Vzdialenosť bodu od priamky a roviny, vzdialenosti priamok a rovín

RNDr. Viera Vodičková

U: Ako hovorí nadpis, budeme sa zaoberať pojmom ***vzdialenosť***. Začneme ***vzdialenosťou dvoch bodov***.

Ž: *Vzdialenosť dvoch bodov - to je predsa úsečka od jedného bodu k druhému.*

U: Nie úsečka, ale jej veľkosť. Vzdialenosťou dvoch bodov A a B nazývame veľkosť úsečky AB. Vzdialenosť označujeme pomocou dvoch zvislých čiar, $|AB|$. Vypočítať vzdialenosť bodov pomocou analytickej geometrie by sme už mali vedieť.

Ž: *Je na to vzorec:*

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

U: Len dodám, že bod A má súradnice $A[a_1; a_2; a_3]$ a bod B má súradnce $B[b_1; b_2; b_3]$.

Ž: *Ešte by ma zaujímalo, v akých jednotkách budeme počítať vzdialenosti? V metroch, decimetroch alebo milimetroch?*

U: V analytickej geometrii sa jednotkou vzdialenosti rozumie veľkosť jedného dielika na súradnicových osiach.

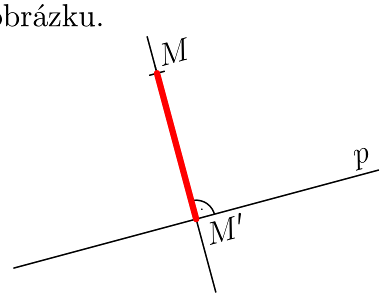
U: Pokračujeme vzdialenosťou bodu od priamky v rovine.

Ž: *To je tiež ľahké. Z bodu spustím kolmicu na priamku a určím vzdialenosť daného bodu a päty tejto kolmice.*

U: Áno. Už to len učene zhrniem. Vzdialenosťou bodu M od priamky p nazývame vzdialenosť bodu M od päty kolmice vedenej z bodu M na priamku p.

$$\boxed{|Mp| = |MM'|; \quad M' \in p \ \wedge \ MM' \perp p}$$

U: Všetko je znázornené aj na obrázku.



Ž: *Je to jednoduché. A preto dúfam, že aj pomocou súradníc sa to tiež ľahko vypočíta.*

U: Na výpočet vzdialenosti bodu od priamky ***v rovine*** máme tiež vzorec. Jeho odvodenie si môžeš pozrieť v časti dôkaz. Vzdialenosť bodu $M[m_1; m_2]$ od priamky $p: \ ax + by + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, pričom $a \neq 0 \vee b \neq 0$, vypočítame zo vzťahu:

$$|Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ž: *No nie je to až taký jednoduchý vzorec...*

U: Tak si ho rozoberme. V čitateli máme absolútnu hodnotu výrazu $am_1 + bm_2 + c$. Ak si všimneš, sú to len súradnice bodu $M[m_1; m_2]$ dosadené do výrazu $ax + by + c$ zo všeobecnej rovnice priamky p.

Ž: *No, to je pravda. Dá sa to zapamätať.*

U: Ak bod M patrí priamke p, hodnota výrazu $am_1 + bm_2 + c$ je nula.

Ž: *To je jasné, aj vzdialenosť bodu M od priamky sa potom rovná nule.*

U: Absolútna hodnota je tam len z toho dôvodu, že vzdialenosť nemôže byť záporné číslo.

Ž: *Dobre, to sme si vysvetlili. Teraz menovateľ. Vystupuje tam a a b. To sú tuším súradnice normálového vektora priamky.*

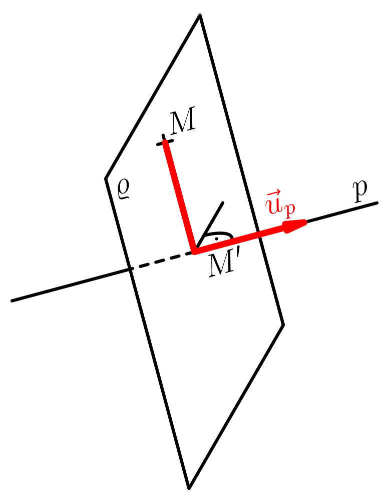
U: Máš pravdu. Normálový vektor priamky $\vec{n}$ má súradnice $\vec{n} = (a; b)$. A výraz $\sqrt{a^2 + b^2}$ nie je nič iné ako veľkosť vektora $\vec{n}$.

