Kružnica

RNDr. Viera Vodičková

U: O kružnici si už určite počul.

Ž: *Samozrejme. S kružnicou sa stretávame všade. Je to také „koliesko“. A teraz vážne. Kružnica je daná stredom a polomerom. A všetky body na kružnici sú od stredu vzdialené o tento polomer.*

U: Ja to už len upresním formou definície. ***Kružnicou k so stredom S a polomerom r nazývame množinu všetkých bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od stredu S je rovná polomeru r.*** Symbolický zápis si pozri v rámčeku. Rovina, v ktorej pracujeme, sa nazýva dvojrozmerný Euklidovský priestor a označuje sa $\mathbb{E}_2$.

$$\boxed{k(S;r) = \{X \in \mathbb{E}_2; |XS| = r; r \in \mathbb{R}^+\}}$$

Podobne sa definuje aj ***kruh***.

Ž: *Myslíte to „vnútro“? Skúsim to sám.* **Kruhom K so stredom S a polomerom r nazývame množinu všetkých bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od stredu S je menšia alebo rovná polomeru r.**

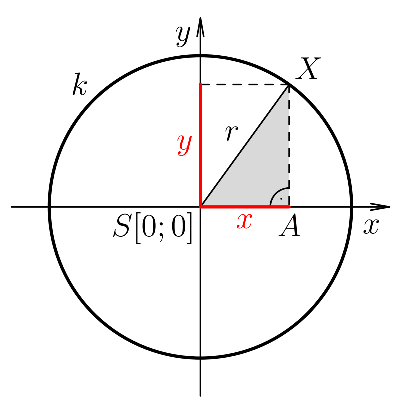
U: Budeme sa zaoberať tým ako kružnicu, prípadne kruh, vyjadríme analyticky.

Ž: *Aj pre kružnicu je vymyslená rovnica? Tak ako pre priamku a rovinu?*

U: Áno, ale nepovedal by som „vymyslená“, skôr odvodená. A my si tiež naznačíme jej odvodenie. Rovnica kružnice závisí od jej polohy v sústave súradníc. Najprv si zoberme najjednoduchší prípad. Kružnicu si umiestnime do sústavy súradníc tak, že jej stred bude v začiatku sústavy súradníc.

Ž: *Teda stred kružnice bude bod $S[0;0]$.*

U: Áno. Polomer kružnice bude ľubovoľný a označíme ho r. Ak chceme nájsť rovnicu kružnice, musíme zistiť, čo platí pre súradnice ľubovoľného bodu na kružnici. Vyznačme si preto ľubovoľný bod X patriaci kružnici k. Bod X má súradnice $X[x;y]$. Všetko môžeš sledovať na obrázku.



Ž: *Na obrázku vidím, že sa tam vytvoril pravouhlý trojuholník SAX.*

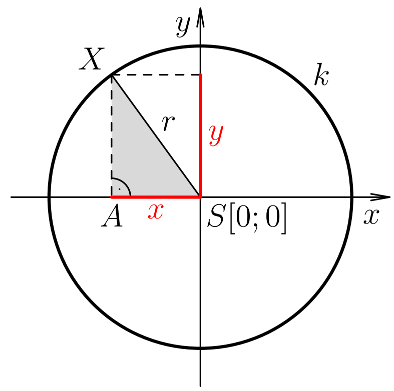
U: Presne tak. Odvesny tohto trojuholníka majú dĺžky rovnajúce sa jednotlivým súradniciam bodu X, čiže $|SA| = x$ a $|AX| = y$.

Ž: *Prepona má zase dĺžku r, lebo je to vzdialenosť bodu X od stredu kružnice.*

U: Pytagorova veta pre tento trojuholník hovorí:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

U: A teraz si zoberme bod iný bod $X[x; y]$ patriaci kružnici k, nech je napr. v II. kvadrante. Pozri si obrázok.



Ž: *Však to je taká istá situácia. Opäť tam máme pravouhlý trojuholník SAX s preponou rovnou polomeru r.*

U: To máš pravdu. Nakoľko však bod X sa nachádza v II. kvadrante, je jeho x-ová súradnica záporná. Preto $|SA| = |x|$ a samozrejme $|AX| = y$. Pytagorova veta pre tento trojuholník hovorí:

$$|x|^2 + y^2 = r^2.$$

Ž: *Myslím, že je to aj tak to isté. Veď platí: $|x|^2 = x^2$.*

U: Súhlasím. Podobnú situáciu by sme dostali aj v ostatných kvadrantoch. Preto môžeme povedať, že pre všetky body $X[x; y]$ patriace kružnici k platí:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

A to je rovnica kružnice.

Ž: *Už? Zdá sa to celkom jednoduché.*

U: Tak napr. rovnica

$$x^2 + y^2 = 4$$

predstavuje kružnicu. Vedel by si mi povedať, aký má polomer?

Ž: *Polomer? No predsa 4.*

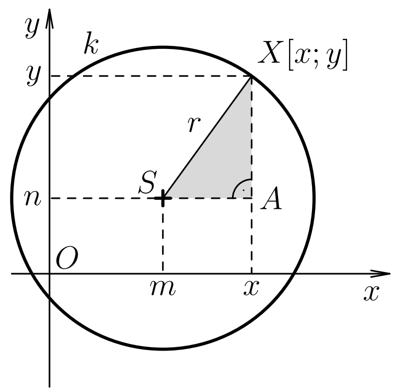
U: Pozor! Na pravej strane odvodenej rovnice máme výraz r^2. Preto $r^2 = 4$, z čoho $r = 2$. Teraz mi skús povedať ako by vyzerala rovnica kružnice s polomerom 6.

Ž: *Už sa nedám nachytať. Keďže $6^2 = 36$, rovnica bude:*

$$x^2 + y^2 = 36.$$

U: Správne.

U: Zoznámili sme sa s rovnicou kružnice, ktorej stred je umiestnený v začiatku sústavy súradníc. Teraz si zoberieme všeobecný prípad. Nech stred kružnice je bod $S[m; n]$. Ak si takúto situáciu zakreslíme v sústave súradníc, opäť na obrázku nájdeme pravouhlý trojuholník SAX.



