = |XF|.$$

Vyjadríme si tieto vzdialenosti.

Ž: *Potrebujem súradnice ohniska F a rovnicu riadiacej priamky d. Z obrázka viem len súradnice vrcholu, t. j. $V[0;0]$.*

U: Označme vzdialenosť ohniska a riadiacej priamky p.

$$\boxed{|Fd| = p}$$

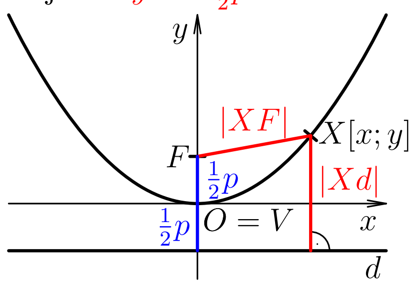
Číslo p sa nazýva ***parameter paraboly*** a určuje jej tvar. Nakoľko bod F neleží na priamke d, platí $p > 0$. Vzdialenosť vrcholu od ohniska je rovnaká ako od direkčnej priamky, preto

$$|FV| = \frac{1}{2}p.$$

Ohnisko F zároveň leží na osi y, preto má súradnice…

Ž: *x-ová súradnica je nulová a y-ová je $\frac{1}{2}p$, $F[0; \frac{1}{2}p]$.*

U: Súhlasím. Direkčná priamka je rovnobežná s osou x a prechádza bodom $[0; -\frac{1}{2}p]$ ležiacim na y-ovej osi, preto jej rovnica je: $d : y = -\frac{1}{2}p$.



U: Vyjadríme si vzdialenosti $|Xd|$ a $|XF|$.

Ž: *Vzdialenosť bodu X od priamky d vidno rovno z obrázku. Tvorí ju veľkosť y-ovej súradnice bodu X a vzdialenosť direkčnej priamky od osi x. Teda:*

$$|Xd| = y + \frac{1}{2}p.$$

U: Výborne. Vzdialenosť bodov X a F vyjadríme zase podľa vzorca pre vzdialenosť dvoch bodov. Nakoľko $X[x; y]$ a $F[0; \frac{1}{2}p]$, platí:

$$|XF| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}p - y\right)^2}.$$

Tieto vyjadrenia dosadíme do rovnice:

$$|Xd| = |XF|.$$

Ž: *Dosadzujem:*

$$y + \frac{1}{2}p = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}p - y\right)^2}.$$

U: Túto rovnicu budeme upravovať, aby sme získali nejaký jej „krajší tvar“. Začneme tým, že obe strany rovnice umocníme na druhú. Pri umocnení nezabudnme na to, že ľavú stranu umocňujeme ako dvojčlen podľa vzorca $(a + b)^2$.

Ž: *Umocňujem:*

$$y^2 + yp + \frac{1}{4}p^2 = x^2 + \frac{1}{4}p^2 - py + y^2.$$

y^2 aj $\frac{1}{4}p^2$ sa mi odčíta! Dostávam:

$$yp = x^2 - yp.$$

U: Alebo po úprave:

$$x^2 = 2py.$$

A to je rovnica našej paraboly.

Ž: *Uf! To je nejaká jednoduchá rovnica!*

U: Ak ju upravím na tvar:

$$y = \frac{1}{2p}x^2,$$

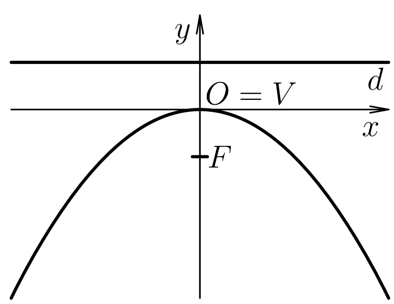
tak by ti to malo byť známe.

Ž: *To je predpis kvadratickej funkcie.*

U: Už na začiatku sme povedali, že parabola je grafom kvadratickej funkcie. Druhá vec, ktorú si treba všimnúť je to, že len jedna premenná, x, vystupuje v druhej mocnine.

Ž: *Naozaj! Pri úpravách nám člen y^2 vypadol.*

U: Povedali sme, že sa budeme zaoberať len takými parabolami, ktorých os je rovnobežná s niektorou osou sústavy súradníc. Druhá možnosť umiestnenia paraboly v sústave súradníc je na ďalšom obrázku.