Ž: *No, vidím, že to nebude také strašné. V čitateli dosadím súradnice bodu M do rovnice priamky, dám to do absolútnej hodnoty, aby som náhodou nemal záporné číslo. A v menovateli len vypočítam veľkosť normálového vektora priamky p.*

U: V priestore situácia už nie je taká jednoduchá. Na určenie ***vzdialenosti bodu od priamky v priestore*** nebudeme radšej uvádzať vzorec. Súvisí to s tým, že nájsť analytické vyjadrenie kolmice spustenej z bodu na priamku nie je jednoduché.

Ž: *To je škoda. Myslím, že sa daným bodom M namiesto kolmice preloží celá rovina...*

U: Myslíš dobre. Majme daný bod M a priamku p. Zostrojíme rovinu ϱ, pričom táto rovina je kolmá na priamku p a prechádza bodom M. Prienikom priamky p a roviny ϱ je bod M'. Vzdialenosť $|Mp|$ určíme ako vzdialenosť bodov M a M'. Situáciu znázorňuje aj nasledujúci obrázok.



Ž: *Je to skoro to isté ako v rovine, akurát tam máme namiesto kolmej priamky kolmú rovinu. Všimol som si, že smerový vektor priamky p je potom normálovým vektorom roviny ϱ.*

U: Výborný postreh. Práve to sa pri výpočte využije.

U: ***Vzdialenosť bodu od roviny***. Najprv si opäť zopakujeme ako je definovaná.

Ž: *Je to podobné ako pri priamke. Z bodu spustím kolmicu na rovinu a určím vzdialenosť tohto bodu od priesečníka kolmice a roviny.*

U: Takže: Majme daný bod M a rovinu α. ***Vzdialenosťou bodu*** M ***od roviny*** α nazývame vzdialenosť bodu M od päty kolmice vedenej z bodu M na rovinu α.

$$\boxed{|M\alpha| = |MM'|; \quad M' \in \alpha \ \wedge \ MM' \perp \alpha}$$

Ž: *Dúfam, že to pomocou súradníc jednoducho vyriešime.*

U: Poteším ťa. Je to obdobná situácia ako pri vzdialenosti bodu od priamky v rovine.

Ž: *Takže budeme mať vzorec?*

U: Áno. Vzorec bude tiež veľmi podobný. Vzdialenosť bodu $M[m_1; m_2; m_3]$ od roviny $\alpha: \ ax + by + cz + d = 0$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pričom $a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0$, vypočítame zo vzťahu

$$|M\alpha| = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ž: *Teraz som už múdrejší. Už sa mi ten vzorec nezdá taký strašný. V čitateli máme všeobecnú rovnicu roviny α, akurát namiesto x, y, z sú tam súradnice bodu M.*

U: Áno. V čitateli máme súradnice bodu M dosadené do výrazu $ax + by + cz + d$ zo všeobecnej rovnici roviny α. Absolútna hodnota zabezpečuje, aby vzdialenosť nebola záporná.

Ž: *No a menovateľ - to je veľkosť normálového vektora roviny α.*

U: Výborne, nemám čo dodať.

U: Vzdialenosť bodu od priamky a roviny už máme vyriešenú. Pozrime sa na priamky a roviny. V ktorom prípade má zmysel uvažovať o vzdialenosti?

Ž: *Asi, keď budú priamky alebo roviny rovnobežné. Ak sú priamky rôznobežné, tak vzdialenosť nemá zmysel.*

U: Vzdialenosť rôznobežných priamok je rovná nule. Ako určíme ***vzdialenosť rovnobežných priamok***?

Ž: *No... Na jednej z nich si zvolím bod a z neho spustím kolmicu na druhú priamku...*

U: To znamená, že budeš určovať vzdialenosť zvoleného bodu od druhej priamky.

Ž: *Máte pravdu.*

U: ***Vzdialenosťou dvoch rovnobežných priamok*** p a q nazývame vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky p od priamky q.

Ž: *Predpokladám, že s rovnobežnými rovinami to bude také isté.*

U: Áno. ***Vzdialenosťou dvoch rovnobežných rovín*** α a β nazývame vzdialenosť ľubovoľného bodu roviny α od roviny β.
A do tretice: ***vzdialenosťou priamky*** p ***a roviny*** α***, pričom priamka*** p ***je s rovinou*** α ***rovnobežná***, nazývame vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky p od roviny α.