Ž: *Áno, vidím ho. Prepona má opäť dĺžku r.*

U: Odvesny na našom obrázku majú dĺžku $|SA| = x - m$ a $|AX| = y - n$.

Ž: *Naozaj! Veľkosť úsečky SA je daná rozdielom x-ových súradníc bodov A a S. A veľkosť úsečky AX zase rozdielom y-ových súradníc.*

U: Preto Pytagorova veta pre trojuholník SAX vyzerá teraz takto:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Ž: *A to je rovnica kružnice?*

U: Áno. Naviac sa nazýva ***stredová rovnica kružnica*** alebo ***stredový tvar rovnice kružnice***, nakoľko v nej vystupujú súradnice stredu kružnice. Zhrnieme si to.
Rovnica

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

kde r je kladné reálne číslo, sa nazýva ***stredový tvar*** rovnice kružnice k so stredom $S[m; n]$ a polomerom r.

U: Podobnou rovnicou, či vlastne nerovnicou sa dá analyticky vyjadriť kruh.

Ž: *No, keď už hovoríte o nerovnici, snáď by som aj vedel ako. Kruh je „vnútro“ kružnice, preto by to mohlo vyzerať takto:*

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 < r^2.$$

U: Až na jednu maličkosť. Tvoja nerovnica vyjadruje len ***vnútornú oblasť kružnice***. Kruh nie je len „vnútro“ kružnice, ale kruhu patria aj body na obvode, čiže na kružnici. Preto v nerovnici vystupuje znak menší alebo rovný. Čiže rovnica kruhu má tvar:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 \leqq r^2.$$

Čo bude potom vyjadrovať nerovnica:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 > r^2?$$

Ž: *Budú to body mimo kruhu, teda predstavuje* **vonkajšiu oblasť kružnice**.

U: Okrem stredovej rovnice kružnice poznáme ešte aj ***všeobecnú rovnicu*** kružnice.

Ž: *Tušil som, že to nebude také jednoduché.*

U: Ale ani také zložité, neboj sa. Všeobecná rovnica kružnice je len inak upravená stredová rovnica. Získame ju tak, že v stredovej rovnici

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

roznásobíme zátvorky a vzniknuté členy trochu usporiadame. Môžeš si to skúsiť, aspoň uvidím ako ovládaš vzorec $(a-b)^2$.

Ž: *Uf! No dobre. Použitím spomenutého vzorca dostávam:*

$$(x^2 - 2xm + m^2) + (y^2 - 2yn + n^2) = r^2.$$

U: Súhlasím. A teraz sa pozrime, aké členy tam vystupujú. Neznámymi sú pre nás len súradnice x, y ľubovoľného bodu kružnice. Pre danú kružnicu sú m, n a r konštanty. Upravíme preto vzniknutú rovnicu takto:

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + (m^2 + n^2 - r^2) = 0.$$

Ž: *Aha! Zoradili ste členy: najprv sú neznáme x a y na druhú, potom členy s x a y a potom ostatné - to by mali byť konštanty.*

U: To si vystihol. Aby sme v rovnici nemali toľko písmenok, označíme konštanty ináč. Konštantu pri x nazveme a, konštantu pri y nazveme b a zvyšok označíme ako c.

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + (m^2 + n^2 - r^2) = 0,$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Ž: *A máme všeobecnú rovnicu kružnice. Pravdu povediac, veľmi sa mi nepáči.*

U: Stredový tvar rovnice je vhodnejší, lebo sa z neho dajú vyčítať súradnice stredu kružnice a jej polomer. Zo všeobecnej rovnice nevidno na prvý pohľad nič. Ak budeme chcieť zistiť aké súradnice má stred kružnice, budeme musieť všeobecnú rovnicu upraviť na stredový tvar.

Ž: *No to je pekný galimatiáš. Načo je potom dobrá všeobecná rovnica?*

U: Možno sa to teraz nezdá, ale pri niektorých úlohách je naozaj vhodnejšia. O tom sa môžeš presvedčiť v časti príklady. Všeobecná rovnica kružnice má ešte jeden problém.

Ž: *No prosím!*

U: V rovnici vystupujú tri parametre a, b, c - to sú reálne čísla. Avšak nie každá taká trojica čísel a, b, c vyjadruje kružnicu.

Ž: *Tomu nerozumiem.*

U: Pri úprave na stredový tvar sa nám môže stať, že hodnota polomeru na druhú by mala byť nula alebo nejaké záporné číslo.

Ž: *To je predsa hlúposť. Už polomer ako vzdialenosť by mal byť kladný, nieto ešte jeho druhá mocnina!*

U: Samozrejme. Preto v danom prípade nepôjde o rovnicu kružnice. Nevýhodou je opäť to, že to na prvý pohľad nevidno, zistíme to až po úprave.

Ž: *Tá všeobecná rovnica sa mi páči čoraz menej.*

U: Definíciu preto formulujeme nasledovne: Ak rovnica $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, vyjadruje niektorú kružnicu, tak sa nazýva ***všeobecná rovnica kružnice*** alebo ***všeobecný tvar rovnice kružnice***.

U: Uviedli sme si dva typy rovnice kružnice a to stredový tvar:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

a všeobecný tvar:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Zapamätaj si, že každá rovnica tvaru $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ je rovnicou kružnice, ale každá rovnica tvaru $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ nemusí byť kružnicou.
Ak si všimneš, neznáme x a y sa v rovniciach vyskytujú v druhej mocnine. Preto kružnicu nazývame aj kvadratickým útvarom.

Ž: *Aha. Priamka a rovina mali v rovnici len x a y, skrátka len v prvej mocnine ...*

U: Preto sme ich nazývali lineárnymi útvarmi.

Príklad 1: *Napíšte rovnicu kružnice k, ktorá má stred $S[3;-4]$ a polomer $r=2$.*

a) Určte druhú súradnicu bodu $A[4;a]$, ak viete, že bod A patrí kružnici k.

b) Zistite, či bod $B[2;-2]$ patrí kružnici k.

