Hyperbola a jej analytické vyjadrenie

RNDr. Viera Vodičková

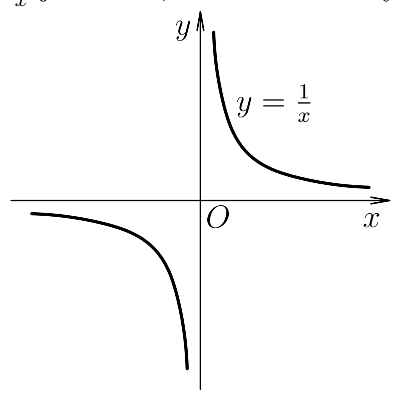
U: Počul si už o ***hyperbole***?

Ž: *Áno, nedávno sme o nej hovorili na literatúre...*

U: Máš pravdu. Literárna hyperbola alebo zveličenie je slovné spojenie vyznačujúce sa expresívnym (zveličovacím) významom. Ale aj na matematike si sa už s hyperbolou stretol...

Ž: *Myslíte asi na nepriamu úmernosť, však?*

U: Áno. Grafom funkcie $f : y = \frac{1}{x}$ je krivka, ktorá sa volá hyperbola. Máš ju aj na obrázku.



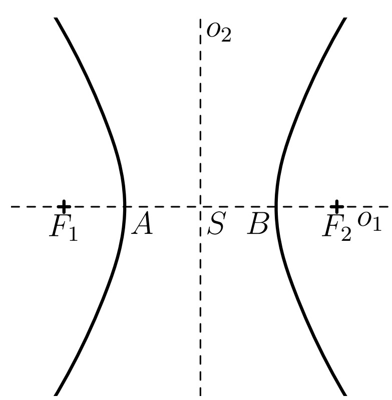
Ž: *Nie sú tam náhodou* **dve** *hyperboly?*

U: Nie. Hyperbola sa skladá z dvoch vetiev. Tak ako to vidíš na obrázku. Prejdeme rovno k jej definícii. ***Hyperbolou nazývame množinu všetkých bodov roviny*** (Euklidovského priestoru $\mathbb{E}_2$), ***ktoré majú od dvoch rôznych bodov tejto roviny F_1 a F_2 konštantnú absolútnu hodnotu rozdielu vzdialeností rovnajúcu sa kladnému reálnemu číslu $2a$, pričom číslo $2a$ je menšie ako vzdialenosť bodov F_1 a F_2***. Hyperbolu označujeme veľkým písmenom H.

$$H = \{X \in \mathbb{E}_2; ||XF_1| - |XF_2|| = 2a; a \in \mathbb{R}^+; 2a < |F_1F_2|\}$$

Ž: *No...! Je to nejaké zamotané: „absolútna hodnota rozdielu vzdialeností“...*

U: Počkaj trochu. Zakreslíme si hyperbolu a na obrázku si všetko vysvetlíme. Oproti predchádzajúcemu grafu otočíme hyperbolu o 45° okolo začiatku sústavy súradníc, pozri si obrázok.



Body F_1, F_2 nazývame ***ohniská hyperboly***. Priamka, na ktorej ležia obe ohniská sa nazýva ***hlavná os hyperboly***, je označená o_1.

Ž: *Na obrázku vidím aj os o_2. To je* **vedľajšia os***?*

U: Áno. Aj keď sa niekedy nazýva aj imaginárna os, nakoľko na nej neleží žiaden bod hyperboly. Prienikom hlavnej a vedľajšej osi je bod S – ***stred hyperboly***. Ohniská sú rovnako vzdialené od stredu hyperboly. Túto vzdialenosť označujeme e a nazýva sa ***excentricita***.

Ž: *To je podobné ako pri elipse.*

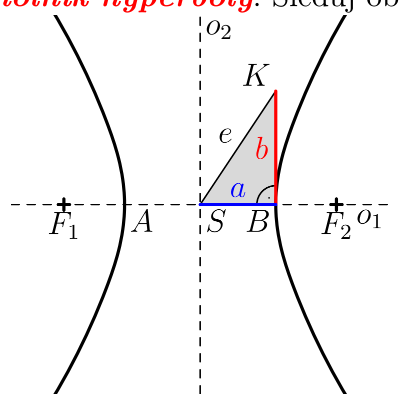
U: Áno. Ostali nám ešte vrcholy hyperboly.

Ž: *To budú asi body A, B.*

U: Priesečníky hlavnej osi a hyperboly nazývame ***hlavné vrcholy elipsy***. Sú to body A a B. Vzdialenosť hlavného vrcholu od stredu sa nazýva ***dĺžka hlavnej polosi*** a označuje sa a.

Ž: *Kde budú vedľajšie vrcholy?*

U: Hyperbola nemá vedľajšie vrcholy. Napriek tomu sa definuje ***dĺžka vedľajšej polosi*** a označuje sa b. Zostrojíme pravouhlý trojuholník SBK, s pravým uhlom pri vrchole B a s preponou SK, ktorej dĺžka sa rovná excentricite hyperboly. Tento trojuholník nazývame aj ***charakteristický trojuholník hyperboly***. Sleduj obrázok.



Ž: *Dĺžka jednej odvesny SB je rovná a.*

U: Správne. No a dĺžka druhej odvesny BK sa nazýva dĺžka vedľajšej polosi a označuje sa b.

Ž: *Podľa obrázka potom pre hyperbolu platí vzťah:*

$$e^2 = a^2 + b^2.$$

U: Áno. Vyplýva z Pytagorovej vety pre trojuholník SBK.

U: Teraz sa vrátime k definicii. Zoberieme si ľubovoľný bod X patriaci na obrázku „pravej časti“ hyperboly. Hovoríme jej vetva hyperboly. Podľa definície preň platí:

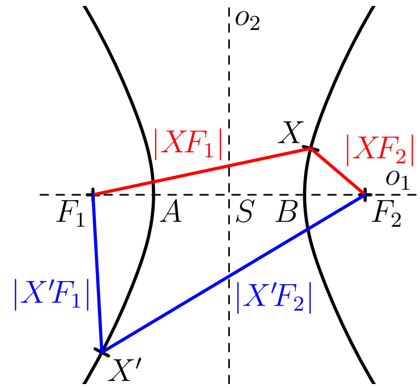
$$\left| |XF_1| - |XF_2| \right| = 2a.$$

Ž: *Tých zvislých čiar je tam akosi priveľa...*

U: Všimni si, že tie červené znamenajú absolútnu hodnotu. Modré zase veľkosť úsečky. Je zrejmé, že $2a$ je kladné číslo.

Ž: *Áno. a je predsa dĺžka hlavnej polosi.*

U: Sleduj ďalší obrázok.



Vzhľadom na to, že $|XF_1| > |XF_2|$, môžeme absolútnu hodnotu vynechať a platí:

$$|XF_1| - |XF_2| = 2a.$$

Zoberme si teraz ľubovoľný bod X' patriaci na obrázku druhej (ľavej) vetve hyperboly.