Ž: *Všetky vzdialenosti sme previedli na vzdialenosť bodu či už od priamky alebo od roviny.*

U: Presne tak. Preto nám netreba žiadne ďalšie vzorce ani postupy.

U: Zabudli sme ešte na jeden prípad vzájomnej polohy priamok, kedy má zmysel uvažovať o vzdialenosti.

Ž: *Prebrali sme rovnobežné priamky a pri rôznobežných sme sa dohodli, že vzdialenosť je nula.*

U: Ešte sú tu mimobežné priamky.

Ž: *Aha. Na tie by som bol zabudol.*

U: Ako teda určíme ***vzdialenosť dvoch mimobežných priamok*** p ***a*** q?

Ž: *Pamätám si, že to bolo v stereometrii dosť ťažké. Spomínam si na pojem* **os mimobežiek**. *To bola priamka kolmá na obidve mimobežky* p *aj* q, *ktorá ich zároveň aj pretínala.*

U: Súhlasím. Vzdialenosťou dvoch mimobežných priamok p a q nazývame veľkosť úsečky $|PQ|$, pričom bod P patrí priamke p, bod Q patrí priamke q a priamka PQ je kolmá aj na priamku p aj na priamku q. Táto priamka sa nazýva os mimobežiek p a q alebo aj ***priečka mimobežiek***.

Ž: *Áno, tak to bolo. Ale nájsť túto os, to bol niekedy obrovský problém...*

U: Pomocou metód analytickej geometrie sa, samozrejme, dá nájsť rovnica takejto osi. My sa však sústredíme len na určenie vzdialenosti dvoch mimobežných priamok. Na to nepotrebujeme nájsť os. Stačí jednou z priamok, napr. priamkou p preložiť rovinu ϱ, ktorá je rovnobežná s druhou priamkou q. Potom už len potrebujeme určiť vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky q od roviny ϱ.

Ž: *Uf! Musím si to zopakovať, aby mi to bolo jasné. Takže priamkou* p *preložím rovinu rovnobežnú s* q *a určím ich vzdialenosť.*

U: Tým sa úloha opäť mení na problém určenia vzdialenosti bodu od roviny, ktorý už vieme vyriešiť.

Ž: *A bude také jednoduché nájsť rovnicu roviny* ϱ*?*

U: Správna otázka. Ale odpoveď je áno. Priamka p patrí rovine ϱ. Preto smerový vektor priamky p je jedným zo smerových vektorov roviny ϱ. Priamka q je s rovinou ϱ rovnobežná, preto aj smerový vektor priamky q môže byť jedným zo smerových vektorov roviny ϱ.

Ž: *A to už máme dva smerové vektory roviny, takže jej normálový vektor nájdem ako vektorový súčin týchto vektorov. Jasné.*

Dôkaz: *Nech je daná priamka p: $ax + by + c = 0$, pričom $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \vee b \neq 0$ a bod $M[m_1; m_2]$. Dokážte, že pre vzdialenosť bodu M od priamky p platí vzťah:*

$$|Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

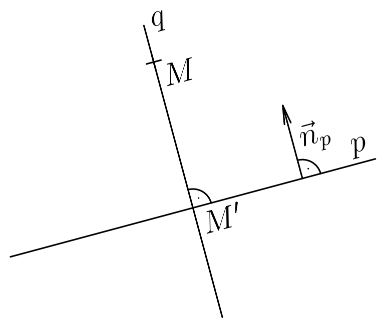
U: Ako určíme vzdialenosť bodu od priamky v rovine?

Ž: *Z bodu M spustím kolmicu na priamku p a určím vzdialenosť daného bodu a päty tejto kolmice.*

U: Dobre. Zavedieme ešte potrebné označenie. Kolmicu nazveme q a pätu kolmice M'. Vzdialenosť bodu M od priamky p sa potom rovná vzdialenosti bodov $|MM'|$. Teraz to celé uskutočníme analyticky.

Ž: *To znamená pomocou rovníc priamok. Priamka p je daná všeobecnou rovnicou, poznám teda jej normálový vektor $\vec{n}_p = (a; b)$.*

U: Výborne. Ten budeme potrebovať. Zakreslíme si to všetko aj do obrázka.



Potrebujeme rovnicu priamky q. Teda priamky, ktorá je kolmá na priamku p a prechádza bodom M.

Ž: *Z obrázka vidno, že normálový vektor priamky p môže byť smerovým vektorom priamky q. Mohol by som napísať jej parametrické rovnice. Poznám totiž aj jeden bod priamky q, bod M.*

U: To by nám veľmi pomohlo. Nech sa páči.

