Elipsa a jej analytické vyjadrenie

RNDr. Viera Vodičková

U: Čo si predstavuješ pod pojmom ***elipsa***?

Ž: *Elipsu poznám. Stretávam sa s ňou snáď každý deň. Stačí, keď sa vyberiem do chladničky a narežem si zopár plátkov salámy. Ak krájam pekne rovno, získam okrúhle plátky. Ak však režem šikmo, získam podlhovasté plátky, elipsy.*

U: To bol pekný príklad. Akurát elipsa je len čiara, ktorá tvoje „podlhovasté“ plátky ohraničuje. Podobne ako kružnica ohraničuje okrúhle plátky.

Ž: *Elipsu vidím veľmi často. Vlastne vždy, keď sa na kružnicu dívam šikmo. Tvar elipsy majú aj stoly, budovy a dokonca aj počítačové myšky sa na ňu podobajú.*

U: Pripomeniem elipsu ešte v jednej súvislosti. Naša Zem sa pohybuje okolo Slnka po dráhe, ktorá má tvar elipsy.

Ž: *Učili sme sa o tom na fyzike. Tuším to objavil matematik Ján Kepler.*

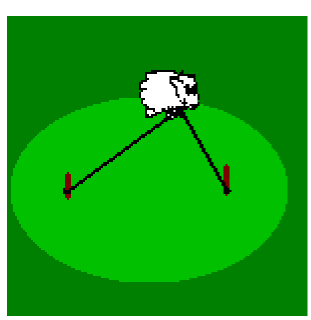
U: Áno. A aj ostatné planéty obiehajú okolo Slnka po eliptických dráhach.

Ž: *Viem si elipsu predstaviť. Ale ako vlastne vznikne? S kružnicou je to jednoduché, „zapichnem kružidlo“ a ramenom opíšem kružnicu.*

U: Predstav si, že máš kozu, priviazanú o kolík na tráve. Necháme ju pásť.

Ž: *Aha! Koza vyžerie celý kruh, ak bude hladná. . .*

U: Čiže územie ohraničené kružnicou. A teraz ju priviažeme povrazom ku dvom kolíkom, tak aby sa mohla pozdĺž povrazu pohybovať, pozri si obrázok.



Ž: *Jasné, teraz to bude ohraničovať elipsa.*

U: Všetky body na elipse majú súčet vzdialeností od týchto dvoch kolíkov rovnaký.

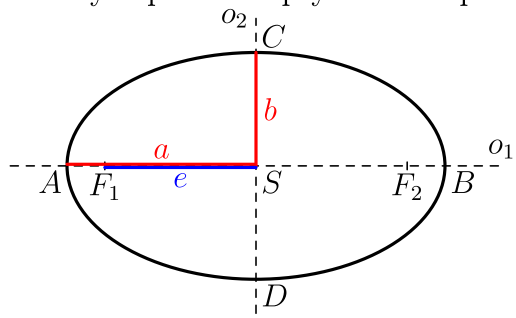
Ž: *Áno, presne toľko koľko je dĺžka povrazu.*

U: Kolíky nazveme ***ohniská*** elipsy a označujeme ich F_1 a F_2. ***Elipsou nazývame množinu všetkých bodov X roviny, ktoré majú od dvoch rôznych bodov tejto roviny F_1 a F_2 konštantný súčet vzdialeností rovnajúci sa kladnému reálnemu číslu $2a$, pričom číslo $2a$ je väčšie ako vzdialenosť bodov F_1 a F_2***. Elipsu označujeme veľkým písmenom E.

$$\boxed{E = \{X \in \mathbb{E}_2; |XF_1| + |XF_2| = 2a; a \in \mathbb{R}^+; 2a > |F_1F_2|\}}$$

Ž: *To sa dá na základe príkladu s kozou pochopiť. Ale prečo $2a$?*

U: $2a$ predstavuje dĺžku povrazu. Prečo je táto konštanta takto vyjadrená, hneď uvidíš. Vysvetlíme si označenia jednotlivých prvkov elipsy. K tomu potrebujeme obrázok.



U: Elipsa má dve osi, hlavnú o_1 a vedľajšiu o_2 . Tieto dve osi sú na seba kolmé. Ich priesečník je bod S a nazýva sa ***stred elipsy***.

Ž: *Hlavná os je tá „dlhšia“ a vedľajšia zase „kratšia“. Naviac vidím, že na hlavnej osi ležia obe ohniská.*

U: Áno. Ohniská sú rovnako vzdialené od stredu elipsy. Túto vzdialenosť označujeme e a nazýva sa ***excentricita elipsy***.

Ž: *Excentricita - to sa mi skoro poláme jazyk...*

U: Namiesto slova excentricita sa môže použiť aj ***výstrednosť***.

U: Ostali nám ešte vrcholy elipsy.

Ž: *To budú asi body A, B, C a D.*

U: Priesečníky hlavnej osi a elipsy nazývame ***hlavné vrcholy elipsy***. Sú to body A a B. Vzdialenosť hlavného vrcholu od stredu sa nazýva ***dĺžka hlavnej polosi*** a označuje sa a.

Ž: *To je to a, ktoré vystupovalo v definícii?*

U: Presne to, čiže polovica dĺžky povrazu. Analogicky priesečníky vedľajšej osi a elipsy nazývame ***vedľajšie vrcholy elipsy***. Sú to body C a D. Vzdialenosť vedľajšieho vrcholu od stredu sa nazýva ***dĺžka vedľajšej polosi*** a označuje sa b. Pričom platí, že $a > b$. Čiže dĺžka hlavnej polosi je vždy väčšia ako dĺžka vedľajšej polosi.

Ž: *Nemôžu byť aj rovnaké, teda čo ak by sa a rovnalo b?*

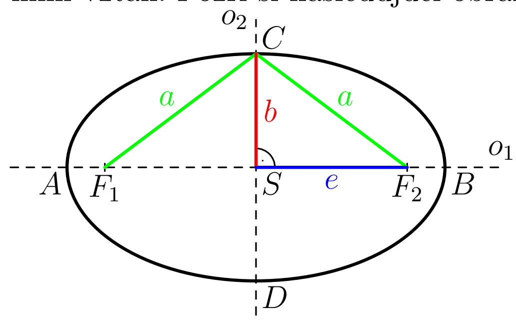
U: Skús porozmýšľať sám. Ako by vyzerala elipsa, ktorej hlavná aj vedľajšia polos má rovnakú dĺžku?

Ž: *To by bola rovnako „dlhá“ ako „široká“. Bola by to... kružnica!*

U: Správne.

Ž: *Takže elipsa má až tri parametre a, b, e?*

U: Áno. Ale existuje medzi nimi vzťah. Pozri si nasledujúci obrázok.