Ž: *Už viem! Nakoľko $|X'F_1| < |X'F_2|$, platí preň:*

$$|X'F_2| - |X'F_1| = 2a.$$

Pre body z pravej časti je väčšia vzdialenosť k ohnisku F_1 a pre body z ľavej časti je zase väčšia vzdialenosť k ohnisku F_2.

U: Výborne. A preto v definícii vystupuje absolútna hodnota, aby sme si nemuseli dávať pozor, ktorú vzdialenosť od ktorej odčítame.

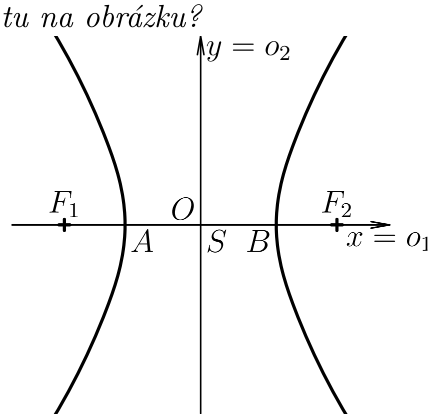
Ž: *Už rozumiem.*

U: Povieme si, aké analytické vyjadrenie má hyperbola.

Ž: *Bude mať rovnicu, tak ako kružnica, elipsa alebo priamka?*

U: Áno. Rovnica hyperboly závisí od jej polohy v sústave súradníc. My sa budeme zaoberať len takými hyperbolami, ktorých osi sú rovnobežné s osami x, y sústavy súradníc.

Ž: *Čiže napr. takto, ako je to tu na obrázku?*

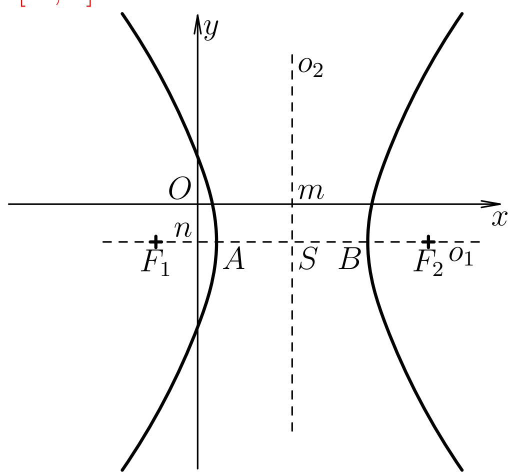


U: Áno. To je jednoduchý príklad. Osi hyperboly ležia na súradnicových osiach a to tak, že os x predstavuje hlavnú os hyperboly a os y vedľajšiu os. Stred hyperboly má súradnice $S[0;0]$. Rovnica takejto hyperboly je potom:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ž: *Je to ako rovnica elipsy, akurát je tam znamienko mínus. Ako sa zmení, ak hyperbolu posuniem niekde inde?*

U: Hyperbolu posunieme tak, že jej hlavná os bude rovnobežná s osou x a vedľajšia s osou y. Stred hyperboly je bod $S[m;n]$.

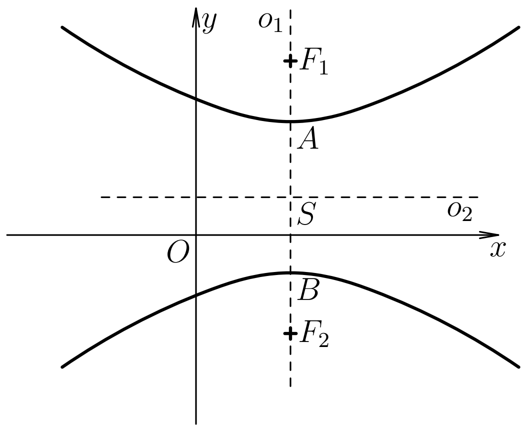


Rovnica takejto hyperboly je potom:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Ž: *Jasné. Výrazy $(x-m)$ a $(y-n)$ vyjadrujú posunutie stredu hyperboly.*

U: Povedali sme, že sa budeme zaoberať len takými hyperbolami, ktorých osi sú rovnobežné s osami x, y sústavy súradníc. Druhá možnosť umiestnenia hyperboly v sústave súradníc je na ďalšom obrázku.



Ž: *Hyperbola sa otočila. Nemáme ju „vpravo“ a „vľavo“, ale „hore“ a „dole“.*

U: V tejto polohe je hlavná os hyperboly rovnobežná s osou y a vedľajšia s osou x. Stred hyperboly je opäť bod $S[m;n]$. Rovnica hyperboly je potom:

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1.$$

Uvedené rovnice nazývame stredovými rovnicami hyperboly.

Ž: *Vymenili sa čitatele zlomkov.*

U: Áno. Dôležité je všimnúť si, že člen s y je teraz s kladným znamienkom a člen s x so záporným znamienkom. Podľa toho určíme, ako je hyperbola umiestnená v sústave súradníc.

Ž: *Ktorá dĺžka polosí je väčšia, a alebo b?*

U: Pri hyperbole je to jedno, môže nastať aj prípad $a > b$ aj $a < b$. Jej poloha v sústave súradníc od toho nezávisí, závisí len od toho, pred ktorým členom je znamienko mínus.

Ž: *Môže byť aj $a = b$?*

U: Áno. Také hyperboly nazývame ***rovnoosými hyperbolami***.

U: Okrem stredovej rovnice hyperboly poznáme aj všeobecnú rovnicu hyperboly. Vznikne úpravou stredovej rovnice – roznásobením zátvoriek, odstránením zlomkov a umiestnením všetkých členov na jednu stranu rovnice. Všeobecná rovnica hyperboly má tvar:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

pričom $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ a zároveň $A \cdot B < 0$.

Ž: *Prečo je tam podmienka $A \cdot B < 0$?*

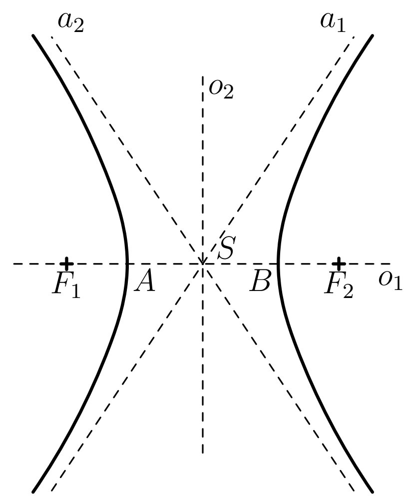
U: V stredovej rovnici hyperboly sa nachádza znamienko mínus. Buď pri člene s x alebo pri člene s y. Vo všeobecnej rovnici tiež musí byť jeden z koeficientov pri x^2 a y^2 kladný a druhý záporný, preto je ich súčin vždy záporný.

Ž: *Rozumiem. Hyperbola patrí ku kvadratickým útvarom, jej rovnica je kvadratická.*

U: Na záver si povieme niečo o priamkach významných pre hyperbolu. Nazývajú sa ***asymptoty***. Určite si o nich už počul.