Ž: *Poznám dva typy rovnice kružnice: stredový tvar a všeobecný tvar. Ktorý mám použiť?*

U: Tak si to zopakujme. Stredovým tvarom rovnice kružnice k so stredom $S[m;n]$ a polomerom r nazývame rovnicu

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2.$$

Všeobecná rovnica kružnice zase má tvar

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

kde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Ž: *Poznám súradnice stredu kružnice, tak sa mi bude asi hodiť stredový tvar. Neviem si predstaviť, ako by som hľadal koeficienty a,b,c do všeobecnej rovnice...*

U: Súhlasím. Takže $m=3$, $n=-4$ a $r=2$.

Ž: *Môžem dosadiť do stredovej rovnice a dostávam:*

$$(x-3)^2+(y-4)^2=2^2.$$

U: Pozor! $n=-4$. Preto druhý člen vyzerá takto: $(y-(-4))^2$, čo dáva $(y+4)^2$.

Ž: *Máte pravdu, pomýlil som sa v znamienku. Stredový tvar rovnice danej kružnice je:*

$$(x-3)^2+(y+4)^2=4.$$

U: Správne.

U: Vedel by si teraz napísať aj všeobecný tvar rovnice tejto kružnice?

Ž: *No, pamätám sa, že všeobecná rovnica je len inak upravená stredová rovnica. Snáď by som mohol roznásobiť zátvorky?*

U: Presne to treba urobiť. Roznásobiť zárvorky a všetky členy dať na jednu stranu.

Ž: *Dobre. Zátvorky roznásobím podľa vzorca $(a\pm b)^2$:*

$$(x^2-2x\cdot 3+9)+(y^2+2y\cdot 4+16)=4.$$

Trochu to upravím a presuniem všetko na ľavú stranu:

$$x^2-6x+9+y^2+8y+16-4=0.$$

Vidím, že ešte môžem sčítať čísla $9+16-4=21$. Všeobecná rovnica kružnice má tvar:

$$x^2+y^2-6x+8y+21=0.$$

U: Výborne.

U: Prejdime na úlohu a).

Ž: *Bod $A[4; a]$ má patriť kružnici...*

U: Vždy platí, ak nejaký bod patrí útvaru, tak jeho súradnice musia vyhovovať rovnici tohto útvaru.

Ž: *Aha! Takže súradnice bodu A musia vyhovovať rovnici kružnice, tú sme práve napísali:*

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4.$$

Dosadím do rovnice súradnice bodu A, za x číslo 4 a za y hľadané číslo a:

$$(4-3)^2 + (a+4)^2 = 4.$$

U: Dostali sme tak rovnicu s jednou neznámou a tou je druhá súradnica bodu A, hľadané číslo a. Stačí ju už len vyriešiť.

Ž: *Musím zase všetko poumocňovať... Možno som mal použiť všeobecnú rovnicu, tam to mám už umocnené.*

U: Dalo sa aj tak. Ale ani teraz nemáme až tak veľa práce.

Ž: *Umocňujem:*

$$1 + a^2 + 8a_2 + 16 = 4.$$

Vychádza mi z toho kvadratická rovnica, ktorá má tvar:

$$a^2 + 8a_2 + 13 = 0.$$

Vyriešim ju pomocou diskriminantu. Diskriminant sa rovná:

$$D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 64 - 52 = 12.$$

Korene sú:

$$a_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -4 \pm \sqrt{3}.$$

Dostali sme dve riešenia $a_1 = -4 + \sqrt{3}$ alebo $a_2 = -4 - \sqrt{3}$.

U: Zadaniu preto vyhovujú dva také body A a to $A_1[4; -4 + \sqrt{3}]$ a $A_2[4; -4 - \sqrt{3}]$.
Vrátim sa ešte k spôsobu výpočtu. K rovnici:

$$(4-3)^2 + (a_2+4)^2 = 4.$$

Povedal si, že musíš zase umocňovať. Ponúkam ti ešte iný spôsob riešenia, máš ho v rámčeku.

$$\boxed{\begin{aligned} 1 + (a+4)^2 &= 4 \\ (a+4)^2 &= 3 \\ |a+4| &= \sqrt{3} \\ a_1 = -4 + \sqrt{3} \quad \text{alebo} &\quad a_2 = -4 - \sqrt{3} \end{aligned}}$$

Ž: *No... Vyriešili ste to šikovne. Mne by to nenapadlo. A určite by som sa pomýlil v odmocňovaní a zabudol by som použiť absolútnu hodnotu.*

U: Prejdime na poslednú úlohu b).

Ž: *Mám zistiť, či bod B patrí kružnici. To už bude teraz ľahké. Stačí dosadiť jeho súradnice $B[2;-2]$ do rovnice kružnice a zistiť, či je splnená rovnosť.*

U: Súhlasím.

Ž: *Dosadzujem:*

$$(2-3)^2 + (-2+4)^2 = 4.$$

Spočítam, umocním čísla na ľavej strane a pýtam sa, či $1+4$ sa rovná 4? Dostávam $5 \neq 4$. Bod B neleží na kružnici.

U: Vedel by si mi povedať, či bod B patrí vnútornej alebo vonkajšej časti kružnice?

Ž: *Nakoľko $5 > 4$, domnievam sa, že bude vonku.*

U: Správne, bod B leží vo vonkajšej oblasti kružnice k.

Úloha 1: *Napíšte analytické vyjadrenie kružnice k, ktorá má stred $S[-2;-1]$ a polomer $r = 4$.*

Výsledok: $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 16$

Úloha 2: *Napíšte analytické vyjadrenie kruhu K, ktorý má stred $S[3;-6]$ a polomer $r = \sqrt{5}$.*

Výsledok: $(x-3)^2 + (y+6)^2 \leqq 5$

Úloha 3: *Zistite, akú polohu majú body $K[-1;-1]$, $L[3;2]$, $M[0;1]$ vzhľadom na kružnicu $k : (x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$.*

Výsledok: $K \in k$, L leží vo vonkajšej oblasti kružnice k, M leží vo vnútornej oblasti kružnice k

Príklad 2: *Napíšte rovnicu kružnice, ktorej priemerom je úsečka AB, pričom $A[-3;0]$ a $B[3;6]$.*

Ž: *Ak by som to mal narysovať, bolo by to jednoduché. Našiel by som stred úsečky AB - to by bol aj stred kružnice. Potom stačí zobrať kružidlo a hotovo.*

U: Analyticky to vyriešime veľmi podobne. Aké rovnice kružnice poznáš?