Sústredíme sa na bod C. Je to bod elipsy, takže na základe definície elipsy platí:

$$|CF_1| + |CF_2| = 2a.$$

Ž: *Aha! Elipsa je predsa súmerná a preto*

$$|CF_1| = |CF_2| = a.$$

U: Výborne. Teraz si všimneme trojuholník SF_2C.

Ž: *Je pravouhlý, lebo osi elipsy sú na seba kolmé.*

U: Áno. V každom pravouhlom trojuholníku platí Pytagorova veta. Podľa nej pre tento trojuholník platí:

$$b^2 + e^2 = a^2.$$

Odtiaľ dostávame vzťah pre exentricitu elipsy:

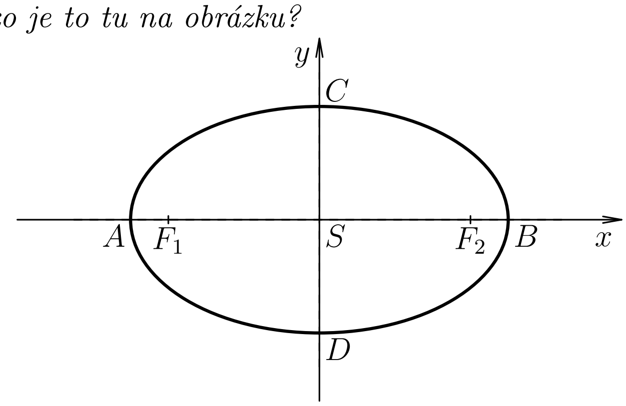
$$e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

U: Povieme si aké analytické vyjadrenie má elipsa.

Ž: *Bude mať rovnicu, tak ako kružnica alebo priamka?*

U: Áno. Rovnica elipsy závisí od jej polohy v sústave súradníc. My sa budeme zaoberať len takýmim elipsami, ktorých osi sú rovnobežné s osami x, y sústavy súradníc.

Ž: *Čiže napr. takto, ako je to tu na obrázku?*

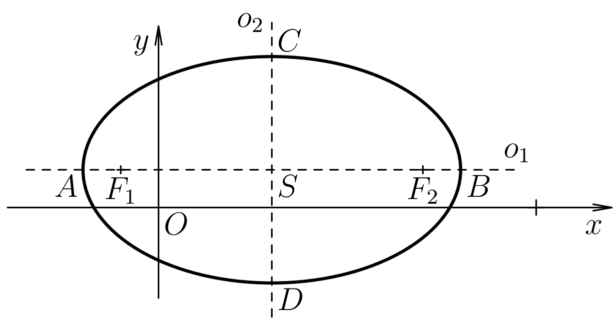


U: Áno. To je jednoduchý príklad. Osi elipsy ležia na súradnicových osiach a to tak, že os x predstavuje hlavnú os elipsy a os y vedľajšiu os. Stred elipsy má súradnice $S[0; 0]$. Rovnica takejto elipsy je potom:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ž: *Celkom sympatická rovnica. Ako sa zmení, ak elipsu posuniem niekde inde?*

U: Elipsu posunieme tak, že jej hlavná os bude rovnobežná s osou x a vedľajšia s osou y. Stred elipsy má súradnice $S[m; n]$.

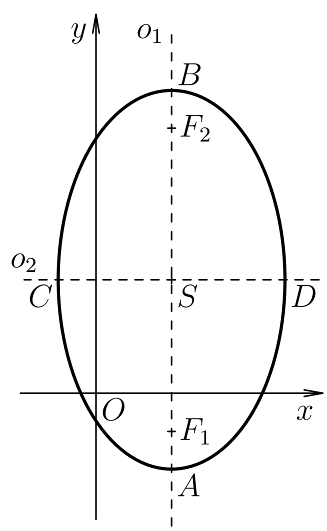


Rovnica takejto elipsy je potom:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Ž: *To je rovnaké ako pri kružnici. Namiesto x^2 máme $(x-m)^2$, čo vyjadruje posunutie stredu elipsy.*

U: Povedali sme, že sa budeme zaoberať len takými elipsami, ktorých osi sú rovnobežné s osami x, y sústavy súradníc. Druhá možnosť umiestnenia elipsy v sústave súradníc je na ďalšom obrázku.



Ž: *Elipsa sa otočila. Teraz je na „výšku“.*

U: V tejto polohe je hlavná os elipsy rovnobežná s osou y a vedľajšia s osou x. Stred elipsy má opäť súradnice $S[m;n]$. Rovnica elipsy je potom:

$$\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1.$$

Ž: *Vymenili sa dĺžky polosí. Pod členom s x je b a pod členom s y je a.*

U: Áno. Vieme, že $a>b$. Podľa toho, či bude väčšie číslo pod členom s x alebo pod členom s y, budeme vedieť, ako je elipsa otočená v sústave súradníc. Uvedené rovnice nazývame stredovými rovnicami elipsy.

Ž: *Podľa toho, že v nich vystupujú súradnice stredu elipsy.*

U: Okrem stredovej rovnice elipsy poznáme aj všeobecnú rovnicu elipsy. Vznikne úpravou stredovej rovnice – roznásobením zátvoriek, odstránením zlomkov a umiestnením všetkých členov na ľavú stranu rovnice. Všeobecná rovnica elipsy má tvar:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0,$$

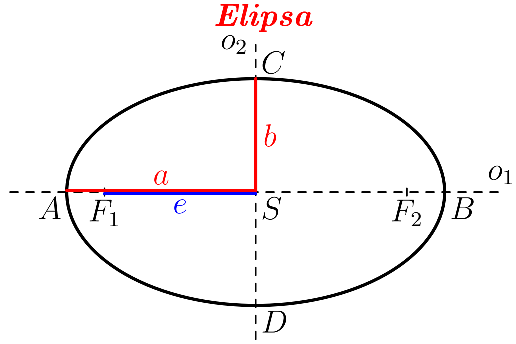
pričom $A,B,C,D,E\in\mathbb{R}$ a zároveň $A\neq B$ a $A,B>0$.

Ž: *No...nevyzerá práve najkrajšie. Vidím však, že rovnica je kvadratická.*

U: Áno, elipsa patrí ku kvadratickým útvarom.

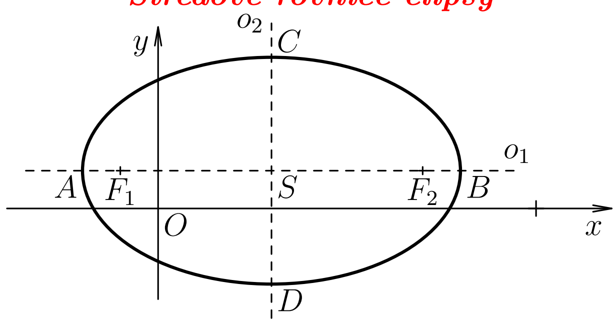
U: Zhrnutie všetkých dôležitých vecí si môžeš pozrieť v nasledujúcich tabuľkách.