Ž: *Áno. Pri grafe nepriamej úmernosti. Boli to priamky, ku ktorým sa jednotlivé vetvy hyperboly blížili, ale nikdy ich nedosiahli.*

U: Načrtneme si ich na obrázku.



Ž: *Tak som si to predstavoval. Prechádzajú stredom hyperboly a nemajú s ňou žiaden spoločný bod.*

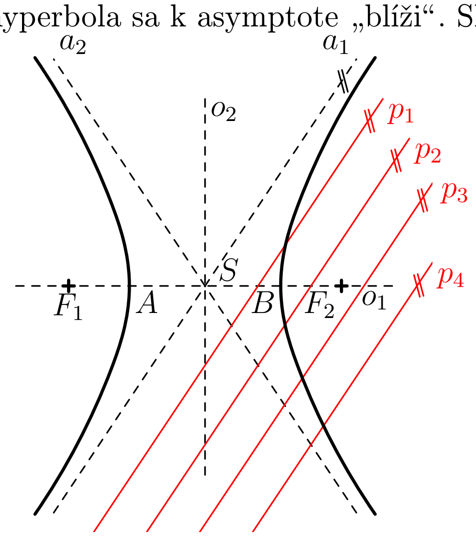
U: V poriadku. Ale to na definíciu nestačí. Aj iné priamky nemajú s hyperbolou žiaden spoločný bod. Zoberme si napr. vedľajšiu os hyperboly.

Ž: *Hm… Na to som nepomyslel.*

U: Musíme preto dodať, že každá iná priamka rovnobežná s asymptotou má s hyperbolou práve jeden spoločný bod.

Ž: *Práve jeden? Nepretne ju dvakrát?*

U: Ale nie. Práve preto, že hyperbola sa k asymptote „blíži“. Sleduj ďalší obrázok.



Ž: *Naozaj majú len jeden spoločný bod.*

U: Smery, ktorých každá priamka má s hyperbolou najviac jeden spoločný bod nazývame ***smery hyperboly***. Priamky týchto smerov, ktoré neobsahujú ani jeden bod hyperboly nazývame ***asymptoty hyperboly***.

Ž: *Teraz mi je to už jasné.*

U: Pre nás bude ešte dôležité vedieť, ako analyticky vyjadríme asymptoty.

Ž: *To znamená, akú budú mať rovnicu?*

U: Áno. Nech je daná hyperbola stredovou rovnicou:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

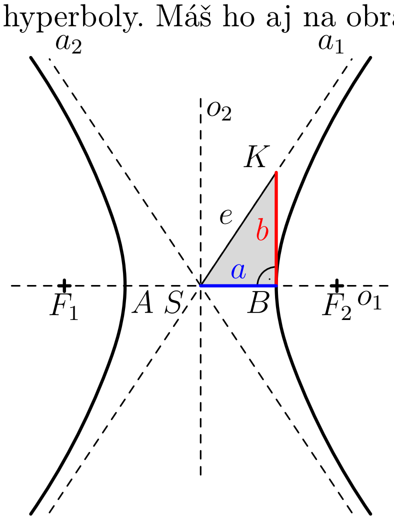
Potom jej asymptoty majú tvar:

$$a_1 : (y-n) = \frac{b}{a}(x-m),$$

$$a_2 : (y-n) = -\frac{b}{a}(x-m).$$

Ž: *Nie je to také ťažké zapamätať si tieto tvary…*

U: Ani to nebude potrebné. Vieme totiž, že asymptota prechádza stredom hyperboly. Okrem toho na nej leží ešte jeden význačný bod. Spomeň si, ako sme pred chvíľou vyrobili tzv. charakteristický trojuholník hyperboly. Máš ho aj na obrázku.



Ž: *Bol to pravouhlý trojuholník SBK. Pomocou neho sme určili vzťah medzi parametrami hyperboly.*

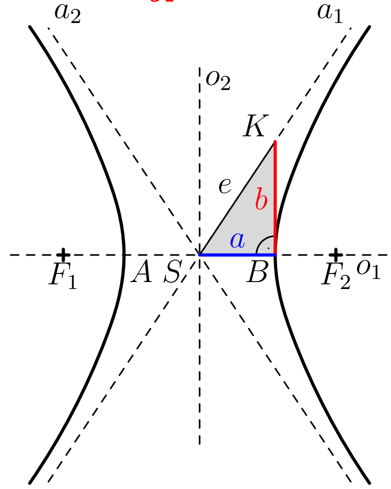
U: Jeden z vrcholov trojuholníka, bod K, leží na jednej asymptote hyperboly. Ak poznáme parametre hyperboly a, b, e, vieme určiť aj súradnice bodu K. Tak máme dva body, S a K, ktoré patria asymptote, a preto napísať jej rovnicu by sme mali vedieť.

Ž: *Vyzerá to celkom ľahko. Ako ale nájdem druhú asymptotu?*

U: Môžeme využiť, že asymptoty hyperboly sú, tak ako aj celá hyperbola, súmerné podľa vedľajšej osi. Alebo môžeme podobný pravouhlý trojuholník zostrojiť aj na druhej strane, z vrcholu A a získať tak bod K'.

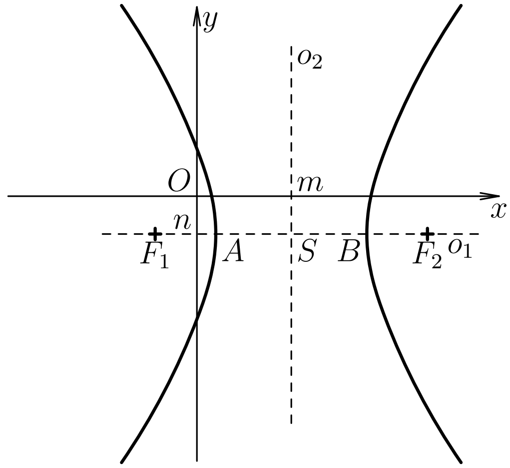
U: Zhrnutie všetkých dôležitých vecí si môžeš pozrieť v nasledujúcich rámčekoch.

Hyperbola



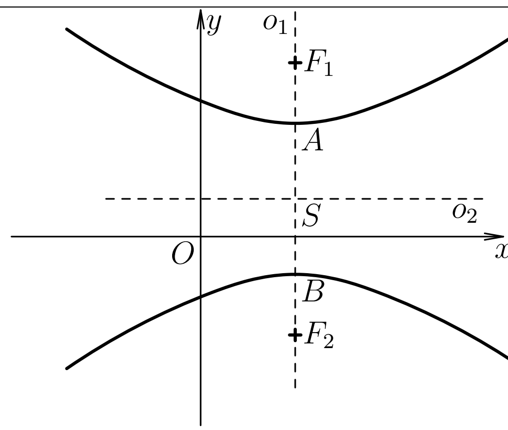
o_1 – hlavná os
o_2 – vedľajšia os
A, B – hlavné vrcholy
F_1, F_2 – ohniská
a –dĺžka hlavnej polosi
b – dĺžka vedľajšej polosi
e –excentricita (výstrednosť)
$e = \sqrt{a^2 + b^2}$
a_1, a_2 – asymptoty