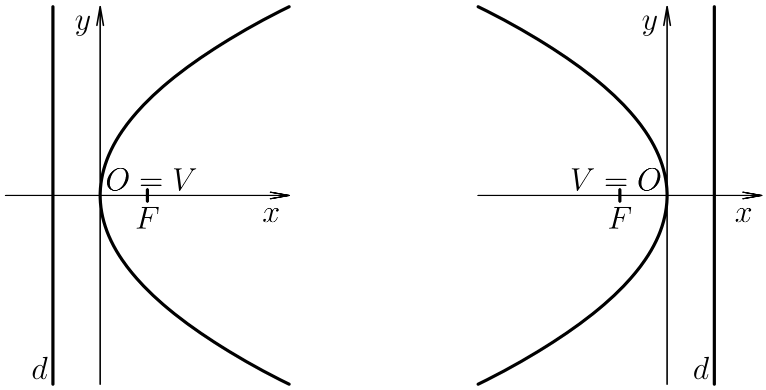
Ž: *Parabola sa otočila. Direkčná priamka je hore.*

U: Je rovnica je potom:

$$x^2 = -2py.$$

Ž: *Pribudlo len znamienko mínus na pravej strane.*

U: Áno. Znamienko pri člene $2py$ vyjadruje ako je parabola otočená. Ďalšie dve možnosti umiestnenia paraboly v sústave súradníc sú na ďalších obrázkoch.



Os paraboly teraz leží na osi x a direkčná priamka je rovnobežná s osou y. Prvá parabola otočená „vpravo“ má rovnicu:

$$y^2 = 2px.$$

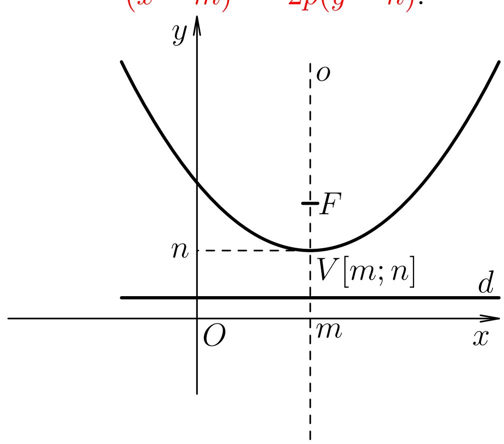
Druhá parabola otočená „vľavo“ má rovnicu:

$$y^2 = -2px.$$

Ž: *Zase sa líšia len znamienkami. Doprava je plus a doľava mínus. V duhej mocnine je neznáma y.*

U: Uvedieme si ešte rovnice parabol, ktorých vrchol nie je v začiatku sústavy súradníc. Parabolu posunieme tak, že jej os bude rovnobežná s osou y a direkčná priamka s osou x. Nech vrchol paraboly je bod $V[m; n]$. Rovnica takejto paraboly je potom:

$$(x - m)^2 = 2p(y - n).$$



Ž: *Jasné. Výrazy $(x - m)$ a $(y - n)$ vyjadrujú posunutie vrchola paraboly.*

U: Zhrnieme to aj pre ostatné prípady.
Každá parabola, ktorá má os rovnobežnú s osou y, vrchol $V[m;n]$ a parameter p, je vyjadrená jednou z rovníc:

$$(x-m)^2 = 2p(y-n) \quad \text{alebo} \quad (x-m)^2 = -2p(y-n).$$

Každá parabola, ktorá má os rovnobežnú s osou x, vrchol $V[m;n]$ a parameter p, je vyjadrená jednou z rovníc:

$$(y-n)^2 = 2p(x-m) \quad \text{alebo} \quad (y-n)^2 = -2p(x-m).$$

Uvedené rovnice nazývame vrcholovými rovnicami paraboly.

Ž: *Asi preto, že tam vystupujú súradnice vrchola paraboly.*

U: Okrem vrcholovej rovnice paraboly poznáme aj všeobecnú rovnicu paraboly. Vznikne úpravou vrcholovej rovnice – roznásobením zátvoriek a umiestnením všetkých členov na jednu stranu rovnice. Všeobecná rovnica paraboly má tvar:

$$x^2 + Ax + By + C = 0 \quad \text{alebo} \quad y^2 + Ax + By + C = 0,$$

pričom $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Ž: *Hm… Vždy je len jedna neznáma v druhej mocnine.*

U: Napriek tomu parabola patrí ku kvadratickým útvarom, jej rovnica je kvadratická.

Príklad 1: *V sústave súradníc v rovine zakreslite paraboly dané nasledujúcim analytickým vyjadrením:*

a) $x^2 = 4y$,

b) $(y-2)^2 = -6(x+1)$.