Ž: *Poznám stredový tvar rovnice kružnice:*

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2.$$

U: Pričom m, n sú súradnice stredu kružnice a r je jej polomer.

Ž: *Samozrejme. Takže aj tu budem musieť nájsť najprv stred kružnice.*

U: Presnejšie súradnice stredu S kružnice. Nájdeš ich tak, ako si povedal. Stred kružnice je aj stredom úsečky AB.

Ž: *Aha. Takže súradnice stredu úsečky AB získam ako aritmetický priemer súradníc jej krajných bodov A, B. Čiže prvá súradnica bodu S je $\frac{-3+3}{2}$, čo je 0. Podobne druhá súradnica je $\frac{0+6}{2}$, čo je 3. Stred kružnice S má súradnice $S[0;3]$.*

U: Výborne. Ostáva nám určiť polomer. Ako si hovoril, že to narysuješ?

Ž: *No... Kružidlo „zapichnem" do bodu S, naberiem vzdialenosť od S k A...*

U: To je presne ono. Polomerom kružnice bude vzdialenosť od bodu S k bodu A, čiže veľkosť úsečky AS.

Ž: *Veľkosť úsečky zistím podľa vzorca. Preto:*

$$|AS|=\sqrt{(s_1-a_1)^2+(s_2-a_2)^2}=\sqrt{(0+3)^2+(3-0)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

U: Súhlasím. Polomer kružnice je $r=3\sqrt{2}$. Teraz už stačí len napísať rovnicu kružnice.

Ž: *To len dosadím súradnice stredu a polomer. Rovnica hľadanej kružnice je:*

$$x^2+(y-3)^2=(3\sqrt{2})^2,$$

čo je:

$$x^2+(y-3)^2=18.$$

Úloha 1: *Napíšte rovnicu kružnice, ktorej priemerom je úsečka AB, pričom $A[0;0]$ a $B[-4;6]$.*

Výsledok: $(x+2)^2+(y-3)^2=13$

Príklad 3: *Rozhodnite, či nasledujúce rovnice sú rovnicami kružníc. V prípade, že ide o kružnicu, určte jej stred a polomer.*

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$,

b) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 29 = 0$.

Ž: *Myslím, že sú to všeobecné rovnice kružníc. Len ma mätie tá úloha: „rozhodnite, či sú to kružnice". Čo by to inak mohlo byť?*

U: Všeobecná rovnica kružnice je definovaná takto: ***Ak*** rovnica $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, vyjadruje niektorú kružnicu, tak sa nazýva všeobecná rovnica kružnice. Je tam tá podmienka „ak". Znamená to, že nie každá rovnica tohto tvaru vyjadruje kružnicu. Prečo? To uvidíš práve pri riešení tohto príkladu.

Ž: *Dobre. Počkám si teda na odpoveď.*

U: Ak chceme vedieť, či rovnica vyjaduje kružnicu, musíme sa pokúsiť upraviť ju na stredový tvar.

Ž: *Už viem, ak sa nám to nepodarí, tak to nebude rovnica kružnice.*

U: Tak nejako. Ako vyzerá stredový tvar rovnice kružnice?

Ž: *Je to rovnica typu:*

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

U: Pričom m, n sú súradnice stredu kružnice a r je jej polomer. Na rozdiel od všeobecnej rovnice, je upravená na „štvorce". Na ľavej strane je súčet druhých mocnín dvoch dvojčlenov.

Ž: *Myslíte asi tie zátvorky $(x - m)^2$ a $(y - n)^2$, však?*

U: Presne tie. Keď sme vyrábali všeobecnú rovnicu, tak sme tieto zátvorky roznásobili, resp. upravili podľa vzorca. Teraz urobíme presne opačný postup. Potrebujeme vyrobiť zátvorky typu $(x - m)^2$ a $(y - n)^2$. Znamená to urobiť úpravu na štvorec.

Ž: *Hm. . . tak to si dám najprv dohromady členy s x a členy s y.*

Ž: *Začnem s rovnicou po a):*

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0.$$

Takže:

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) + 4 = 0.$$

U: Pozrieme sa na prvú zátvorku. Chceme, aby to bol vzorec tvaru $a^2 - 2ab + b^2$.

Ž: *V zátvorke mi chýba člen b^2. Asi by som si ho mal nejako vyrobiť . . .*

U: Člen $2ab$ má tvar $6x$, čo sa dá napísať aj $2 \cdot x \cdot 3$.

Ž: *Z toho je jasné, že $b = 3$. Chýbajúci člen b^2 bude $3^2 = 9$.*

U: Pripíšeme ho do zátvorky. A aby platila rovnosť, musíme ho aj odčítať. Preto:

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 4y) + 4 = 0.$$

Ž: *Druhú zátvorku skúsim ja. Mám tam $4y$, to je vlastne $2 \cdot y \cdot 2$, takže mi bude chýbať člen $2^2 = 4$. Preto:*

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + 4 = 0.$$

U: Výborne. Prvá zátvorka nám dáva $(x-3)^2$ a druhá $(y+2)^2$. Ešte sčítame zvyšné čísla $-9-4+4$ a výsledný súčet (-9) dáme na pravú stranu. Dostávame stredový tvar rovnice kružnice:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9.$$

Daná rovnica predstavuje kružnicu. Vedel by si mi povedať aké sú súradnice jej stredu a aký je jej polomer?

Ž: *Súradnice stredu - to sú čísla v zátvorkách, ale s opačným znamienkom, čiže $S[3; -2]$. Polomer nájdem na pravej strane, presnejšie jeho druhú mocninu. Preto polomer kružnice má hodnotu $r = 3$.*

U: Výborne.