Elipsa



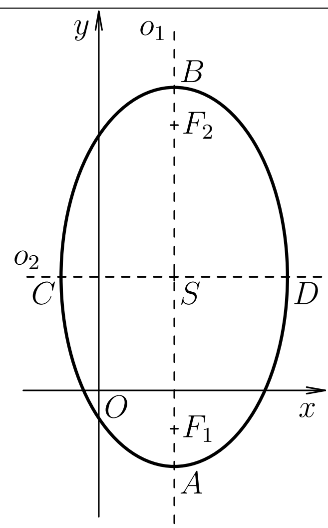
o_1 – hlavná os
o_2 – vedľajšia os
A,B – hlavné vrcholy
C,D – vedľajšie vrcholy
F_1,F_2 – ohniská
a –dĺžka hlavnej polosi
b – dĺžka vedľajšej polosi
e –excentricita (výstrednosť)
$e=\sqrt{a^2-b^2}$

Stredové rovnice elipsy



$$o_1 \parallel o_x \wedge o_2 \parallel o_y$$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$



$$o_1 \parallel o_y \wedge o_2 \parallel o_x$$

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

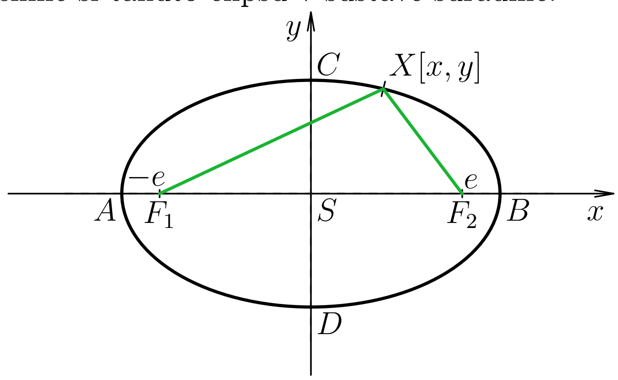
Dôkaz: *Nech je daná elipsa so stredom $S[0;0]$, ktorej hlavná os leží na osi x a vedľajšia os na osi y. Dokážte, že túto elipsu môžeme analyticky vyjadriť rovnicou:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

kde a, b sú dĺžky hlavnej a vedľajšej polosi elipsy.

Ž: *Vyzerá to tak, že mám odvodiť stredovú rovnicu elipsy. Odkiaľ mám začať? Obrázkom?*

U: Dobrý nápad. Zakreslime si takúto elipsu v sústave súradníc.



Ž: *Obrázok mi veľmi nepomohol... Nevidím tu nijaký pravouhlý trojuholník ani nič podobné...*

U: Začneme definíciou elipsy.

Ž: *Elipsou nazývame množinu všetkých bodov roviny, ktoré majú od dvoch rôznych bodov tejto roviny F_1 a F_2 konštantný súčet vzdialeností rovnajúci sa kladnému reálnemu číslu $2a$, pričom číslo $2a$ je väčšie ako vzdialenosť bodov F_1 a F_2.*

U: Výborne. Zoberieme si ľubovoľný bod elipsy $X[x;y]$. Podľa definície preň platí:

$$|XF_1|+|XF_2|=2a.$$

Vyjadríme si veľkosti úsečiek $|XF_1|$ a $|XF_2|$.

Ž: *Potrebujem súradnice ohnísk F_1 a F_2. Aha! Použijem obrázok. Hneď vidím, že*

$$F_1[-e;0] \quad a \quad F_2[e;0].$$

U: Správne. Dodám len, že e je excentricita elipsy. Je to vzdialenosť ohniska a stredu elipsy. Súradnice máme. Vyjadrime pomocou nich veľkosti príslušných úsečiek.

Ž: *Použijem vzorec na určenie vzdialenosti dvoch bodov. Podľa neho platí:*

$$|XF_1|=\sqrt{(-e-x)^2+(0-y)^2} \quad a \quad |XF_2|=\sqrt{(e-x)^2+(0-y)^2}.$$

U: V poriadku. Tieto vyjadrenia dosadíme do rovnice:

$$|XF_1|+|XF_2|=2a.$$

Ž: *Dosadzujem:*

$$\sqrt{(-e-x)^2+(0-y)^2}+\sqrt{(e-x)^2+(0-y)^2}=2a.$$

U: Túto rovnicu budeme upravovať, aby sme získali nejaký jej „krajší tvar“. Obe strany rovnice umocníme na druhú. Predtým však urobíme malú úpravu:

$$\sqrt{(-e-x)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2+y^2}.$$

Ž: *To ste len jednu odmocninu presunuli na druhú stranu. Zrejme sa tak bude ľahšie umocňovať... A nuly v zátvorkách boli zbytočné.*

U: Pri umocnení nezabudneme na to, že pravú stranu umocňujeme ako dvojčlen podľa vzorca $(a-b)^2$.

Ž: *Pokúsim sa správne umocniť obe strany rovnice, dostávam:*

$$(-e-x)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2+y^2} + (e-x)^2+y^2.$$

U: Dobre. Zátvorky upravíme podľa vzorca:

$$e^2+2ex+x^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2+y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2.$$

Ž: *Konečne sa dá niečo zjednodušiť! Výrazy e^2, x^2 a y^2 sa zrušia, teda odčítajú, a ešte môžem sčítať $2ex$. Dostávam:*

$$4ex = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2+y^2}.$$

U: Výborne. „Štvorky“ sú zbytočné, vykrátime celú rovnicu a máme:

$$ex = a^2 - a\sqrt{(e-x)^2+y^2}.$$

U: V rovnici stále ostala jedna odmocnina, nasleduje preto ďalšie umocnenie oboch strán rovnice na druhú. Najprv však rovnicu upravíme tak, aby sme pri umocnení odmocninu odstránili.

Ž: *Asi viem ako. Osamostatníme odmocninu na jednej strane. Napr. na ľavej a zvyšné členy dáme na pravú stranu. Vyzerá to takto:*

$$a\sqrt{(e-x)^2+y^2} = a^2 - ex.$$

U: Áno. Môžeme umocňovať.

Ž: *Dostávam:*

$$a^2[(e-x)^2+y^2] = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2.$$

U: Umocníme a roznásobíme zátvorky.

Ž: *Skúsim sám. Najprv umocním dvojčlen, potom roznásobím zátvorky. Sleduj rámček. A ešte člen $-2a^2ex$ sa odčíta.*

$$\boxed{\begin{aligned} a^2[e^2-2ex+x^2+y^2] &= a^4-2a^2ex+e^2x^2 \\ a^2e^2-2a^2ex+a^2x^2+a^2y^2 &= a^4-2a^2ex+e^2x^2 \\ a^2e^2+a^2x^2+a^2y^2 &= a^4+e^2x^2 \end{aligned}}$$

Nemáme už odmocniny, ale stále to nie je ono...