Určte súradnice vrchola, ohniska a rovnicu direkčnej priamky.

Ž: *Paraboly sú dané vrcholovými rovnicami.*

U: Máš pravdu. Pripomeniem len, že vrcholová rovnica paraboly má jeden z týchto tvarov v rámčeku,

- $(x-m)^2 = 2p(y-n)$,
- $(x-m)^2 = -2p(y-n)$,
- $(y-n)^2 = 2p(x-m)$,
- $(y-n)^2 = -2p(x-m)$,

kde vrchol paraboly je bod $V[m;n]$, p je parameter paraboly – vzdialenosť ohniska od direkčnej priamky. Os paraboly je rovnobežná s niektorou osou sústavy súradníc.

Ž: *Začnem s úlohou a). Máme danú parabolu:*

$$x^2 = 4y.$$

Keďže rovnica sa volá vrcholová, mal by som vedieť z nej vyčítať súradnice vrchola paraboly. Tu je to jednoduché. Vrchol paraboly je bod $V[0;0]$.

U: Súhlasím. Aký parameter má parabola?

Ž: *To je tiež ľahké. Parameter to je to číslo, ktoré vystupuje v rovnici, teda* $p = 4$.

U: Nesúhlasím. Ak sa pozrieš na uvedené tvary rovníc paraboly, vidíš, že platí $2p = 4$. Čo znamená, že $p = 2$.
Vedel by si povedať ako je umiestnená parabola v sústave súradníc? S ktorou osou sústavy súradníc je rovnobežná jej os?

Ž: *Hm... V druhej mocnine je neznáma* x. *To znamená, že os paraboly je rovnobežná s osou...*

U: Ak si to nevieš zapamätať, dám ti malú pomôcku. Ak je x v druhej mocnine, znamená to, že parabola predstavuje kvadratickú funkciu, a preto môže byť otočená len „hore“ alebo „dole“. Jej os je rovnobežná s osou y. Ak je v druhej mocnine y, parabola nepredstavuje graf funkcie, je otočená „doprava“ alebo „doľava“, jej os je rovnobežná s osou x.

Ž: *Pochopil som. V našom prípade je v druhej mocnine* x, *je to funkcia, a preto je os paraboly rovnobežná s osou* y. *Na pravej strane máme kladné číslo* 4, *preto je otočená „hore“.*

U: Dobre. Určme teraz súradnice ohniska paraboly. Ohnisko F sa nachádza na osi paraboly, v našom prípade na osi y. Jeho vzdialenosť od vrchola paraboly je rovná polovici vzdialenosti ohniska a direkčnej priamky.

Ž: *Jasné! Parameter je $p = 2$, jeho polovica je 1. Preto ohnisko má súradnice*

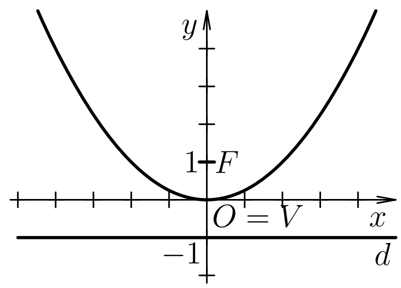
$$F[0; 1].$$

U: Správne. A teraz rovnica direkčnej priamky.

Ž: *Direkčná priamka je rovnobežná s osou x a nachádza sa pod parabolou.*

U: Áno. Vzdialenosť vrchola a direkčnej priamky je 1, tak ako aj vzdialenosť vrchola a ohniska To znamená, že prechádza bodom $[0; -1]$ ležiacim na y-ovej osi, jej rovnica je: $d : y = -1$.

Ž: *Už len zakreslím parabolu do sústavy súradníc. Zakreslím ohnisko, vrchol a direkčnú priamku, nakoniec aj parabolu otočenú nahor.*



Ž: *Pokračujem úlohou b):*

$$(y - 2)^2 = -6(x + 1).$$

Určím súradnice vrchola paraboly. Sú to čísla v zátvorkách akurát s opačným znamienkom. Vrchol paraboly je bod $V[2; -1]$.

U: Moment! Musíš sa pozrieť aj na poradie. Prvá súradnica je vždy x, preto sa musíš pozrieť na zátvorku $(x + 1)$.

Ž: *Jáj! Máte pravdu. Čiže $V[-1; 2]$*

U: Teraz už súhlasím. Aký parameter má parabola?