Stredové rovnice hyperboly



$$o_1 \parallel o_x \wedge o_2 \parallel o_y$$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$



$$o_1 \parallel o_y \wedge o_2 \parallel o_x$$

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$$

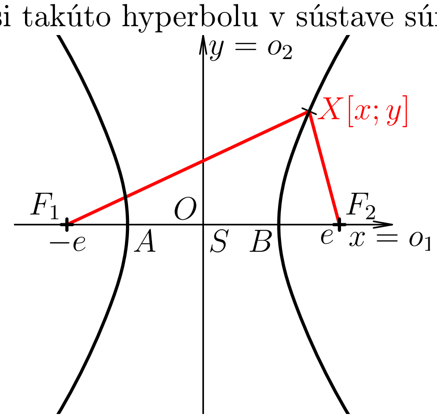
Dôkaz 1: *Nech je daná hyperbola so stredom $S[0;0]$, ktorej hlavná os leží na osi x a vedľajšia os na osi y. Dokážte, že túto hyperbolu môžeme analyticky vyjadriť rovnicou:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kde a, b sú dĺžky hlavnej a vedľajšej polosi hyperboly.

Ž: *Vyzerá to tak, že mám odvodiť stredovú rovnicu hyperboly. Odkiaľ mám začať? Obrázkom?*

U: Dobrý nápad. Zakreslime si takúto hyperbolu v sústave súradníc.



Ž: *Obrázok mi veľmi nepomohol... Nevidím tu nijaký pravouhlý trojuholník ani nič podobné...*

U: Začneme definíciou hyperboly.

Ž: *Hyperbolou nazývame množinu všetkých bodov roviny, ktoré majú od dvoch rôznych bodov tejto roviny F_1 a F_2 konštantnú absolútnu hodnotu rozdielu vzdialeností rovnajúcu sa kladnému reálnemu číslu $2a$, pričom číslo $2a$ je menšie ako vzdialenosť bodov F_1 a F_2.*

U: Výborne. Zoberieme si ľubovoľný bod hyperboly $X[x;y]$. Podľa definície preň platí:

$$||XF_1| - |XF_2|| = 2a.$$

Vyjadríme si veľkosti úsečiek $|XF_1|$ a $|XF_2|$.

Ž: *Potrebujem súradnice ohnísk F_1 a F_2. Aha! Použijem obrázok. Hneď vidím, že*

$$F_1[-e;0] \quad a \quad F_2[e;0].$$

U: Správne. Dodám len, že e je excentricita hyperboly. Je to vzdialenosť ohniska a stredu hyperboly.
Súradnice máme. Vyjadrime pomocou nich veľkosti príslušných úsečiek.

Ž: *Použijem známy vzorec na určenie veľkosti úsečky. Podľa neho platí:*

$$|XF_1| = \sqrt{(-e-x)^2 + (0-y)^2} \quad a \quad |XF_2| = \sqrt{(e-x)^2 + (0-y)^2}.$$

U: V poriadku. Tieto vyjadrenia dosadíme do rovnice:

$$||XF_1| - |XF_2|| = 2a.$$

Ž: *Dosadzujem:*
$$|\sqrt{(-e-x)^2+(0-y)^2}-\sqrt{(e-x)^2+(0-y)^2}|=2a.$$

U: Rovnicu budeme upravovať, aby sme ju získali v „krajšom tvare“. Obe strany rovnice umocníme na druhú. Nezabudnime na to, že ľavú stranu umocňujeme ako dvojčlen podľa vzorca $(a+b)^2$. A naviac po umocnení je každý výraz nezáporný, preto absolútnu hodnotu ľavej strany vynecháme.

Ž: *Pokúsim sa správne umocniť obe strany rovnice, dostávam:*

$$(-e-x)^2+y^2-2\sqrt{[(-e-x)^2+y^2]\cdot[(e-x)^2+y^2]}+(e-x)^2+y^2=4a^2.$$

Nuly som už vynechal.

U: Dobre. Všetky výrazy v zátvorkach, aj tie pod odmocninou, upravíme podľa vzorca. Sleduj rámček.

$$\boxed{e^2+2ex+x^2+y^2-2\sqrt{[e^2+2ex+x^2+y^2]\cdot[e^2-2ex+x^2+y^2]}+e^2-2ex+x^2+y^2=4a^2.}$$

Ž: *Konečne sa dá niečo zjednodušiť! Výrazy e^2, x^2 a y^2 sčítam a ešte zruším $2ex$. A v rámčeku je to, čo mi ostalo.*

$$\boxed{2e^2+2x^2+2y^2-2\sqrt{[e^2+2ex+x^2+y^2]\cdot[e^2-2ex+x^2+y^2]}=4a^2.}$$

U: Výborne. Obe strany rovnice môžeme vydeliť číslom 2. Zároveň výrazy v zátvorkách pod odmocninou usporiadame tak ako v tomto rámčeku:

$$\boxed{e^2+x^2+y^2-\sqrt{[(e^2+x^2+y^2)+2ex]\cdot[(e^2+x^2+y^2)-2ex]}=2a^2}$$

Ž: *Hm... Prečo ste to usporiadali práve takto?*

U: Výraz pod odmocninou by ti mal pripomínať jeden známy vzorec:

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2.$$

Ž: *Naozaj! Platí $A=e^2+x^2+y^2$ a $B=2ex$.*

U: Pre výraz pod odmocninou podľa tohto vzorca platí to, čo je v rámčeku:

$$\boxed{[(e^2+x^2+y^2)+2ex]\cdot[(e^2+x^2+y^2)-2ex]=(e^2+x^2+y^2)^2-(2ex)^2}$$

U: Upravovanú rovnicu máme potom v tvare:

$$(e^2+x^2+y^2)-\sqrt{(e^2+x^2+y^2)^2-4e^2x^2}=2a^2.$$

Ž: *V rovnici stále máme jednu odmocninu.*

U: Áno. Nasleduje preto ďalšie umocnenie oboch strán rovnice na druhú. Najprv však rovnicu upravíme tak, aby sme pri umocnení odmocninu odstránili.

Ž: *Asi viem ako. Osamostatníme odmocninu na jednej strane. Napr. na pravej a zvyšné členy dáme na ľavú stranu. Vyzerá to takto:*

$$(e^2 + x^2 + y^2) - 2a^2 = \sqrt{(e^2 + x^2 + y^2)^2 - 4e^2x^2}.$$

U: Môžeme umocňovať.

Ž: *Dostávam:*

$$(e^2 + x^2 + y^2)^2 - 4a^2(e^2 + x^2 + y^2) + 4a^4 = (e^2 + x^2 + y^2)^2 - 4e^2x^2.$$

Hurá! Člen $(e^2 + x^2 + y^2)^2$ *sa odčíta. Dostávam:*

$$-4a^2(e^2 + x^2 + y^2) + 4a^4 = -4e^2x^2.$$

U: Vykrátime štvorky a roznásobíme zátvorky.