U: Teraz využijeme vzťah, ktorý platí pre parametre elipsy a, b a e.

Ž: *Myslíte tento:*

$$e^2 = a^2 - b^2?$$

U: Presne ten. Výraz e^2 nahradíme v rovnici daným vzťahom. Dostávame:

$$a^2(a^2 - b^2) + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + (a^2 - b^2)x^2.$$

Ž: *Nastupujem zase ja! Roznásobím zátvorky:*

$$a^4 - a^2b^2 + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + a^2x^2 - b^2x^2.$$

Výrazy a^4 a a^2x^2 sa odčítajú, mám rovnicu:

$$-a^2b^2 + a^2y^2 = -b^2x^2.$$

U: Prehodíme jednotlivé členy takto:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Na pravej strane rovnice potrebujeme dostať jednotku. Preto vydelíme obe strany rovnice výrazom a^2b^2 a dostávame:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ž: *A to je už požadovaná rovnica elipsy. Nebolo to až také ťažké.*

U: Aby bol dôkaz matematicky správny, je potrebné dokázať aj spätnú implikáciu. Zatiaľ sme ukázali, že každý bod elipsy spĺňa danú rovnicu. Môžeme však povedať, že všetky uskutočnené úpravy sú ekvivalentné, teda náš postup môžeme obrátiť. Znamená to, že ak súradnice nejakého bodu $X[x; y]$ spĺňajú danú rovnicu, tak bod X je bodom elipsy. Tým je dôkaz hotový.

Príklad 1: *V sústave súradníc v rovine zakreslite elipsy dané nasledujúcim analytickým vyjadrením:*

a) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1,$

b) $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{25} = 1,$

Určte súradnice stredu, ohnísk a vrcholov elipsy.

Ž: *Elipsy sú dané stredovými rovnicami.*

U: Máš pravdu. Pripomeniem len, že stredová rovnica elipsy, ktorá má osi rovnobežné s osami sústavy súradníc, má jeden z týchto tvarov:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

alebo

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1,$$

kde stred elipsy je bod $S[m;n]$, a je dĺžka hlavnej polosi a b je dĺžka vedľajšej polosi elipsy.

Ž: *Ktorý z tých tvarov to bude, závisí od toho, ktorým smerom je elipsa „natiahnutá“ v sústave súradníc. Keďže sa volá stredová rovnica, mal by som vedieť z nej vyčítať súradnice stredu elipsy. Začnem s príkladom po a):*

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Tu je to jednoduché. Stred elipsy je bod $S[0;0]$.

U: Súhlasím. Určme dĺžky hlavnej a vedľajšej polosi.

Ž: *To je tiež ľahké. Dĺžka hlavnej polosi je v zlomku pod výrazom x^2, teda $a = 16$.*

U: Pozor! V menovateli spomínaného zlomku sa nachádza jej druhá mocnina, a^2!

Ž: *Takže $a^2 = 16$, čiže $a = 4$. Druhá mocnina dĺžky vedľajšej polosi je v zlomku pod výrazom y^2, teda $b^2 = 4$, z čoho $b = 2$.*

U: Vedel by si povedať ako je umiestnená elipsa v sústave súradníc? S ktorou osou sústavy súradníc je rovnobežná jej hlavná os?

Ž: *Neviem, ale myslím si, že s osou x.*

U: Polohu elipsy zistíme podľa jej rovnice. Podľa toho, kde sú v rovnici umiestnené veľkosti hlavnej a vedľajšej polosi, teda parametre a, b. Musí platiť, že $a > b$. Potom platí aj $a^2 > b^2$. Ak sa v rovnici v zlomku pod výrazom $(x-m)^2$ nachádza väčšie číslo ako v zlomku pod výrazom $(y-n)^2$, rovnica elipsy má tvar:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Jej hlavná os je rovnobežná s osou x. V druhom prípade má elipsa rovnicu:

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

a jej hlavná os je rovnobežná s osou y.

Ž: *Pochopil som. Ja to budem robiť takto: Pozriem sa pod x, či je tam väčšie číslo ako pod y. Ak áno, elipsa je „natiahnutá pozdĺžne“ v smere osi x, ak nie, je „natiahnutá zvislo“ v smere osi y. Mal som teda pravdu, naša elipsa bude „pozdĺžna“.*

U: Určme teraz súradnice vrcholov elipsy. Stred elipsy je v začiatku sústavy súradníc, znamená to, že osi elipsy ležia na súradnicových osiach.

Ž: *Jasné! Preto hlavné vrcholy budú ležať na osi x vzdialené od stredu o dĺžku hlavnej polosi, teda o $a = 4$. Hlavné vrcholy majú súradnice:*

$$A[-4; 0] \quad a \quad B[4; 0].$$

U: Súhlasím. S vedľajšími vrcholmi to bude podobné.

Ž: *Vedľajšie vrcholy elipsy budú ležať na osi y vzdialené od stredu o dĺžku vedľajšej polosi, teda o $b = 2$. Majú súradnice:*

$$C[0; 2] \quad a \quad D[0; -2].$$

U: Ostáva nám určiť súradnice ohnísk elipsy.

Ž: *To by malo byť tiež jednoduché. Ohniská ležia na hlavnej osi, t. j. na osi x. Od stredu sú vzdialené o excentricitu e.*

U: Najprv určme hodnotu e. Využijeme vzťah, ktorý platí pre parametre elipsy:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ž: *Podľa neho vypočítam e:*

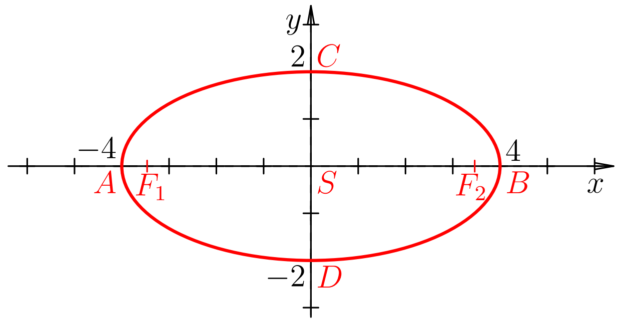
$$e = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

U: Dobre. Teraz by si mal vedieť určiť súradnice ohnísk.

Ž: *Áno. Ohniská elipsy majú súradnice:*

$$F_1[-2\sqrt{3}; 0] \quad a \quad F_2[2\sqrt{3}; 0].$$

U: Nakoniec zakreslíme elipsu v sústave súradníc.



Ž: *Pokračujem úlohou b). Máme danú elipsu:*

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{25}=1.$$

Súradnice stredu, to sú tie čísla v zátvorke pri x a y. Rovnicu si môžem napísať aj takto:

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-(-1))^2}{25}=1.$$

To znamená, že:

$$S[1;-1].$$

U: Výborne. Nasleduje určenie veľkosti polosí.