Ž: *Parameter je 6 deleno 2, t. j. $p = 3$.*

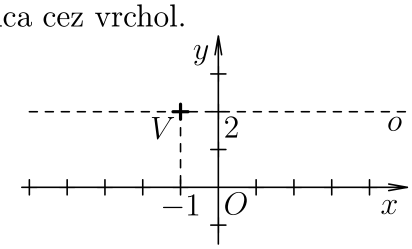
U: S ktorou osou sústavy súradníc je rovnobežná os paraboly?

Ž: *Chcete vedieť ako je umiestnená v sústave súradníc? V druhej mocnine je neznáma y. To znamená, že to nie je funkcia, parabola je „naležato“, môže byť doprava alebo doľava. Jej os je rovnobežná s osou x.*

U: Áno. Navyše pri parametri máme záporné znamienko, preto bude parabola otočená doľava. Určme súradnice ohniska paraboly.

Ž: *Hm. . . to je teraz ťažšie ako v predchádzajúcom prípade.*

U: Pomôžeme si obrázkom. Vyznačíme si na ňom vrchol $V[-1; 2]$ a os paraboly. Je to rovnobežka s osou x prechádzajúca cez vrchol.



Ohnisko F sa nachádza na osi paraboly.

Ž: *Aha! Jeho y-ová súradnica je* 2.

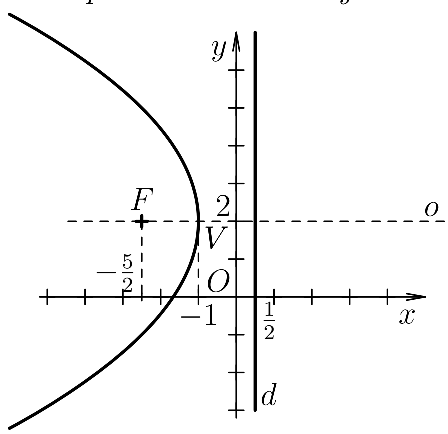
U: Áno. Prvú súradnicu určíme pomocou parametra.

Ž: *Jasné! Parameter je $p = 3$, jeho polovica je $\frac{3}{2}$. Túto hodnotu odpočítam od prvej súradnice vrchola, $-1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$. Ohnisko má súradnice*

$$F[-\frac{5}{2}; 2].$$

U: Správne. A teraz rovnica direkčnej priamky.

Ž: *Direkčná priamka je rovnobežná s osou y a nachádza sa vpravo od paraboly. Teraz k prvej súradnici vrchola pripočítam polovicu parametra, $-1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. Rovnica direkčnej priamky je $d : x = \frac{1}{2}$. Nakoniec zakreslím parabolu do sústavy súradníc.*



Úloha 1: *V sústave súradníc v rovine zakreslite paraboly dané nasledujúcim analytickým vyjadrením:*

a) $y^2 = 2(x - 3)$,

b) $(x + 4)^2 = -8(y - 2)$.

Určte súradnice vrcholu, ohniska a rovnicu direkčnej priamky.

Výsledok:

a) $o \parallel o_x, p = 1, V[3; 0], F[\frac{7}{2}; 0], d : x = \frac{5}{2}$,

b) $o \parallel o_y, p = 4, V[-4; 2], F[-4; 0], d : y = 4$

Príklad 2: *Napíšte analytické vyjadrenie paraboly, ak je dané jej ohnisko $F[4;-2]$ a direkčná priamka $d: y = 4$.*

U: Akú rovnicu paraboly poznáš?

Ž: *Poznám vrcholovú a všeobecnú rovnicu paraboly. Viac sa mi však páči vrcholová.*

U: Dobre. Tvar vrcholovej rovnice paraboly závisí od jej polohy v sústave súradníc. Skúsme na základe zadania určiť jej polohu.

Ž: *Direkčná priamka je $d: y = 4$. To je priamka rovnobežná s osou x. Preto os paraboly je zase rovnobežná s osou y.*

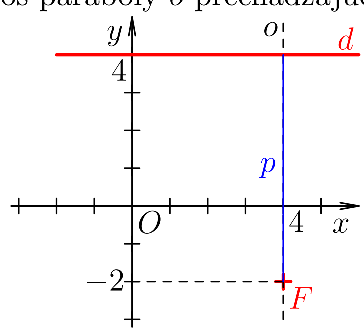
U: Výborne. Parabola, ktorej os je rovnobežná s osou y má jednu z týchto rovníc:

$$(x-m)^2 = 2p(y-n) \quad \text{alebo} \quad (x-m)^2 = -2p(y-n),$$

kde vrchol paraboly je bod $V[m;n]$, a p je parameter paraboly.