Ž: *Skúsim sám.*

$$-a^2e^2 - a^2x^2 - a^2y^2 + a^4 = -e^2x^2.$$

Nemáme už odmocniny, ale stále to nie je ono...

U: Teraz využijeme vzťah, ktorý platí pre parametre hyperboly a, b a e.

Ž: *Myslíte tento:*

$$e^2 = a^2 + b^2?$$

U: Presne ten. Výraz e^2 nahradíme v rovnici výrazom $a^2 + b^2$. Dostávame:

$$-a^2(a^2 + b^2) - a^2x^2 - a^2y^2 + a^4 = -(a^2 + b^2)x^2.$$

Ž: *Roznásobím zátvorky:*

$$-a^4 - a^2b^2 - a^2x^2 - a^2y^2 + a^4 = -a^2x^2 - b^2x^2.$$

Výrazy a^4 *a* a^2x^2 *sa odčítajú, mám rovnicu:*

$$-a^2b^2 - a^2y^2 = -b^2x^2.$$

U: Usporiadame jednotlivé členy takto:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Na pravej strane rovnice potrebujeme dostať jednotku. Preto vydelíme obe strany rovnice výrazom a^2b^2 a dostávame:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ž: *A to je už požadovaná rovnica hyperboly. Nebolo to až také ťažké.*

U: Aby bol dôkaz matematicky správny, je potrebné dokázať aj spätnú implikáciu. Zatiaľ sme ukázali, že každý bod hyperboly spĺňa danú rovnicu. Môžeme však povedať, že všetky uskutočnené úpravy boli ekvivalentné, teda náš postup môžeme obrátiť. Znamená to, že ak súradnice nejakého bodu $X[x; y]$ spĺňajú danú rovnicu, tak bod X je bodom hyperboly. Tým je dôkaz hotový.

Príklad 1: *V sústave súradníc v rovine zakreslite hyperboly dané nasledujúcim analytickým vyjadrením:*

a) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1,$

b) $(x-2)^2 - 9y^2 = 9.$

Určte súradnice stredu, ohnísk, vrcholov a rovnice asymptot hyperboly.

Ž: *Hyperboly sú dané stredovými rovnicami.*

U: Máš pravdu. Pripomeniem len, že stredová rovnica hyperboly má jeden z týchto tvarov:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

alebo

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1,$$

kde stred hyperboly je bod $S[m;n]$, a je dĺžka hlavnej polosi a b je dĺžka vedľajšej polosi hyperboly.

Ž: *Ktorý z tých tvarov to bude, závisí od toho, ktorým smerom je hyperbola „otočená“ v sústave súradníc. Kedže sa volá stredová rovnica, mal by som vedieť z nej vyčítať súradnice stredu hyperboly. Začnem s príkladom po a):*

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Tu je to jednoduché. Stred hyperboly je bod $S[0;0]$.

U: Súhlasím. Určme dĺžky hlavnej a vedľajšej polosi.

Ž: *To je tiež ľahké. Dĺžka hlavnej polosi, vlastne jej druhá mocnina, je v zlomku pod výrazom x^2, teda $a^2 = 4$. Potom $a = 2$.*

U: Upresňujem, že druhá mocnina dĺžky hlavnej polosi je v menovateli toho zlomku, ktorý v rovnici vystupuje s kladným znamienkom. Nemusí to byť vždy zlomok s premennou x.

Ž: *Druhá mocnina dĺžky vedľajšej polosi je v zlomku pod výrazom y^2, t. j. v zlomku, ktorý v rovnici vystupuje so záporným znamienkom. To znamená $b^2 = 4$, z čoho $b = 2$.*

U: Vedel by si povedať ako je umiestnená hyperbola v sústave súradníc? S ktorou osou sústavy súradníc je rovnobežná jej hlavná os?

Ž: *Hm... Trošku ma mätie, že v menovateľoch oboch zlomkov je rovnaké číslo. Dĺžky oboch polosí sú rovnaké. Nevadí to? Neviem povedať, ktorá je väčšia.*

U: To si si poplietol s elipsou. Pri hyperbole je dôležité to, ktorý zlomok má kladné znamienko a ktorý záporné. Podľa toho zistíme polohu hyperboly. Ak je v rovnici zlomok s premennou x s kladným znamienkom, t. j. rovnica hyperboly má tvar:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$$

jej hlavná os je rovnobežná s osou x. V opačnom prípade má hyperbola rovnicu:

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1,$$

t. j. zlomok s premennou x je so záporným znamienkom, hlavná os hyperboly je rovnobežná s osou y.

Ž: *Pochopil som. V našom prípade je zlomok s premennou x na prvom mieste, teda má kladné znamienko. Hlavná os hyperboly bude rovnobežná s osou x. Hyperbola bude „vpravo“ a „vľavo“.*

U: Určme teraz súradnice vrcholov hyperboly. Stred elipsy je v začiatku sústavy súradníc, znamená to, že osi elipsy ležia na súradnicových osiach.

Ž: *Jasné! Preto hlavné vrcholy budú ležať na osi x vzdialené od stredu o dĺžku hlavnej polosi, teda o $a = 2$. Hlavné vrcholy majú súradnice:*

$$A[-2; 0] \quad a \quad B[2; 0].$$

U: Pokračujeme so súradnicami ohnísk hyperboly.

Ž: *To by malo byť tiež jednoduché. Ohniská ležia na hlavnej osi, t. j. na osi x. Od stredu sú vzdialené o excentricitu e.*

U: Najprv určme hodnotu e. Využijeme vzťah, ktorý platí pre parametre hyperboly:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ž: *Podľa neho vypočítam e:*

$$e = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

U: Dobre. Teraz by si mal vedieť určiť súradnice ohnísk.

Ž: *Áno. Ohniská hyperboly majú súradnice:*

$$F_1[-2\sqrt{2}; 0] \quad a \quad F_2[2\sqrt{2}; 0].$$

U: Ostávajú asymptoty.

Ž: *Na tie máme vzorce. Asymptoty majú rovnice:*

$$a_1 : (y-n) = \frac{b}{a}(x-m),$$

$$a_2 : (y-n) = -\frac{b}{a}(x-m).$$

Pre našu hyperbolu platí: $m = 0,\ n = 0,\ a = 2,\ b = 2$. Preto rovnice asymptot sú:

$$a_1 : y = x \quad a \quad a_2 : y = -x.$$

U: Správne. Ukážem ti však aj iný postup, pri ktorom si netreba pamätať „vzorce“ pre asymptoty.
Určíme si súradnice bodu K, ktorý leží na jednej asymptote. Zároveň leží „nad“ hlavným vrcholom B, posunutý o dĺžku vedľajšej polosi. Bod $B[2;0]$ a $b = 2$, preto $K[2;2]$. Teraz poznáme dva body, ktoré patria asymptote, body S a K. Nájdeme rovnicu asymptoty v smernicovom tvare: $y = kx + q,\ k, q \in \mathbb{R}$.