Ž: *V menovateli prvého zlomku je 9, preto $a=3$. V menovateli druhého zlomku je 25, preto $b=5$.*

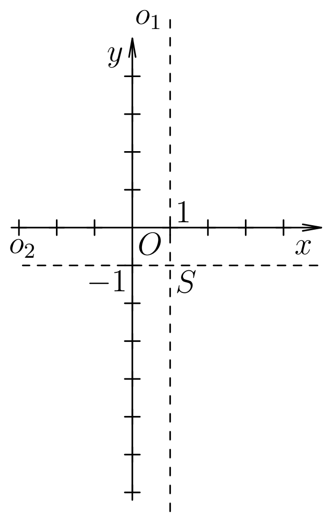
U: Dobre si to určil? Aký vzťah platí medzi a a b?

Ž: *Nó... Hlavná polos musí byť väčšia ako vedľajšia... To nesedí!*

U: Nie je pravda, že dĺžka hlavnej polosi musí byť v menovateli prvého zlomku, teda zlomku s x. Správne si však povedal, že $a>b$. Preto $a=5$ a $b=3$.

Ž: *Jasné! To, že sú vymenené, znamená, že elipsa bude v sústave súradníc „natiahnutá zvisle“.*

U: Áno. Jej hlavná os bude rovnobežná s osou y a vedľajšia s osou x. Znázornime si v sústave súradníc stred elipsy a jej osi. Obrázok nám pomôže pri určovaní súradníc vrcholov a ohnísk.



Ž: *Určiť súradnice vrcholov bude teraz ťažšie ako keď mal stred súradnice* $0, 0$.

U: Ani nie. Pozri sa na obrázok. Hlavné vrcholy elipsy ležia na hlavnej osi o_1.

Ž: *To znamená, že „pod " a „nad" stredom* S.

U: Áno. Ich x-ová súradnica je taká istá ako bodu S, t. j. 1. Mení sa len y-ová súradnica a to o toľko, koľko je dĺžka hlavnej polosi, čiže o $a = 5$. Hlavné vrcholy majú súradnice:

$$A[1; -6] \quad \text{a} \quad B[1; 4].$$

Ž: *Pochopil som. Vedľajšie vrcholy skúsim sám. Ležia na osi* o_2*, t. j. „naľavo " a „napravo" od stredu* S*. Preto ich* y*-ová súradnica je taká istá ako bodu* S*, t. j.* -1*. Zmení sa* x*-ová súradnica o dĺžku vedľajšej polosi, čiže o* $b = 3$*. Keďže* x*-ová súradnica bodu* S *je* 1*, naľavo to bude* $1 - 3 = -2$ *a napravo* $1 + 3 = 4$*. Vedľajšie vrcholy majú súradnice:*

$$C[-2; -1] \quad a \quad D[4; -1].$$

U: Výborne. Ostáva nám určiť súradnice ohnísk elipsy.

Ž: *Najprv určím excentricitu elipsy. Využijem vzťah, ktorý platí pre parametre elipsy:*

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Pre náš prípad platí:

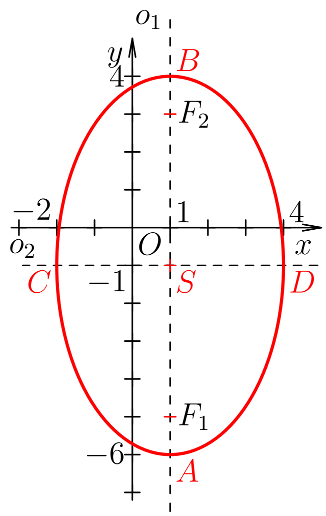
$$e = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4.$$

U: Dobre. Ohniská ležia na hlavnej osi o_1.

Ž: *Áno. Ohniská elipsy majú súradnice:*

$$F_1[1; -5] \quad a \quad F_2[1; 3].$$

U: Nakoniec zakreslíme elipsu v sústave súradníc.



Úloha 1: *V sústave súradníc v rovine zakreslite elipsy dané nasledujúcim analytickým vyjadrením:*

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$,

b) $\dfrac{(x+2)^2}{6} + \dfrac{(y-4)^2}{10} = 1$,

Určte súradnice stredu, ohnísk a vrcholov.

Výsledok:

a) $o_1 \parallel o_x, a = 5, b = 2, e = \sqrt{21}, S[0; 0], A[-5; 0], B[5; 0], C[0; 2], D[0; -2], F_1[-\sqrt{21}; 0], F_2[\sqrt{21}; 0]$,

b) $o_1 \parallel o_y, a = \sqrt{10}, b = \sqrt{6}, e = 2, S[-2; 4], A[-2; 4 - \sqrt{10}], B[-2; 4 + \sqrt{10}], C[-2 - \sqrt{6}; 4], D[-2 + \sqrt{6}; 4], F_1[-2; 2], F_2[-2; 6]$,

Príklad 2: *Napíšte rovnicu elipsy, ak $C[-5;7]$ a $D[3;7]$ sú jej vedľajšie vrcholy a $F_1[-1;4]$ je jej ohnisko.*

U: Akú rovnicu elipsy poznáš?

Ž: *Stredovú rovnicu. Má tvar:*

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1.$$

U: Alebo aj

$$\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1,$$

kde stred elipsy je bod $S[m;n]$, a je dĺžka hlavnej polosi a b je dĺžka vedľajšej polosi elipsy.

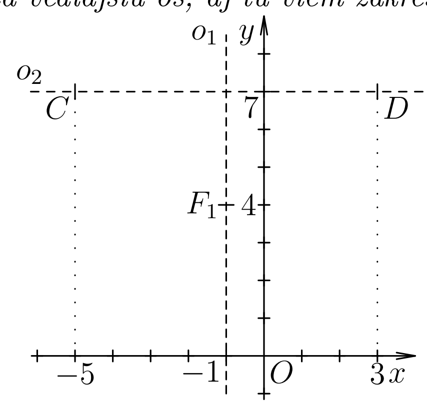
Ž: *Áno, zabudol som, máme dve možnosti podľa toho ako je elipsa umiestnená v sústave súradníc.*

U: Na napísanie stredovej rovnice elipsy potrebujeme poznať súradnice stredu elipsy a dĺžky jej polosí.

Ž: *Nič také však nemáme dané!*

U: Máme však dané vedľajšie vrcholy a jedno ohnisko. Zakreslime si ich do sústavy súradníc a pokúsme sa načrtnúť ako by mala vyzerať elipsa.

Ž: *Dobre. Do sústavy súradníc si zakreslím body $C[-5;7]$ a $D[3;7]$. Sú to vedľajšie vrcholy, a preto ležia na vedľajšej osi elipsy. Tú si zakreslím tiež. Ohnisko $F_1[-1;4]$ leží na hlavnej osi elipsy, ktorá je kolmá na vedľajšiu os, aj tú viem zakresliť. Tu je obrázok.*



U: Výborne. Na obrázku máš už aj stred elipsy.