Ž: *Parameter paraboly by som vedel určiť. Je to vzdialenosť ohniska od direkčnej priamky. Použijem vzorec na určenie vzdialenosti bodu od priamky.*

U: Počkaj! Bude ti stačiť aj obrázok. V sústave súradníc si načrtneme ohnisko $F[4;-2]$, direkčnú priamku $d: y = 4$ a os paraboly o prechádzajúcu bodom F.



Ž: *Naozaj! Vzdialenosť ohniska od priamky d vidno z obrázka. Je to 6, čiže $p = 6$.*

U: Zároveň pomocou obrázka určíme aj súradnice vrchola paraboly.

Ž: *Vrchol leží na osi paraboly „v strede“ medzi ohniskom a priamkou d. $V[4;1]$.*

U: Správne. Ako je parabola otočená?

Ž: *Ohnisko musí byť „vo vnútri“ paraboly a parabola nepretína direkčnú priamku... Parabola je otočená dole.*

U: To znamená, že v rovnici vystupuje záporné znamienko. Môžeme napísať vrcholovú rovnicu paraboly.

Ž: *Zopakujem si to: $V[4;1]$, parameter $p = 6$, $6 \cdot 2 = 12$ a k tomu znamienko mínus. Rovnica paraboly je:*

$$(x-4)^2 = -12(y-1).$$

U: Výborne.

Úloha 1: *Napíšte analytické vyjadrenie paraboly, ak je dané ohnisko* $F[3;-1]$ *a direkčná priamka* $d: x = -1$.

Výsledok: $(y+1)^2 = 8(x-1)$

Úloha 2: *Napíšte analytické vyjadrenie paraboly, ktorá má vrchol v začiatku sústavy súradníc a ohnisko* $F[2;0]$.

Výsledok: $y^2 = 8x$

Úloha 3: *Napíšte analytické vyjadrenie paraboly, ktorá má vrchol* $V[2;-5]$ *direkčnú priamku* $d: y = 5$.

Výsledok: $(x-2)^2 = -20(y+5)$

Príklad 3: *Rozhodnite, či nasledujúca rovnica je analytickým vyjadrením paraboly:*

$$x^2 + 4y - 6x + 3 = 0.$$

V prípade, že ide o parabolu, určte súradnice jej vrchola a parameter.

Ž: *Je to všeobecná rovnica paraboly.*

U: Mohla by byť. Zistíme to jej úpravou na vrcholový tvar. Ako vyzerá vrcholová rovnica paraboly?

Ž: *Je to rovnica typu:*

$$(x - m)^2 = 2p(y - n) \quad \textit{alebo} \quad (x - m)^2 = -2p(y - n).$$

U: Pričom m, n sú súradnice vrchola paraboly a p je jej parameter. Na rozdiel od všeobecnej rovnice, je člen s x, ktorý je v druhej mocnine, upravený na „štvorec“.

Ž: *To myslíte asi tú zátvorku $(x - m)^2$, však?*

U: Presne tak. Znamená to urobiť úpravu na štvorec.

Ž: *Hm... tak to si dám najprv dohromady členy s x.*

U: A ostatné členy dáme na pravú stranu.

Ž: *Zopakujem si danú rovnicu:*

$$x^2 + 4y - 6x + 3 = 0.$$

Takže:

$$x^2 - 6x = -4y - 3.$$

U: Pozrieme sa na ľavú stranu. Chceme, aby sme tam mali výraz tvaru $a^2 - 2ab + b^2$.

Ž: *Chýba mi člen b^2. Asi by som si ho mal nejako vyrobiť...*

U: Člen $2ab$ má tvar $6x$, čo sa dá napísať aj ako $2 \cdot x \cdot 3$.

Ž: *Z toho je jasné, že $b = 3$. Chýbajúci člen b^2 bude $3^2 = 9$.*

U: Takže ho pripočítame na ľavú stranu. A aby platila rovnosť, musíme ho pripočítať aj na pravú stranu rovnice. Preto:

$$x^2 - 6x + 9 = -4y - 3 + 9.$$

Ž: *Aha! Na ľavej strane máme podľa vzorca $(x - 3)^2$ a na pravej strane spočítam $-3 + 9 = 6$, to znamená:*

$$(x - 3)^2 = -4y + 6.$$

U: Súhlasím. Upravíme ešte pravú stranu tak, aby sme z nej mohli prečítať parameter paraboly. Koeficient pri y vyberieme pred zátvorku.