Ž: *To si skúsim sám. Dosadím súradnice jednotlivých bodov do smernicového vyjadrenia priamky. Pre bod $S]0;0]$ mám:*

$$0 = k \cdot 0 + q.$$

A pre bod $K[2;2]$ dostávam:

$$2 = k \cdot 2 + q.$$

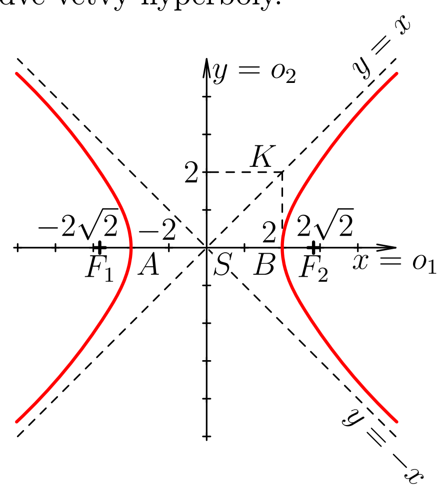
Z toho je jasné, že $q = 0$ a $k = 1$. Rovnica asymptoty je

$$a_1 : y = x.$$

U: Druhú asymptotu určíme na základe symetrie. Asymptoty, tak ako aj celá hyperbola, sú súmerné podľa vedľajšej osi. Tou je v našom prípade os y. Preto rovnica druhej asymptoty je:

$$a_2 : y = -x.$$

Nakoniec zakreslíme hyperbolu v sústave súradníc. Najprv si vyznačíme hlavnú a vedľajšiu os, hlavné vrcholy a ohniská. Potom zakreslíme asymptoty, pomôcť si môžeme aj bodom K. A nakoniec zaznačíme dve vetvy hyperboly.



Ž: *Pokračujem úlohou b):*

$$(x-2)^2 - 9y^2 = 9.$$

To ale nie je stredový tvar rovnice! Na pravej strane nemáme jednotku!

U: Veľmi ľahko ju tam však vyrobíme. Stačí obe strany rovnice vydeliť číslom 9.

Ž: *Máte pravdu. Hyperbola má stredovú rovnicu:*

$$\frac{(x-2)^2}{9} - y^2 = 1.$$

Súradnice stredu, to sú tie čísla v zátvorke pri x a y, ale s opačným znamienkom. To znamená, že:

$$S[2;0].$$

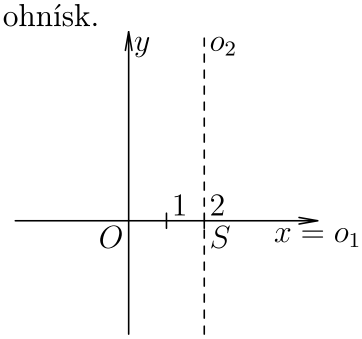
U: Výborne. Nasleduje určenie veľkosti polosí.

Ž: *V menovateli prvého zlomku s kladným znamienkom je 9, preto $a=3$. V menovateli druhého zlomku so záporným znamienkom je… nič.*

U: Nie nič, ale číslo jedna, jednotka.

Ž: *Aha! Preto $b=1$. Kladné znamienko je pri zlomku s premennou x, preto hlavná os hyperboly je rovnobežná s osou x. A vedľajšia s osou y.*

U: Áno. Znázornime si v sústave súradníc stred hyperboly a jej osi. Obrázok nám pomôže pri určovaní súradníc vrcholov a ohnísk.



U: Hlavná os je dokonca totožná s osou x. Na nej ležia hlavné vrcholy hyperboly.

Ž: *To znamená, že sú „napravo " a „naľavo" od stredu S, posunuté o dĺžku hlavnej polosi, čiže o $a=3$. Hlavné vrcholy majú súradnice:*

$$A[-1;0] \quad a \quad B[5;0].$$

U: Výborne. Pokračujeme ohniskami hyperboly.

Ž: *Najprv určím excentricitu hyperboly:*

$$e = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}.$$

U: Dobre. Ohniská ležia na hlavnej osi o_1.

Ž: *Áno. Ohniská majú súradnice:*

$$F_1[2-\sqrt{10};0] \quad a \quad F_2[2+\sqrt{10};0].$$

U: Potrebujeme ešte asymptoty. Pomôžeme si bodom K.

Ž: *Ten leží „nad" hlavným vrcholom $B[5;0]$, posunutý o dĺžku vedľajšej polosi $b=1$. Preto $K[5;1]$. Do smernicového tvaru rovnice asymptoty: $y=kx+q,\ k,q\in\mathbb{R}$ dosadím súradnice bodov $S[2;0]$ a $K[5;1]$. Dostávam:*

$$0 = k\cdot 2 + q,$$

$$1 = k\cdot 5 + q.$$

Prvú rovnicu vynásobím (-1) a rovnice sčítam. Mám:

$$1 = 3k,$$

z čoho $k=\frac{1}{3}$. Dosadím túto hodnotu napr. do prvej rovnice:

$$0 = 2\cdot\frac{1}{3} + q$$

a viem, že $q=-\frac{2}{3}$. Rovnica asymptoty je

$$a_1 : y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

U: Výborne. Druhú asymptotu určíme podobne. Bod K' nachádzajúci sa nad druhým hlavným vrcholom A má súradnice $K'[-1;1]$.

Ž: *Opäť zostavím sústavu rovníc:*

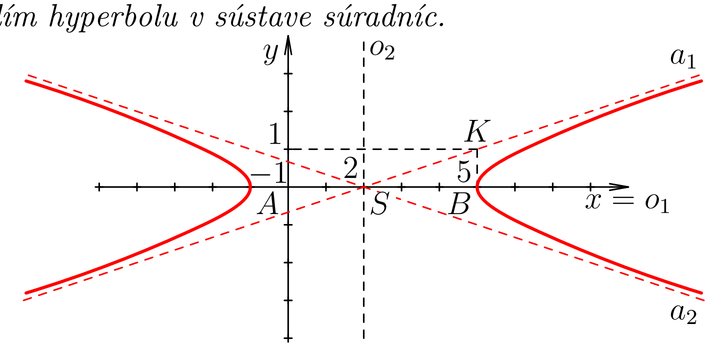
$$0 = k\cdot 2 + q,$$

$$1 = k\cdot(-1) + q.$$

Jej riešením je $k=-\frac{1}{3}$ a $q=\frac{2}{3}$. Preto rovnica druhej asymptoty je:

$$a_2 : y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Nakoniec zakreslím hyperbolu v sústave súradníc.



Úloha 1: *V sústave súradníc v rovine zakreslite hyperboly dané nasledujúcim analytickým vyjadrením:*

a) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1,$

b) $(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 16.$

Určte súradnice stredu, ohnísk, vrcholov a rovnice asymptot hyperboly.