U: Prejdime na úlohu *b*).

Ž: *To už bude ľahké. Postup je taký istý. Všeobecnú rovnicu kružnice:*

$$x^2 + y^2 + 2x - 10y + 29 = 0$$

upravím na štvorce. Vyzerá to takto:

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 - 10y + 25) - 25 + 29 = 0.$$

U: Zatiaľ dobre.

Ž: *Po úprave dostávam:*

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = -3.$$

Stred kružnice S má súradnice $S[-1; 5]$ a polomer je... Hups!

U: Zarazila ťa tá „mínus trojka“ na pravej strane?

Ž: *Áno.*

U: Na pravej strane stredovej rovnice kružnice vystupuje výraz r^2. My tam máme (-3). Malo by platiť $r^2 = -3$.

Ž: *To predsa nemôže byť!*

U: Máš pravdu. Nakoľko neexistuje žiadne reálne číslo, pre ktoré platí uvedený vzťah, ***daná rovnica nie je rovnicou kružnice***.

Ž: *To je tá podmienka, o ktorej ste hovorili na začiatku. Nie každá rovnica daného tvaru predstavuje kružnicu. Už tomu rozumiem. Ak mi po úprave na štvorce vyjde na pravej strane záporné číslo, tak to nie je kružnica.*

U: Už len dodám, že nielen záporné číslo, ale ani nula nie je vyhovujúca. Ak by sme mali rovnicu typu:

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = 0,$$

popisovala by len jeden bod.

Ž: *Naozaj! Takejto rovnici by vyhovoval len stred kružnice* $S[m;n]$.

U: Akurát sa veľmi nedá hovoriť o strede kružnice, lebo by to bola len formálne kružnica s nulovým polomerom.

Úloha 1: *Rozhodnite, či nasledujúce rovnice sú rovnicami kružnice. V prípade, že ide o kružnicu, určte jej stred a polomer.*

a) $x^2 + y^2 - 8x + 25 = 0$,

b) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 13 = 0$,

c) $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$.

Výsledok:

a) nie je to rovnica kružnice,

b) $S[-3; 4]$, $r = 2\sqrt{3}$,

c) nie je to rovnica kružnice.

Príklad 4: *V sústave súradníc v rovine zakreslite útvary dané nasledujúcim analytickým vyjadrením:*

a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 \leqq 8,$

b) $(x-3)^2 + (y+1)^2 > 3,$

c) $x^2 + y^2 + 12y = 13.$

Ž: *Kreslenie nemám veľmi v láske. Pustím sa do príkladu a). Vyzerá to ako stredový tvar rovnice kružnice.*

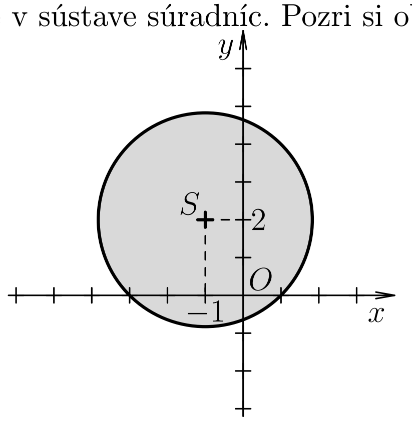
U: Akurát to nie je rovnica, ale ***nerovnica***. To znamená, že to nebude analytické vyjadrenie kružnice.

Ž: *Aha! Ale je tam znamienko „menší rovný“, teda to bude vnútro, vlastne kruh.*

U: Súhlasím. Určme si súradnice stredu kruhu a jeho polomer.

Ž: *To je už ľahké. Súradnice stredu sú tie čísla v zátvorkách, akurát s opačným znamienkom a druhá mocnina polomeru je na pravej strane. Teda* $S[-1; 2]$ *a* $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

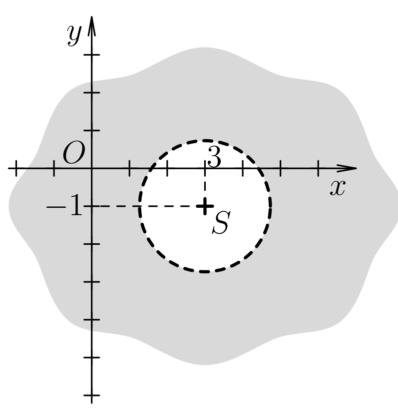
U: Teraz si to už len zakreslíme v sústave súradníc. Pozri si obrázok.



Ž: *Pokračujem úlohou b). Opäť je to nerovnica. Ale máme tam znamienko „väčší“, teda to bude vonkajšok kruhu.*

U: Áno, ale bez hraničnej kružnice.

Ž: *Jasné, lebo tam nie je „väčší rovný“. Súradnice stredu kruhu sú* $S[3; -1]$ *a jeho polomer je* $r = \sqrt{3}$. *Ešte nakreslím obrázok. Hraničnú kružnicu, keďže tam nepatrí, vyznačím prerušovanou čiarou.*



U: Išlo ti to výborne. Ostáva posledná úloha c).

Ž: *Dúfam, že aj s tou si hravo poradím. Je to rovnica, takže to bude kružnica. Ale nevyzerá to ako stredový tvar ...*

U: Máš pravdu. Môže to byť všeobecná rovnica kružnice. Ak chceš vedieť či to je naozaj kružnica a aký má polomer a súradnice stredu, musíš ju najprv upraviť na stredový tvar.

Ž: *Dobre. Použijem pri tom úpravu na štvorec. Prvý člen x^2 je už hotový, lebo v rovnici sa nevyskytuje lineárny člen s x. Druhý člen s y upravím na štvorec nasledovne:*

$$x^2 + (y^2 + 12y + 36) - 36 = 13.$$

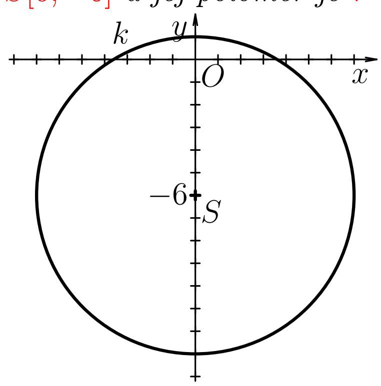
U: Výborne. Pričítal aj odčítal si číslo 36, rovnosť ostala zachovaná.