Ž: *Na pravej strane vyberiem (-4) pred zátvorku a dostávam:*

$$(x - 3)^2 = -4(y - \tfrac{3}{2}).$$

U: A to je vrcholová rovnica paraboly. Vedel by si mi povedať aké sú súradnice jej vrchola a aký je jej parameter?

Ž: *Súradnice vrcholu - to sú čísla v zátvorkách, ale s opačným znamienkom, čiže* $V[3; \frac{3}{2}]$. *Parameter* $p = 2$.

U: Výborne.

Úloha 1: *Rozhodnite, či nasledujúca rovnica je analytickým vyjadrením paraboly:*

$$x^2 - 2x - 4y + 1 = 0.$$

V prípade, že ide o parabolu, určte súradnice jej vrcholu a jej parameter.

Výsledok: $V[1; 0], p = 2$

Úloha 2: *Rozhodnite, či nasledujúca rovnica je analytickým vyjadrením paraboly:*

$$y^2 - 3x - 2y + 7 = 0.$$

V prípade, že ide o parabolu, určte súradnice jej vrcholu a jej parameter.

Výsledok: $V[2; 1], p = \frac{3}{2}$

Príklad 4: *Určte rovnice všetkých parabol, ktorých os je rovnobežná s osou x, ich parameter je 2 a prechádzajú bodmi $A[-2;4]$ a $B[6;0]$.*

U: Akú rovnicu paraboly poznáš?

Ž: *Poznám vrcholovú rovnicu paraboly.*

U: Dobre. Tvar vrcholovej rovnice paraboly závisí od jej polohy v sústave súradníc. Naša parabola má mať os rovnobežnú s osou x.

Ž: *Parabola, ktorej os je rovnobežná s osou x má jednu z týchto rovníc:*

$$(y-n)^2 = 2p(x-m) \quad \textit{alebo} \quad (y-n)^2 = -2p(x-m),$$

kde vrchol paraboly je bod $V[m;n]$, a p je parameter paraboly.

U: Výborne. Na určenie rovnice paraboly potrebujeme parameter a súradnice vrchola paraboly.

Ž: *Parameter poznám, $p=2$.*

U: Súhlasím. Preto parabola bude mať jednu z týchto rovníc:

$$(y-n)^2 = 4(x-m) \quad \text{alebo} \quad (y-n)^2 = -4(x-m).$$

Ž: *Hm... Ako ale zistím súradnice vrchola?*

U: Máme dané dva body A a B, ktoré patria parabole. Ak daný bod patrí parabole, musia jeho súradnice vyhovovať rovnici paraboly.

Ž: *Aha! Dosadím súradnice bodov A a B do rovnice a získam tak dve rovnice s neznámymi m, n.*

U: Máme však dve možnosti pre rovnicu paraboly. Začnime preto s prvou, nech parabola má rovnicu:

$$(y-n)^2 = 4(x-m).$$

Ž: *Dosadím najprv súradnice bodu A, za x číslo -2 a za y číslo 4:*

$$(4-n)^2 = 4(-2-m).$$

Potom súradnice bodu B, 6 a 0:

$$(0-n)^2 = 4(6-m).$$

U: Upravíme pravé strany a dostávame sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} (4-n)^2 &= -8-4m \\ n^2 &= 24-4m. \end{aligned}$$

Na riešenie navrhujem použiť sčítaciu metódu.

Ž: *Druhú rovnicu vynásobím* (-1) *a rovnice sčítam:*

$$(4-n)^2 - n^2 = -8 - 4m - 24 + 4m.$$

Po úprave mi vypadne m. *Na ľavej strane umocním zátvorku, dostávam:*

$$16 - 8n + n^2 - n^2 = -32.$$

Hurá! Vypadne mi aj n^2 *a získavam jednoduchú rovnicu:*

$$-8n = -48,$$

z čoho

$$n = 6.$$

U: Výborne.

Ž: *Dopočítam súradnicu* m. *Dosadím* $n = 6$ *napr. do druhej rovnice* $n^2 = 24 - 4m$ *a dostávam:*

$$36 = 24 - 4m,$$

z čoho

$$m = -3.$$

Vrchol paraboly je bod $V[-3; 6]$.