Výsledok:

a) $o_1 \parallel o_y, a = 3, b = 2, e = \sqrt{13}, S[0;0], A[0;3], B[0;-3], F_1[0;-\sqrt{13}], F_2[0;\sqrt{13}],$
$a_1 : y = \frac{3}{2}x, a_2 : y = -\frac{3}{2}x,$

b) $o_1 \parallel o_x, a = 4, b = 2, e = 2\sqrt{5}, S[1;-2], A[-3;-2], B[5;-2], F_1[1-2\sqrt{5};-2],$
$F_2[1+2\sqrt{5};-2], a_1 : x - 2y - 5 = 0, a_2 : x + 2y + 3 = 0$

Príklad 2: *Napíšte rovnicu hyperboly, ak $F_1[-3;0]$ a $F_2[3;0]$ sú jej ohniská a dĺžka hlavnej polosi $a = 2$.*

U: Akú rovnicu hyperboly poznáš?

Ž: *Poznám stredovú a všeobecnú rovnicu hyperboly. Viac sa mi však páči stredová. Je to táto:*

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

U: Alebo aj

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1,$$

kde stred hyperboly je bod $S[m;n]$, a je dĺžka hlavnej polosi a b je dĺžka vedľajšej polosi hyperboly.

Ž: *Áno, zabudol som, máme dve možnosti podľa toho, ako je hyperbola umiestnená v sústave súradníc.*

U: Na napísanie stredovej rovnice hyperboly potrebujeme poznať súradnice stredu hyperboly a dĺžky jej polosí.

Ž: *Poznáme dĺžku hlavnej polosi $a = 2$. Ako však zistím súradnice jej stredu?*

U: Máme predsa dané ohniská. Aká je poloha ohnísk hyperboly vzhľadom na jej stred?

Ž: *Stred hyperboly leží presne „v strede“ medzi ohniskami.*

U: Dá sa to povedať aj takto: Stred hyperboly je stredom úsečky F_1F_2.

Ž: *Aha! A súradnice stredu úsečky viem vypočítať. Keď sa pozriem na súradnice ohnísk $F_1[-3;0]$ a $F_2[3;0]$, viem to aj spamäti. Ohniská ležia na osi x, ich prvé súradnice sú -3 a 3, z toho je jasné, že*

$$S[0;0].$$

U: Výborne. Zároveň si si uvedomil aj ďalší fakt. Ohniská ležia na osi x, to znamená, že os x je hlavnou osou hyperboly.

Ž: *A keďže stred je v začiatku sústavy súradníc, vedľajšia os je os y.*

U: Tiež je jasné, že excentricita $e = 3$.

Ž: *Áno. Je to vzdialenosť ohniska od stredu hyperboly.*

U: Potrebujeme ešte dĺžku vedľajšej polosi b. Určíme ju pomocou vzťahu, ktorý platí pre hyperbolu:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ž: *Vyjadrím si b a dostávam:*

$$b = \sqrt{e^2 - a^2}.$$

Dosadím naše hodnoty a mám:

$$b = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}.$$

Dĺžka vedľajšej polosi je $b = \sqrt{5}$.

U: Máme určené súradnice stredu $S[0;0]$ a dĺžky polosí $a = 2$ a $b = \sqrt{5}$. Vieme, že hlavná os je rovnobežná s osou x. Akú rovnicu má hyperbola?

Ž: *To je teraz už ľahké. Dosadím len hodnoty. Hyperbola má rovnicu:*

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Úloha 1: *Napíšte rovnicu hyperboly, ak $F_1[-6;3]$ a $F_2[2;3]$ sú jej ohniská a dĺžka hlavnej polosi $a = 2$.*

Výsledok: $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{12} = 1$

Úloha 2: *Napíšte rovnicu hyperboly, ktorá má ohniská $F_1[-2;1]$, $F_2[6;1]$ a hlavný vrchol $A[4;1]$.*

Výsledok: $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$

Príklad 3: *Rozhodnite, či nasledujúca rovnica:*

$$9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$$

je analytickým vyjadrením hyperboly. V prípade, že ide o hyperbolu, určte súradnice jej stredu, veľkosti hlavnej a vedľajšej polosi a excentricitu.

Ž: *Myslím, že je to všeobecná rovnica hyperboly.*

U: Mohla by byť. Všeobecná rovnica hyperboly má tvar:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

pričom $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ a zároveň $A \cdot B < 0$.

Ž: *Podmienky sú splnené, A je kladné a B je záporné.. Určite je to hyperbola.*

U: Povedali sme, že všeobecná rovnica hyperboly má tento tvar. Avšak nie každá rovnica tohto tvaru vyjadruje hyperbolu. Danú rovnicu upravíme na stredový tvar, a ak sa nám to podarí, je to hyperbola.

Ž: *Dobre. Aj tak zo všeobecnej rovnice hyperboly neviem určiť súradnice jej stredu.*

U: Ako vyzerá stredový tvar rovnice hyperboly?

Ž: *Je to rovnica typu:*

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

alebo

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1.$$

U: Pričom m, n sú súradnice stredu hyperboly a a, b sú veľkosti jej polosí. Na rozdiel od všeobecnej rovnice, je upravená na „štvorce“.

Ž: *To myslíte asi tie zátvorky $(x-m)^2$ a $(y-n)^2$, však?*

U: Presne tak. Budeme tieto výrazy v zátvorkach vyrábať. Znamená to urobiť úpravu na štvorec.

Ž: *Tak to si dám najprv dohromady členy s x a členy s y. Zopakujem si danú rovnicu:*

$$9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0.$$

Takže:

$$(9x^2 - 36x) - (16y^2 + 32y) - 124 = 0.$$

U: Pozor! Zátvorky nemôžeme len tak pridať kde chceme. Musíme si dať pozor na znamienka. Pred druhou zátvorkou je znamienko mínus, znamená to, že máme v zátvorke každý člen s opačným znamienkom, teda aj člen $+32y$. Správne to vyzerá takto:

$$(9x^2 - 36x) - (16y^2 - 32y) - 124 = 0.$$

Ž: *Rozumiem. Nabudúce si dám väčší pozor.*

U: Navyše zátvorky teraz upravíme na štvorec. Preto je veľmi vhodné vybrať koeficient pri x^2 a y^2 pred zátvorku. Takto:

$$9(x^2 - 4x) - 16(y^2 - 2y) - 124 = 0.$$

Ž: *To je dobrý nápad. Keby som vybral pred druhú zátvorku rovno* (-16)*, snáď by som sa nepomýlil v znamienku.*

U: Pozrieme sa na prvú zátvorku. Chceme, aby to bol výraz tvaru $A^2 - 2AB + B^2$.

Ž: *V zátvorke mi chýba člen* B^2*. Asi by som si ho mal nejako vyrobiť...*

U: Člen $2AB$ má tvar $4x$, čo sa dá napísať aj $2 \cdot x \cdot 2$.

Ž: *Z toho je jasné, že* $B = 2$*. Chýbajúci člen* B^2 *bude* $2^2 = 4$.

U: Takže ho pripíšeme do zátvorky. A aby platila rovnosť, musíme ho aj odčítať. Preto:

$$9[(x^2 - 4x + 4) - 4] - 16(y^2 - 2y) - 124 = 0.$$

Ž: *Druhú zátvorku skúsim ja. Mám tam* $2y$*, to je vlastne* $2 \cdot y \cdot 1$*, takže mi bude chýbať člen* $1^2 = 1$*. Preto:*

$$9[(x^2 - 4x + 4) - 4] - 16[(y^2 - 2y + 1) - 1] - 124 = 0.$$

U: Výborne. Teraz odstránime hranaté zátvorky.