Ž: *Po úprave máme:*

$$x^2 + (y+6)^2 = 49.$$

U: Súhlasím.

Ž: *Súradnice stredu kružnice sú $S[0; -6]$ a jej polomer je $r = 7$. A tu je obrázok.*



Úloha 1: *V sústave súradníc v rovine zakreslite útvary dané nasledujúcim analytickým vyjadrením:*

a) $(x-1)^2 + y^2 = 16$,

b) $(x+2)^2 + (y-3)^2 < 2$,

c) $x^2 + y^2 \geqq 9$.

Výsledok:

a) kružnica, $S[1; 0]$, $r = 4$,

b) vnútorná oblasť kružnice, $S[-2; 3]$, $r = \sqrt{2}$,

c) kružnica a jej vonkajšia oblasť, $S[0; 0]$,$r = 3$.

Príklad 5: *Určte rovnice všetkých kružníc, ktoré prechádzajú bodmi $A[-1;3]$, $B[0;2]$ a $C[1;-1]$.*

U: Ako by si takúto úlohu riešil konštrukčne?

Ž: *Mám dané tri body a mám zostrojiť všetky kružnice, ktoré týmito bodmi prechádzajú. Hm ... Neviem.*

U: Napoviem ti. Tieto tri body zrejme vytvárajú trojuholník.

Ž: *Aha! To mám narysovať kružnicu, na ktorej ležia všetky vrcholy trojuholníka. Ale to je predsa kružnica opísaná trojuholníku. Zostrojím osi uhlov, vlastne nie, strán, a tam, kde sa pretnú bude stred kružnice.*

U: Áno. Stred kružnice opísanej trojuholníku leží na priesečníku osí strán tohto trojuholníka. Asi je jasné, že očakávame len jedno riešenie.

Ž: *Takže to si najprv nájdem rovnice osí strán, potom ich priesečník a nakoniec kružnicu?*

U: Aj tak by sa dalo. Vyriešime to však ináč. Hľadáme analytické vyjadrenie kružnice. Poznáš nejaké?

Ž: *Poznám stredový tvar rovnice kružnice:*

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2.$$

Stred kružnice má súradnice $S[m;n]$ a r je jej polomer.

U: V poriadku. My máme dané tri body patriace kružnici. Ak nejaký bod patrí kružnici, musia jeho súradnice vyhovovať rovnici kružnice.

Ž: *Chcete povedať, že mám dosadiť súradnice daných bodov do stredového tvaru? Získam tak tri rovnice.*

U: Je to dobrý nápad.

Ž: *Takže dosadím postupne súradnice bodov $A[-1;3]$, $B[0;2]$ a $C[1;-1]$ za x, y a z do rovnice kružnice. Tu sú príslušné tri rovnice:*

$$\begin{aligned}(-1-m)^2 + (3-n)^2 &= r^2\\ (0-m)^2 + (2-n)^2 &= r^2\\ (1-m)^2 + (-1-n)^2 &= r^2\end{aligned}$$

Uf! Rovnice vyzerajú dosť škaredo.

U: Celkom s tebou súhlasím. Máme tri rovnice s troma neznámymi m, n a r. Všetky neznáme v nich vystupujú v druhých mocninách. Napriek tomu sa táto sústava dá pekne vyriešiť. Pravé strany rovníc sú rovnaké, stačí porovnať ľavé strany niektorých dvoch rovníc.

Ž: *To by šlo. Ale stále mi tam ostanú kvadratické členy...*

U: To je pravda. Tie sa však po roznásobení zátvoriek odčítajú...

Ž: *No dobre, vidím, že mi neostáva nič iné ako sa do toho pustiť.*

U: Počkaj ešte! Existuje aj iná možnosť.

Ž: *Tak sem s ňou!*

U: Poznáš okrem stredového tvaru aj inú rovnicu kružnice?

Ž: *Poznám ešte všeobecnú rovnicu kružnice:*

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Ale tá sa väčšinou na nič nehodí.*

U: Tak práve teraz sa nám celkom hodí, uvidíš. Opäť platí, že súradnice daných bodov musia vyhovovať rovnici kružnice.

Ž: *Tak ich dosadím, dostávam znovu tri rovnice:*

$$\begin{aligned} (-1)^2 + 3^2 + a \cdot (-1) + b \cdot 3 + c &= 0 \\ 0^2 + 2^2 + a \cdot 0 + b \cdot 2 + c &= 0 \\ 1^2 + (-1)^2 + a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c &= 0 \end{aligned}$$

U: Trochu to uprav, aby to bolo prehľadnejšie.

Ž: *Máme tieto tri rovnice:*

$$\begin{aligned} 10 - a + 3b + c &= 0 \\ 4 + 2b + c &= 0 \\ 2 + a - b + c &= 0 \end{aligned}$$

Tieto rovnice vyzerajú naozaj lepšie!

U: Dostali sme sústavu troch lineárnych rovníc s neznámymi a, b a c. Predpokladám, že takúto sústavu zvládneš hravo vyriešiť.

Ž: *Snáď áno. Rozhodne to bude jednoduchšie ako sa moriť s druhými mocninami. Takže z druhej rovnice si vyjadrím* c*:*

$$c = -4 - 2b.$$

Dosadím do prvej a tretej rovnice:

$$\begin{aligned} 10 - a + 3b + (-4 - 2b) &= 0 \\ 2 + a - b + (-4 - 2b) &= 0. \end{aligned}$$

U: Súhlasím.

Ž: *Rovnice upravím a mám:*

$$\begin{aligned} 6 - a + b &= 0 \\ -2 + a - 3b &= 0. \end{aligned}$$

Sčítam ich a dostávam:

$$4 - 2b = 0.$$

Z čoho $b = 2$. *Po dosadení do prvej z predchádzajúcich rovníc mám:*

$$6 - a + 2 = 0.$$

Čiže $a = 8$.