U: Parabola má rovnicu:

$$(y-6)^2 = 4(x+3).$$

U: A teraz druhá možnosť. Nech parabola má rovnicu:

$$(y-n)^2 = -4(x-m).$$

Ž: *Budem postupovať rovnako. Dosadím súradnice bodu* A, -2 *a* 4 *a potom súradnice bodu* B, 6 *a* 0. *Dostávam sústavu rovníc:*

$$\begin{aligned}(4-n)^2 &= 8 + 4m\\ n^2 &= -24 + 4m.\end{aligned}$$

Druhú rovnicu vynásobím (-1) *a rovnice sčítam:*

$$(4-n)^2 - n^2 = 8 + 4m + 24 - 4m.$$

Ľavá strana je taká istá ako v predchádzajúcom prípade a na pravej strane mám 32:

$$16 - 8n = 32.$$

To znamená, že

$$n = -2.$$

U: Súhlasím.

Ž: *Dosadím* $n = -2$ *napr. do druhej rovnice* $n^2 = -24 + 4m$ *a dostávam:*

$$4 = -24 + 4m,$$

z čoho

$$m = 7.$$

Vrchol paraboly je bod $V[7; -2]$ *a jej rovnica je:*

$$(y + 2)^2 = -4(x - 7).$$

U: Výborne. Úloha má dve riešenia.

Úloha 1: *Určte rovnice všetkých parabol, ktorých os je rovnobežná s osou* y*, majú vrchol* $V[3; 5]$ *a prechádzajú bodom* $A[0; 2]$.

Výsledok: $(x - 3)^2 = -3(y - 5)$

Úloha 2: *Určte rovnice všetkých parabol, ktorých os je rovnobežná s osou* y *a prechádzajú bodmi* $C[0; -1]$, $D[-2; 7]$ *a* $E[5; 14]$.

Výsledok: $(x - 1)^2 = y + 2$

Príklad 5: *Do paraboly $4x = y^2$ vpíšte rovnostranný trojuholník ABC tak, aby vrchol A bol totožný s vrcholom paraboly a vrcholy B a C ležali na parabole. Vypočítajte súradnice bodov A, B, C a dĺžku strany tohto trojuholníka.*

Ž: *Pochopil som dobre? Mám do paraboly vpísať trojuholník?*

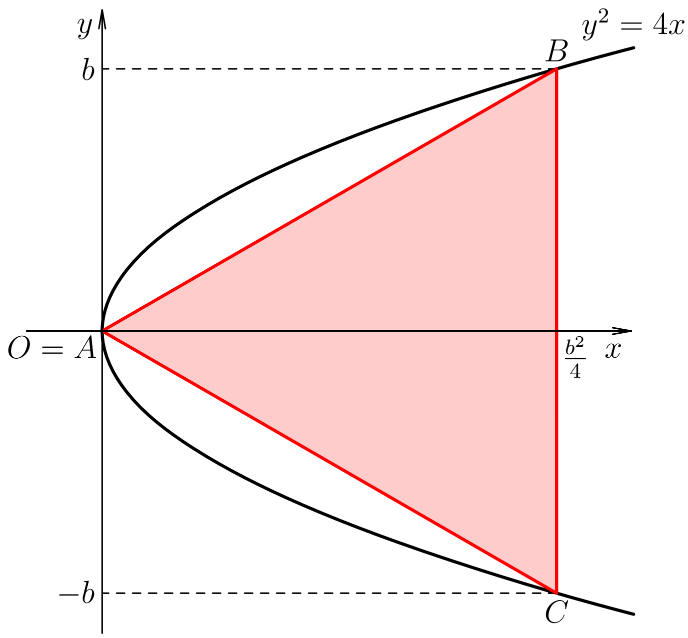
U: Áno. Znamená to, že všetky vrcholy trojuholníka ABC ležia na parabole.

Ž: *Bod A poznám, má to byť vrchol paraboly. Na základe jej rovnice $4x = y^2$ viem, že $A[0; 0]$.*

U: Súhlasím.

Ž: *Ako zistím súradnice bodov B a C?*

U: Pomôžeme si obrázkom. Z rovnice paraboly vieme, že jej os je rovnobežná s osou x sústavy súradníc. Vrchol je v začiatku sústavy súradníc. Načrtneme parabolu a do nej rovnostranný trojuholník ABC.



Ž: *Body B a C sú umiestnené pekne symetricky.*

U: Samozrejme. Parabola je osovo súmerná podľa svojej osi a aj rovnostranný trojuholník je osovo súmerný podľa osi prechádzajúcej jedným z jeho vrcholov kolmo na protiľahlú stranu.