Ž: *Naozaj! Je to priesečník hlavnej a vedľajšej osi elipsy. Z obrázka viem určiť aj jeho súradnice,*

$$S[-1;7].$$

U: Potrebujeme ešte dĺžky polosí. Dĺžku vedľajšej polosi vieme určiť hneď. Je to vzdialenosť vedľajšieho vrcholu od stredu elipsy.

Ž: *Tak to je z obrázka tiež jasné. Od bodu C k stredu sú 4 dieliky, teda $b=4$.*

U: Správne. Podobne sa dá určiť aj excentricita elipsy.

Ž: *To je zase vzdialenosť ohniska od stredu, čo sú 3 dieliky, $e=3$.*

U: Dĺžku hlavnej polosi a určíme pomocou vzťahu, ktorý platí pre elipsu:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Vyjadríme si a.

Ž: *Vyjadrím si a a dostávam:*

$$a = \sqrt{e^2 + b^2}$$

Dosadím naše hodnoty a mám:

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Dĺžka hlavnej polosi je $a = 5$.

U: Máme určené súradnice stredu $S[-1; 7]$ a dĺžky polosí elipsy $a = 5$ a $b = 4$. Akú polohu má elipsa v sústave súradníc? S ktorou osou sústavy súradníc je rovnobežná hlavná os elipsy?

Ž: *Podľa obrázka viem, že s osou y.*

U: Správne. Preto elipsa má rovnicu:

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{25} = 1.$$

Úloha 1: *Napíšte rovnicu elipsy, ktorá má hlavné vrcholy $A[0; -5]$, $B[0; 5]$ a vzdialenosť ohnísk je 8.*

Výsledok: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

Úloha 2: *Napíšte rovnicu elipsy, ktorá má ohniská $F_1[-2; -2]$, $F_2[-2; 6]$ a hlavný vrchol $A[-2; 7]$.*

Výsledok: $\dfrac{(x+2)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$

Príklad 3: *Rozhodnite, či nasledujúca rovnica je analytickým vyjadrením elipsy:*

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 16y - 3 = 0.$$

V prípade, že ide o elipsu, určte súradnice jej stredu, veľkosti hlavnej a vedľajšej polosi a excentricitu.

Ž: *Myslím, že je to všeobecná rovnica elipsy.*

U: Mohla by byť. Všeobecná rovnica elipsy má tvar:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

pričom $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ a zároveň $A \neq B$ a $A, B > 0$.

Ž: *Podmienky sú splnené. Určite je to elipsa.*

U: Vieme, že všeobecná rovnica elipsy má tento tvar. Avšak nie každá rovnica tohto tvaru vyjadruje elipsu. Prečo? To uvidíš práve pri úprave rovnice elipsy na stredový tvar.

Ž: *Dobre. Aj tak zo všeobecnej rovnice elipsy neviem určiť súradnice jej stredu.*

U: Upravíme teda všeobecnú rovnicu elipsy na stredový tvar. Ako vyzerá stredový tvar rovnice elipsy?

Ž: *Je to rovnica typu:*

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

alebo

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1.$$

U: Pričom m, n sú súradnice stredu elipsy a a, b sú veľkosti jej polosí. Na rozdiel od všeobecnej rovnice, je upravená na „štvorce“.

Ž: *To myslíte asi tie zátvorky $(x-m)^2$ a $(y-n)^2$, však?*

U: Presne tak. Budeme tieto zátvorky „vyrábať“. Znamená to urobiť úpravu na štvorec.

Ž: *Hm... tak to si dám najprv dohromady členy s x a členy s y. Zopakujem si danú rovnicu:*

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 16y - 3 = 0.$$

Takže:

$$(x^2 + 2x) + (4y^2 - 16y) - 3 = 0.$$

U: Pozrieme sa na prvú zátvorku. Chceme, aby to bol výraz tvaru $A^2 + 2AB + B^2$, čo nám v zátvorke chýba?

Ž: *Chýba mi člen B^2. Asi by som si ho mal nejako vyrobiť...*

U: Člen $2AB$ má tvar $2x$, čo sa dá napísať aj $2 \cdot x \cdot 1$.

Ž: *Z toho je jasné, že $B = 1$. Chýbajúci člen B^2 bude $1^2 = 1$.*

U: Takže ho pripíšeme do zátvorky. A aby platila rovnosť, musíme ho aj odčítať. Preto:

$$(x^2 + 2x+1)-1 + (4y^2 - 16y) - 3 = 0.$$

Ž: *Druhú zátvorku skúsim ja.*

U: Moment! Je to trochu iný prípad. Ak si všimneš, pri člene y^2 máme koeficient 4. Preto si ho najprv vyberieme pred zátvorku. Takto:

$$(x^2 + 2x+1)-1 + 4(y^2 - 4y) - 3 = 0.$$

Teraz môžeš upraviť výraz v druhej zátvorke na štvorec.

Ž: *Mám tam* $4y$*, to je vlastne* $2 \cdot y \cdot 2$*, takže mi bude chýbať člen* $2^2 = 4$*. Preto:*

$$(x^2 + 2x+1)-1 + 4(y^2 - 4y+4)-4 - 3 = 0.$$

U: Dávaj pozor! Koeficient 4 stojí pred zátvorkou, preto sa ním všetko v zátvorke násobí, to znamená aj to, čo si tam pridal a odobral, t.j. (-4). Správne to má vyzerať takto:

$$(x^2 + 2x+1)-1 + 4[(y^2 - 4y+4)-4] - 3 = 0.$$

Ž: *Aha! A teraz odstránim modré hranaté zátvorky a mám:*

$$(x^2 + 2x+1)-1 + 4(y^2 - 4y+4)-16 - 3 = 0.$$

U: Výborne. Prvá zátvorka nám dáva $(x+1)^2$ a druhá $(y-2)^2$. Ešte sčítame zvyšné čísla $(-1-16-3)$ a výsledný súčet (-20) dáme na pravú stranu:

$$(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 20.$$

Ž: *Ale stredová rovnica elipsa má na pravej strane jednotku!*

U: Máš pravdu, ešte sme s úpravami neskončili. Jednotku na pravej strane získame tak, že obe strany rovnice vydelíme číslom 20. Dostávame:

$$\frac{(x+1)^2}{20} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1.$$

A to je stredová rovnica elipsy. Vedel by si mi povedať aké sú súradnice jej stredu a veľkosti jej polosí?

Ž: *Súradnice stredu - to sú čísla v zátvorkách, ale s opačným znamienkom, čiže* $S[-1;2]$*. Veľkosť hlavnej polosi* a *a veľkosť vedľajšej polosi* b *nájdem v menovateľoch zlomkov. Teda presnejšie ich druhé mocniny. Najprv sa pozriem, ktoré z čísel v menovateľoch je väčšie, z toho dostanem hlavnú polos. V našom prípade* $a = \sqrt{20}$ *a* $b = \sqrt{5}$*.*

U: Výborne. Ako určíme excentricitu elipsy?