Ž: *Máme:*

$$9(x^2 - 4x + 4) - 36 - 16(y^2 - 2y + 1) + 16 - 124 = 0.$$

U: Výborne. Prvá zátvorka nám dáva $(x-2)^2$ a druhá $(y-1)^2$. Ešte sčítame zvyšné čísla $-36 + 16 - 124$ a výsledný súčet -144 dáme na pravú stranu. Dostávame:

$$9(x-2)^2 - 16(y-1)^2 = 144.$$

Ž: *Ale stredová rovnica hyperboly má na pravej strane jednotku!*

U: Máš pravdu, ešte sme s úpravami neskončili. Jednotku na pravej strane získame tak, že obe strany rovnice vydelíme číslom 144. Dostávame:

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

A to je stredová rovnica hyperboly. Vedel by si mi povedať, aké sú súradnice jej stredu a veľkosti jej polosí?

Ž: *Súradnice stredu - to sú čísla v zátvorkách, ale s opačným znamienkom, čiže* $S[2;1]$*. Veľkosť hlavnej polosi* a *a veľkosť vedľajšej polosi* b *nájdem v menovateľoch zlomkov. Teda presnejšie ich druhé mocniny. S kladným znamienkom je zlomok s* x*, preto v jeho menovateli budem hľadať veľkosť hlavnej polosi. To znamená, že* $a = 4$ *a* $b = 3$.

U: Výborne. Ako určíme excentricitu hyperboly?

Ž: *Využijeme vzťah, ktorý platí pre parametre hyperboly:*

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

U: Súhlasím.

Ž: *Podľa neho vypočítam* e*:*

$$e = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Úloha 1: *Rozhodnite, či nasledujúca rovnica je analytickým vyjadrením hyperboly:*

$$x^2 - 5y^2 + 6x - 10y + 40 = 0.$$

V prípade, že ide o hyperbolu, určte súradnice jej stredu, veľkosti hlavnej a vedľajšej polosi a excentricitu.

Výsledok: $S[-3;-1], a = \frac{6\sqrt{5}}{5}, b = 6, e = \frac{6\sqrt{6}}{5}$

Príklad 4: *Dokážte,že súčin vzdialeností ľubovoľného bodu hyperboly $2x^2 - y^2 = 2$ od jej asymptot je konštantný a rovná sa $\frac{2}{3}$.*

U: Povieme si najprv niečo o hyperbole. Aké súradnice má jej stred a aké sú dĺžky jej poloosí?

Ž: *Upravím si rovnicu hyperboly*

$$2x^2 - y^2 = 2$$

na stredový tvar, to znamená, že na pravej strane vyrobím jednotku. Vydelím obe strany rovnice číslom 2:

$$x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$$

Odtiaľ viem, že $S[0;0]$, dĺžka hlavnej polosi $a = 1$ a dĺžka vedľajšej polosi $b = \sqrt{2}$.

U: Výborne. Teraz potrebujeme rovnice jej asymptot.

Ž: *Na tie máme vzorce. Asymptoty majú rovnice:*

$$a_1 : (y - n) = \frac{b}{a}(x - m),$$

$$a_2 : (y - n) = -\frac{b}{a}(x - m).$$

Pre našu hyperbolu platí: $m = 0$, $n = 0$, $a = 1$, $b = \sqrt{2}$. Preto rovnice asymptot sú:

$$a_1 : y = \sqrt{2} \cdot x \quad a \quad a_2 : y = -\sqrt{2} \cdot x.$$

U: Súhlasím. Vhodnejšie by boli ich všeobecné rovnice.

Ž: *To je jednoduché. Dám všetky členy na ľavú stranu a na pravej mi ostane nula. Všeobecné rovnice asymptot sú:*

$$a_1 : \sqrt{2} \cdot x - y = 0 \quad a \quad a_2 : \sqrt{2} \cdot x + y = 0.$$

U: Nech $X[x; y]$ je ľubovoľný bod hyperboly. Znamená to, že jeho súradnice x, y spĺňajú danú rovnicu hyperboly: $2x^2 - y^2 = 2$. Ako určíme vzdialenosť bodu X od asymptot?

Ž: *Hm... To naozaj neviem.*

U: Určite to vieš. Asymptoty sú predsa priamky. Potrebuješ určiť vzdialenosť bodu od priamky.

Ž: *Aha! Vzdialenosť bodu M od priamky p sa počíta podľa vzorca:*

$$|Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

kde bod $M[m_1; m_2]$ a priamka p je daná všeobecnou rovnicou $ax + by + c = 0$, pričom $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \vee b \neq 0$.

U: No vidíš! My máme bod $X[x; y]$ a priamku $a_1 : \sqrt{2} \cdot x - y = 0$. Preto pre vzdialenosť bodu X od priamky a_1 platí podľa vzorca, ktorý si uviedol:

$$|Xa_1| = \frac{|\sqrt{2} \cdot x - y|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2}}.$$

Po úprave máme:

$$|Xa_1| = \frac{|\sqrt{2} \cdot x - y|}{\sqrt{3}}.$$

Ž: *Vzdialenosť od druhej asymptoty určím ja! Mám bod $X[x; y]$ a druhú asymptotu $a_2 : \sqrt{2} \cdot x + y = 0$. Pre vzdialenosť bodu X od priamky a_2 platí:*

$$|Xa_2| = \frac{|\sqrt{2} \cdot x + y|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2}}.$$

Po úprave mám:

$$|Xa_2| = \frac{|\sqrt{2} \cdot x + y|}{\sqrt{3}}.$$

U: Vyjadríme teraz súčin vzdialeností $|Xa_1| \cdot |Xa_2|$.

Ž: *To len dám dokopy obe vyjadrenia. Dostávam:*

$$|Xa_1| \cdot |Xa_2| = \frac{|\sqrt{2} \cdot x - y|}{\sqrt{3}} \cdot \frac{|\sqrt{2} \cdot x + y|}{\sqrt{3}}.$$

Menovatele môžem vynásobiť, čím sa mi odstráni odmocnina:

$$|Xa_1| \cdot |Xa_2| = \frac{|\sqrt{2} \cdot x - y| \cdot |\sqrt{2} \cdot x + y|}{3}.$$

U: Všimni si, že v čitateli môžeme použiť vzorec $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Ž: *Máte pravdu. Súčin vzdialeností sa preto rovná:*

$$|Xa_1| \cdot |Xa_2| = \frac{|2x^2 - y^2|}{3}.$$

U: Uvedomíme si, že súradnice x, y bodu X spĺňajú rovnicu hyperboly, t. j. platí: $2x^2 - y^2 = 2$.

Ž: *Ale to predsa máme v čitateli! Výraz v čitateli sa rovná 2?*

U: Presne tak. Preto:

$$|Xa_1| \cdot |Xa_2| = \frac{|2|}{3} = \frac{2}{3}.$$

A tým je dôkaz hotový.