Ž: *To ale znamená, že body B a C majú rovnakú prvú súradnicu.*

U: Správne. Aj to využijeme. Venujeme sa najprv bodu B. Nech má súradnice $B[x_B; y_B]$. Bod B patrí parabole, preto jeho súradnice vyhovujú rovnici paraboly.

Ž: *Dosadím ich do rovnice a dostávam:*

$$4x_B = y_B^2.$$

U: Pre jednoduchosť označme $y_B = b$. Potom platí:

$$x_B = \frac{b^2}{4}.$$

Bod B má súradnice $B[\frac{b^2}{4}; b]$.

Ž: *Aha! A pre bod C platí $C[\frac{b^2}{4}; -b]$. Prvá súradnica je rovnaká a druhá je opačná.*

U: Dobre, máme pomocou neznámej b určené súradnice bodov B a C. Trojuholník ABC je rovnostranný. Čo to znamená?

Ž: *Má rovnako dlhé strany, rovnaké vnútorné uhly...*

U: Informácia o stranách nám bude stačiť. Platí: $|BC| = |AB|$. Vyjadrime si tieto veľkosti pomocou súradníc.

Ž: *Na určenie vzdialenosti dvoch bodov použijem vzorec. Bod $B[\frac{b^2}{4}; b]$ a bod $C[\frac{b^2}{4}; -b]$, preto platí:*

$$|BC| = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}\right)^2 + (b+b)^2}.$$

Podobne, keďže $A[0; 0]$ platí:

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - 0\right)^2 + (b-0)^2}.$$

U: Výborne. Porovnaním oboch veľkostí dostávame rovnicu:

$$\sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}\right)^2 + (b+b)^2} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - 0\right)^2 + (b-0)^2}.$$

Jej vyriešením získame neznámu b.

Ž: *No... Nie je to veľmi pekná rovnica.*

U: Na oboch stranách vystupujú odmocniny, preto umocníme obe strany rovnice na druhú. Zároveň nuly na pravej strane môžeme vynechať.

Ž: *Po umocnení dostávam:*

$$\left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}\right)^2 + (b+b)^2 = \left(\frac{b^2}{4}\right)^2 + b^2.$$

Ten prvý člen vynechám, je to predsa nula, neviem, čo ho toľko opisujem... Mám teda rovnicu:

$$(b+b)^2 = \left(\frac{b^2}{4}\right)^2 + b^2.$$

U: Tá už nevyzerá tak hrozivo, pravda? Vyriešiš ju?

Ž: *Pokúsim sa. Umocním zátvorky:*

$$4b^2 = \frac{b^4}{16} + b^2.$$

Odstránim zlomok, teda vynásobím rovnicu 16*:*

$$64b^2 = b^4 + 16b^2.$$

A nakoniec dostávam rovnicu:

$$48b^2 - b^4 = 0.$$

U: Je to síce rovnica štvrtého stupňa, ale pomerne jednoduchá. Stačí vybrať b^2 pred zátvorku.

Ž: *OK. Vyzerá to takto:*

$$b^2(48 - b^2) = 0.$$

Z toho máme riešenia:

$$b = 0, \quad a \quad b = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}.$$

U: Súhlasím. Ak sa pozrieme na obrázok, vidíme, že riešenie $b = 0$ nevyhovuje.

Ž: *Jasné, to by nebol trojuholník, lebo všetky vrcholy by splynuli do jedného bodu.*

U: To znamená, že máme riešenie $b = 4\sqrt{3}$. Súradnice bodov boli $B[\frac{b^2}{4}; b]$ a $C[\frac{b^2}{4}; -b]$. Preto po dosadení $b = 4\sqrt{3}$ dostávame:

$$B[12; 4\sqrt{3}] \quad \text{a} \quad C[12; -4\sqrt{3}].$$

Je zrejmé, že použitím druhého riešenia $b = -4\sqrt{3}$ dostávame len vymenené súradnice bodov B a C.

Ž: *Vypočítam ešte dĺžku strany trojuholníka, napr. pomocou bodov $A[0; 0]$ a $B[12; 4\sqrt{3}]$.*

$$|AB| = \sqrt{(12-0)^2 + (4\sqrt{3} - 0)^2} = \sqrt{144 + 48} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}.$$

Veľkosť strany trojuholníka ABC je $8\sqrt{3}$.