Ž: *Využijeme vzťah, ktorý platí pre parametre elipsy:*

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

U: Súhlasím.

Ž: *Podľa neho vypočítam* e*:*

$$e = \sqrt{(\sqrt{20})^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{20-5} = \sqrt{15}.$$

Úloha 1: *Rozhodnite, či nasledujúca rovnica je analytickým vyjadrením elipsy:*

$$2x^2 + 3y^2 - 12x + 3y + 6,75 = 0.$$

V prípade, že ide o elipsu, určte súradnice jej stredu, veľkosti hlavnej a vedľajšej polosi a excentricitu.

Výsledok: $S[3; -\frac{1}{2}], a = \sqrt{6}, b = 2, e = \sqrt{2}$

Príklad 4: *Rozhodnite, či nasledujúce rovnice sú analytickým vyjadrením elipsy:*

a) $x^2 + 5y^2 + 6x - 10y + 40 = 0$,

b) $4x^2 + 4y^2 + 24x - 36y + 27 = 0$.

V prípade, že ide o elipsu, určte súradnice jej stredu, veľkosti hlavnej a vedľajšej polosi a excentricitu.

Ž: *Sú to všeobecné rovnice elipsy. Prečo by som mal rozhodovať, či ide o elipsu?*

U: Všeobecná rovnica elipsy má tvar:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

pričom $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ a zároveň $A \neq B$ a $A, B > 0$. Avšak nie každá rovnica tohto tvaru vyjadruje elipsu.

Ž: *Prečo? Podmienky sú splnené. Aspoň v prípade a). V prípade po b) sa $A = B = 4$. Nie je splnená podmienka $A \neq B$! Tak to nebude elipsa?*

U: Pôjdeme pekne po poriadku. Začneme s úlohou po *a*). Aby sme zistili, či daná rovnica predstavuje elipsu, pokúsime sa upraviť ju na stredový tvar.

Ž: *A ak sa nám to podarí, bude to elipsa? No dobre. Aj tak zo všeobecnej rovnice elipsy neviem určiť súradnice jej stredu.*

U: Upravíme teda všeobecnú rovnicu elipsy na stredový tvar. Ako vyzerá stredový tvar rovnice elipsy?

Ž: *Je to rovnica typu:*

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

alebo

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1.$$

U: Pričom m, n sú súradnice stredu elipsy a a, b sú veľkosti jej polosí. Na rozdiel od všeobecnej rovnice je upravená na „štvorce“.

Ž: *To myslíte asi tie zátvorky $(x-m)^2$ a $(y-n)^2$, však?*

U: Presne tak. Budeme tieto výrazy v zátvorkach vyrábať. Znamená to urobiť úpravu na štvorec.

Ž: *Hm... tak to si dám najprv dohromady členy s x a členy s y. Zopakujem si danú rovnicu:*

$$x^2 + 5y^2 + 6x - 10y + 40 = 0.$$

Takže:

$$(x^2 + 6x) + (5y^2 - 10y) + 40 = 0.$$

U: Pozrieme sa na prvú zátvorku. Chceme, aby to bol výraz tvaru $a^2 + 2ab + b^2$, čo nám v zátvorke chýba?

Ž: *Chýba mi člen b^2. Asi by som si ho mal nejako vyrobiť...*

U: Člen $2ab$ má tvar $6x$, čo sa dá napísať aj ako $2 \cdot x \cdot 3$.

Ž: *Z toho je jasné, že $b = 3$. Chýbajúci člen b^2 bude $3^2 = 9$.*

U: Takže ho pripíšeme do zátvorky. A aby platila rovnosť, musíme ho aj odčítať. Preto:

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 + (5y^2 - 10y) + 40 = 0.$$

Ž: *Druhú zátvorku skúsim ja. Najprv si vyberiem 5 pred zátvorku. Sleduj rámček. V zátvorke mám $2y$, to je vlastne $2 \cdot y \cdot 1$, takže mi bude chýbať člen $1^2 = 1$. Nakoniec ešte odstránim hranaté zátvorky.*

$$\boxed{\begin{gathered}(x^2 + 6x + 9) - 9 + 5(y^2 - 2y) + 40 = 0\\(x^2 + 6x + 9) - 9 + 5[(y^2 - 2y + 1) - 1] + 40 = 0\\(x^2 + 6x + 9) - 9 + 5(y^2 - 2y + 1) - 5 + 40 = 0\end{gathered}}$$

U: Výborne. Prvá zátvorka nám dáva $(x + 3)^2$ a druhá $(y - 1)^2$. Ešte sčítame zvyšné čísla $-9 - 1 + 40$ a výsledný súčet 26 dáme na pravú stranu:

$$(x + 3)^2 + 5(y - 1)^2 = -26.$$

Ž: *Stredová rovnica elipsy má na pravej strane jednotku. Vydelíme obe strany rovnice číslom 26... alebo (-26)?*

U: A tu je problém! Ak vydelíme 26, dostávame rovnicu:

$$\frac{(x + 3)^2}{26} + \frac{(y - 1)^2}{26} = -1.$$

Ak vydelíme obe strany rovnice číslom (-26), dostávame rovnicu:

$$\frac{(x + 3)^2}{-26} + \frac{(y - 1)^2}{-26} = 1.$$

Ktorá z nich je stredovou rovnicou elipsy?

Ž: *No... Tá prvá má na pravej strane mínus jednotku. To nie je v poriadku. V tej druhej je pravá strana v poriadku...*

U: Aké budú veľkosti polosí elipsy? V menovateľoch zlomku by mali byť ich druhé mocniny, t. j. a^2 a b^2. A to sú kladné čísla.

Ž: *Čo teraz???*

U: Rovnica

$$x^2 + 5y^2 + 6x - 10y + 40 = 0$$

nie je analytickým vyjadrením elipsy.

Ž: *Znamená to, že ak mám rovnicu, ktorá vyzerá ako všeobecná rovnica elipsy, ešte to tak nemusí byť. Až pri jej úprave na stredovú rovnicu sa ukáže, či je to vôbec elipsa.*

U: Áno. Ak po úprave na štvorce dostaneme na pravej strane záporné číslo alebo nulu, tak to nie je rovnica elipsy.

U: Pozrieme sa na rovnicu b):

$$4x^2 + 4y^2 + 24x - 36y + 27 = 0.$$

Ž: *V tejto rovnici som si už všimol, že nie je splnená podmienka $A \neq B$ pre všeobecnú rovnicu elipsy.*

U: Platí teda $A = B$, t.j. koeficient pri kvadratickom člene x^2 je rovnaký ako pri kvadratickom člene y^2. Vydeľme preto rovnicu týmto koeficientom.