U: Už ostáva len c.

Ž: *Na to použijem modré vyjadrenie* $c = -4 - 2b$. *Takže:* $c = -8$.

U: Výborne. Máme riešenie:

$$a = 8,\ b = 2,\ c = -8.$$

Po dosadení do všeobecného tvaru rovnice kružnice dostávame:

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0.$$

Čím sme úlohu vyriešili. Mňa by však aj tak zaujímal stredový tvar rovnice kružnice. Aké súradnice má stred tejto kružnice a aký je jeho polomer?

Ž: *Takže po úprave na štvorec dostávam stredový tvar rovnice kružnice:*

$$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 25.$$

Kružnica má stred $S[-4; -1]$ *a polomer* $r = 5$.

Úloha 1: *Určte rovnice všetkých kružníc, ktoré prechádzajú bodmi* $A[0; 0]$, $B[3; 0]$ *a* $C[0; 4]$.

Výsledok: $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - 2)^2 = \dfrac{25}{4}$

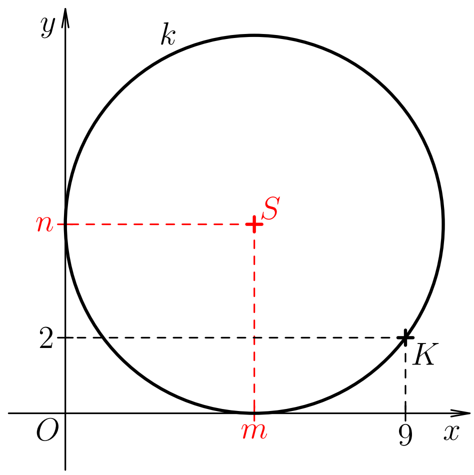
Úloha 2: *Určte rovnicu kružnice, ktorá je opísaná trojuholníku* ABC, *ak* $A[-5; 0]$, $B[2; -1]$ *a* $C[1; 2]$.

Výsledok: $(x + \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \dfrac{25}{2}$

Príklad 6: *Určte rovnice všetkých kružníc, ktoré prechádzajú bodom $K[9;2]$ a dotýkajú sa obidvoch osí sústavy súradníc.*

U: Navrhujem začať s obrázkom, aby sme si lepšie celú situáciu predstavili.

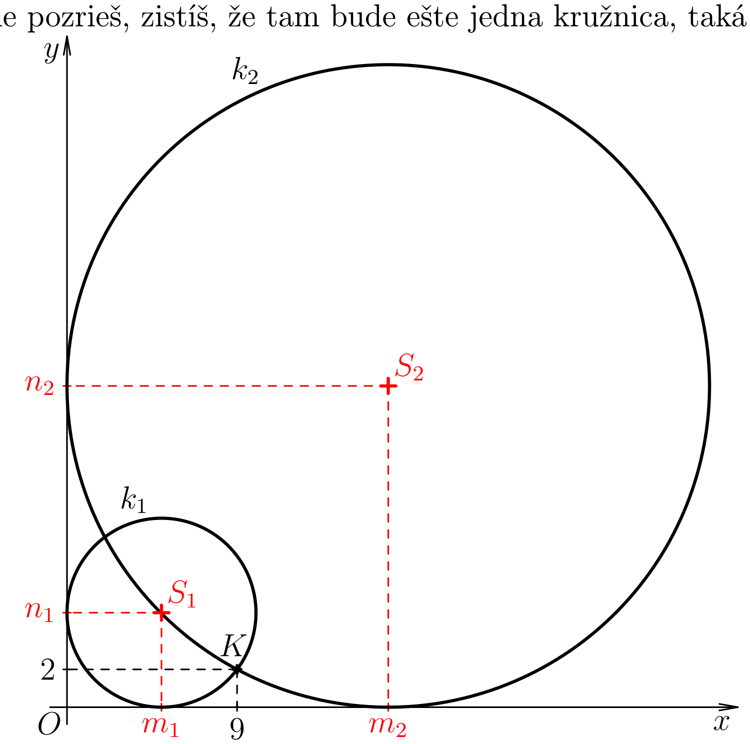
Ž: *Dobre. Načrtnem si sústavu súradníc a bod K. A teraz hľadanú kružnicu, no snáď by to mohlo vyzerať takto:*



U: Súhlasím. Myslíš, že úloha bude mať len jedno riešenie?

Ž: *Podľa obrázka sa zdá, že áno.*

U: Keď sa poriadne pozrieš, zistíš, že tam bude ešte jedna kružnica, taká „väčšia“.



Ž: *Áno, to by mi nenapadlo...*

U: Nevadí, z riešenia nám to aj tak vyplynie. Takže hľadáme rovnicu kružnice. Aký jej tvar poznáš?

Ž: *Poznám stredový tvar rovnice kružnice:*

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2.$$

Stred kružnice má súradnice $S[m;n]$ a r je jej polomer.

U: V poriadku. Aby sme napísali rovnicu kružnice, musíme nájsť hodnotu troch neznámych m, n, r. Vrátime sa ešte k obrázku. Máme na ňom vyznačené aj súradnice stredu m, n.

Ž: *Vyzerá to, ako keby $m=n$ ...*

U: To nielen vyzerá, ale je to aj pravda. Uvedom si, že kružnica sa dotýka oboch osí. Jej stred preto leží na osi I. kvadrantu.

Ž: *Jasné! A pre body na osi platí, že majú rovnakú x-ovú a y-ovú súradnicu. Preto $m=n$.*

U: Aký bude polomer kružnice?

Ž: *Aha! Kružnica sa dotýka osi x, preto jej polomer bude taký ako je y-ová súradnica bodu S. Platí teda $m=n=r$. Začína sa mi to páčiť. Už máme len jednu neznámu.*

U: Opravím len jednu maličkosť. Naša úloha sa odohráva v I. kvadrante. V iných kvadrantoch však môžu byť súradnice stredu aj záporné, polomer však nie. Preto platí: $|m|=|n|=r$. Namiesto troch neznámych máme len jednu, zoberme si napr. m. Stredový tvar rovnice kružnice zapíšeme nasledovne:

$$(x-m)^2+(y-m)^2=m^2.$$

Okrem toho máme daný bod K, ktorý patrí kružnici. Jeho súradnice preto musia vyhovovať rovnici kružnice.

Ž: *Dosadím súradnice bodu $K[9;2]$ do rovnice kružnice a dostávam:*

$$(9-m)^2+(2-m)^2=m^2.$$

U: Je to len jedna rovnica s jednou neznámou. Vyriešme ju.

Ž: *Roznásobím zátvorky, použijem vzorec $(a-b)^2$:*

$$81-18m+m^2+4-4m+m^2=m^2.$$

Sčítam, čo sa dá a mám kvadratickú rovnicu:

$$m^2-22m+85=0.$$

Vyriešim ju rozkladom na súčin:

$$(m-5)(m-17)=0.$$

Korene sú teda $m_1=5$ a $m_2=17$.

U: Výborne. Rovnice kružníc sú teda nasledovné:

$$k_1:\ (x-5)^2+(y-5)^2=25,$$

$$k_2:\ (x-17)^2+(y-17)^2=289.$$

Úloha 1: *Určte rovnice všetkých kružníc, ktoré prechádzajú bodom* $M[3;-6]$ *a dotýkajú sa obidvoch osí sústavy súradníc.*

Výsledok: $(x-15)^2+(y+15)^2=225$, $(x-3)^2+(y+3)^2=9$

Príklad 7: *Určte stredový tvar rovnice kružnice, ktorá prechádza bodmi $A[6;1]$ a $B[2;3]$, ak jej stred leží na priamke $p:\ 3x - y - 11 = 0$.*

Ž: *Mám napísať stredový tvar rovnice kružnice - ten poznám. Vyzerá takto:*

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

pričom stred kružnice má súradnice $S[m;n]$ a r je jej polomer.

U: S tým súhlasím. Máme dané dva body, ktoré kružnici patria. Ich súradnice musia vyhovovať rovnici kružnice.

Ž: *Aha! Môžem dosadiť súradnice bodov $A[6;1]$ a $B[2;3]$ do rovnice kružnice. Dostávam tak dve rovnice:*

$$(6 - m)^2 + (1 - n)^2 = r^2,$$
$$(2 - m)^2 + (3 - n)^2 = r^2.$$

U: Áno, ale máme dve rovnice a neznáme sú až tri m, n, r. Potrebujeme ešte jednu rovnicu.

Ž: *Zo zadania viem, že stred kružnice, bod $S[m;n]$ leží na priamke $p:\ 3x - y - 11 = 0$. Lenže neviem, čo s tým.*

U: Stále platí, ak nejaký bod patrí danému útvaru, tak jeho súradnice musia vyhovovať rovnici tohto útvaru. Bude to tak aj s bodom S a priamkou p.

Ž: *To znamená, že súradnice bodu $S[m;n]$ môžem dosadiť do rovnice priamky p?*

U: Samozrejme. Tým získame tretiu rovnicu.

Ž: *Dobre. Dosadzujem a tu je tretia rovnica:*

$$3m - n - 11 = 0.$$

U: Keď to zhrniem, máme sústavu troch rovníc:

$$\begin{aligned}(6 - m)^2 + (1 - n)^2 &= r^2\\ (2 - m)^2 + (3 - n)^2 &= r^2\\ 3m - n - 11 &= 0.\end{aligned}$$

Poďme ju vyriešiť.

Ž: *Najviac sa mi páči tretia rovnica, je lineárna. Z nej si vyjadrím jednu neznámu, napr. n:*

$$n = 3m - 11.$$

Dosadím to do prvých dvoch rovníc:

$$\begin{aligned}(6 - m)^2 + [1 - (3m - 11)]^2 &= r^2\\ (2 - m)^2 + [3 - (3m - 11)]^2 &= r^2.\end{aligned}$$

U: Ide ti to výborne. Uprav ešte zátvorky a potom potrebuješ vzorec $(a \pm b)^2$.

Ž: *Upravujem zátvorky:*

$$(6-m)^2+(12-3m)^2=r^2$$
$$(2-m)^2+(14-3m)^2=r^2.$$

A teraz tie vzorce:

$$36-12m+m^2+144-72m+9m^2=r^2$$
$$4-4m+m^2+196-84m+9m^2=r^2.$$

Ešte môžem na ľavých stranách sčítať rovnaké členy:

$$180-84m+10m^2=r^2$$
$$200-88m+10m^2=r^2.$$

U: Všimni si pravé strany rovníc. Sú rovnaké. Preto môžeme ľavé strany rovníc dať do rovnosti:

$$180-84m+10m^2=200-88m+10m^2.$$

Ž: *Jéj!* $10m^2$ *sa odčíta a ostane mi lineárna rovnica:*

$$4m=20.$$

Odkiaľ sa $m=5$.

U: Správne. Dopočítame ešte ostatné neznáme.

Ž: *Dosadím* $m=5$ *do modrého vyjadrenia* $n=3m-11$ *a mám* $n=4$. *Polomer... Napr. do prvej rovnice*

$$(6-m)^2+(1-n)^2=r^2$$

dosadím vypočítané hodnoty m *a* n*:*

$$(6-5)^2+(1-4)^2=r^2.$$

Takže:

$$r=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}.$$

U: Výborne. Rovnica kružnice je:

$$k:\ (x-5)^2+(y-4)^2=10.$$

Úloha 1: *Určte stredový tvar rovnice kružnice, ktorá prechádza bodom* $M[6;9]$, *jej stred leží na priamke* $p:\ x+3y-6=0$ *a má polomer* $r=9$.

Výsledok: $(x-6)^2+y^2=81$, $(x-\frac{3}{5})^2+(y-\frac{9}{5})^2=81$

Úloha 2: *Určte stredový tvar rovnice kružnice, ktorá prechádza bodom* $A[1;2]$, *jej stred leží na priamke* $p:\ x+y-4=0$ *a dotýka sa osi* y.

Výsledok: $(x-5)^2+(y+1)^2=25$, $(x-1)^2+(y-3)^2=1$