Ž: *Spomínaný koeficient je rovný 4. Vydelím rovnicu číslom 4 a dostávam:*

$$x^2 + y^2 + 6x - 9y + \frac{27}{4} = 0.$$

U: Nič ti to nepripomína?

Ž: *No... Bude to kružnica?*

U: Áno. Nakoľko koeficienty pri oboch kvadratických členoch sú jednotky, mohla by to byť rovnica kružnice. To či naozaj ide o kružnicu môžeme zistiť úpravou rovnice na stredový tvar. Pre nás však je teraz podstatné, že to ***nie je rovnica elipsy***.

Úloha 1: *Rozhodnite, či nasledujúca rovnica je analytickým vyjadrením elipsy:*

$$7x^2 + 25y^2 - 24x + 100y + 139 = 0.$$

V prípade, že ide o elipsu, určte súradnice jej stredu, veľkosti hlavnej a vedľajšej polosi a excentricitu.

Výsledok: nie je to elipsa

Príklad 5: *Napíšte rovnicu elipsy, ktorej hlavná os je totožná s osou x a vedľajšia os je totožná s osou y sústavy súradníc. Elipsa prechádza bodmi $M[-6; \sqrt{7}]$ a $N[3\sqrt{2}; 4]$.*

U: Akou rovnicou môžeme elipsu vyjadriť?

Ž: *Elipsa sa dá vyjadriť stredovou rovnicou. Je to rovnica typu:*

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

alebo

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1.$$

U: Pričom m, n sú súradnice stredu elipsy a a, b sú veľkosti jej polosí.

Ž: *Áno. Ktorá z tých dvoch rovníc to bude, závisí od toho, ako je elipsa umiestnená v sústave súradníc, či „pozdĺžne" alebo „zvislo".*

U: Súhlasím. Ako to bude s našou elipsou?

Ž: *Naša elipsa má mať hlavnú os totožnú s osou x a vedľajšiu os totožnú s osou y. To znamená, že bude „pozdĺžne".*

U: Áno. A preto bude mať rovnicu typu:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Napísať jej rovnicu znamená určiť všetky neznáme parametre v tejto rovnici.

Ž: *Potrebujem určiť parametre m, n, a a b.*

U: Začnime parametrami m a n.

Ž: *To sú súradnice stredu elipsy. Ale tie nepoznám!*

U: Tak si to predstav: hlavná os to je os x a vedľajšia os to je os y. Kde leží stred elipsy?

Ž: *Stred elipsy – to je priesečník hlavnej a vedľajšej osi elipsy. Jasné! Bude to začiatok sústavy súradníc. Stred elipsy je bod $S[0; 0]$.*

U: Výborne. Preto stredová rovnica elipsy vyzerá takto:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ž: *Už máme len dva neznáme parametre a, b.*

U: Súhlasím. Poznáme ešte súradnice dvoch rôznych bodov elipsy, M a N. Ak daný bod patrí elipse, musia jeho súradnice vyhovovať rovnici príslušnej elipsy.

Ž: *Dosadíme súradnice bodov M a N do rovnice?*

U: Presne tak. Získame sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi a a b.

Ž: *Zoberiem si bod* $M[-6; \sqrt{7}]$ *a dosadím jeho súradnice do rovnice elipsy namiesto* x *a* y*. Dostávam:*

$$\frac{(-6)^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{7})^2}{b^2} = 1.$$

A teraz to isté s bodom $N[3\sqrt{2}; 4]$*:*

$$\frac{(3\sqrt{2})^2}{a^2} + \frac{4^2}{b^2} = 1.$$

U: Rovnice upravíme, t. j. dané súradnice umocníme na druhú a dostávame sústavu rovníc:

$$\frac{36}{a^2} + \frac{7}{b^2} = 1$$
$$\frac{18}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1.$$

Nakoľko a, b sú dĺžky polosí elipsy, platí $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Ž: *Dám sa do riešenia sústavy. Zvolím si asi dosadzovaciu metódu. Napr. z prvej rovnice si vyjadrím* a *a dosadím do druhej.*

U: Ak si všimneš v obidvoch rovniciach vystupujú neznáme a, b len v druhej mocnine. Preto ti stačí vyjadriť si z rovnice druhú mocninu a, čiže a^2.

Ž: *Dobre. Takže zoberiem si prvú rovnicu:*

$$\frac{36}{a^2} + \frac{7}{b^2} = 1.$$

Odčítam člen $\frac{7}{b^2}$*:*

$$\frac{36}{a^2} = 1 - \frac{7}{b^2}$$

a pravú stranu upravím na spoločného menovateľa:

$$\frac{36}{a^2} = \frac{b^2 - 7}{b^2}.$$

Z toho už mám:

$$a^2 = \frac{36b^2}{b^2 - 7}.$$

U: Výborne. Dosadíme toto vyjadrenie do druhej rovnice.

Ž: *Tu je druhá rovnica sústavy:*

$$\frac{18}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1.$$

Dosadzujem vyjadrenie pre a^2*:*

$$\frac{18}{\frac{36b^2}{b^2-7}} + \frac{16}{b^2} = 1.$$

U: Prvý zlomok upravíme.

Ž: *OK. Po úprave máme rovnicu:*

$$\frac{18(b^2-7)}{36b^2}+\frac{16}{b^2}=1.$$

Ešte vykrátim čísla 18 *a* 36*:*

$$\frac{b^2-7}{2b^2}+\frac{16}{b^2}=1.$$

U: Súhlasím. Odstránime zlomky, t. j. obidve strany rovnice vynásobíme výrazom $2b^2$:

$$b^2-7+32=2b^2.$$

To je už jednoduchá kvadratická rovnica.

Ž: *Upravím ju a dostávam:*

$$b^2=25.$$

Z čoho máme dve riešenia:

$$b_1=5 \quad a \quad b_2=-5.$$

U: Nezabúdaj, že $b\in\mathbb{R}^+$, pretože je to dĺžka vedľajšej polosi.

Ž: *Aha! Tak mám len jedno riešenie: $b=5$. Dosadím túto hodnotu do modrého vyjadrenia a dopočítam a:*

$$a^2=\frac{36\cdot 5^2}{5^2-7}.$$

Vypočítam a mám:

$$a^2=50.$$

Keďže aj $a\in\mathbb{R}^+$, mám riešenie

$$a=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

U: Výborne. $a=5\sqrt{2}$ a $b=5$, a preto rovnica elipsy je:

$$\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Úloha 1: *Napíšte rovnicu elipsy, ktorej hlavná os je rovnobežná s osou x a vedľajšia os je rovnobežná s osou y sústavy súradníc. Elipsa má stred $S[-3;1]$ a prechádza bodmi $K[9;9]$ a $L[13;-5]$.*

Výsledok: $\dfrac{(x+3)^2}{400}+\dfrac{(y-1)^2}{100}=1.$