Ž: *Priamka q má parametrické vyjadrenie:*

$$X = M + t \cdot \vec{n}_p.$$

Čo po rozpise na súradnice dáva:

$$\begin{aligned} x &= m_1 + ta \\ y &= m_2 + tb, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

U: Súhlasím. Teraz potrebujeme bod M'.

Ž: *Ten je predsa priesečníkom priamok p a q.*

U: To znamená, že súradnice bodu M' vyhovujú všeobecnej rovnici priamky p:

$$ax + by + c = 0$$

ako aj parametrickým rovniciam priamky q:

$$x = m_1 + ta$$
$$y = m_2 + tb.$$

Preto dosadíme súradnice x a y z parametrických rovníc do všeobecnej rovnice.

Ž: *Skúsim to sám:*

$$a(m_1 + ta) + b(m_2 + tb) + c = 0.$$

Uf! To je veľa premenných - písmenok.

U: Nezabudni, že pre danú priamku a daný bod sú všetky písmenka okrem t konštanty. Našou úlohou je vyjadriť parameter t, lebo ten prislúcha hľadanému bodu M'.

Ž: *To bude fuška, ale pokúsim sa. Najprv roznásobím zátvorky:*

$$am_1 + ta^2 + bm_2 + tb^2 + c = 0.$$

Teraz osamostaním členy s t na jednej strane a vyberiem t pred zátvorku:

$$t(a^2 + b^2) = -am_1 - bm_2 - c.$$

A nakoniec vydelím obe strany rovnice výrazom $(a^2 + b^2)$. Dostávam:

$$t = -\frac{am_1 + bm_2 + c}{a^2 + b^2}.$$

U: Výborne. Dostali sme tak hodnotu parametra t, ktorá odpovedá bodu M'. Bod M' je bodom priamky q, preto má súradnice $M'[m_1 + at; m_2 + bt]$, pričom $t = -\dfrac{am_1 + bm_2 + c}{a^2 + b^2}$.

Ž: *Aha! Tie súradnice ste zobrali z parametrických rovníc priamky q. Pričom parameter t bude mať takú hodnotu, ako sme vypočítali.*

U: Presne tak. Vzdialenosť bodu M od priamky p určíme ako vzdialenosť bodov M a M'. Využitím vzorca na určenie vzdialenosti dvoch bodov, môžeme písať:

$$|Mp| = |MM'| = \sqrt{(m_1' - m_1)^2 + (m_2' - m_2)^2}.$$

Ž: *Teraz asi dosadíme súradnice bodu M'. Urobím to:*

$$|Mp| = \sqrt{(m_1 + at - m_1)^2 + (m_2 + bt - m_2)^2}.$$

To sa dá upraviť, veľa nám tam vypadne:

$$|Mp| = \sqrt{(at)^2 + (bt)^2}.$$

U: Môžeme upravovať aj ďalej:

$$|Mp| = \sqrt{a^2t^2 + b^2t^2} = \sqrt{t^2(a^2 + b^2)} = |t|\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ž: *Mýli ma tam tá absolútna hodnota. Je potrebná?*

U: Nezabúdaj, že pre ľubovoľné reálne číslo x platí: $\sqrt{x^2} = |x|$. Výsledkom odmocniny môže byť len nezáporné číslo a absolútna hodnota to zabezpečuje. Dosadíme za parameter t hodnotu prislúchajúcu bodu M'.

Ž: *Dobre:*

$$|Mp| = \left|-\frac{am_1 + bm_2 + c}{a^2 + b^2}\right| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.$$

U: Vzhľadom na prítomnosť absolútnej hodnoty môžeme znamienko mínus vynechať. Zároveň vykrátime zlomok výrazom $\sqrt{a^2 + b^2}$, čím dostaneme požadovaný vzorec:

$$|Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Príklad 1: *Vypočítajte vzdialenosť bodu $M[-1;2]$ od priamky p: $x = 4 - t$, $y = 2t$, $t \in \mathbb{R}$.*

Ž: *Na určenie vzdialenosti bodu od priamky máme vzorec:*

$$|Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

U: To je jednoducho povedané: „máme vzorec". Treba dodať za akých podmienok ho možno použiť. Tak najprv: uvedený vzorec platí pre výpočet vzdialenosti bodu od priamky ***v rovine***.

Ž: *To máme splnené. Bod M má dve súradnice.*

U: Potom treba dodať, že uvedený vzorec platí pre výpočet vzdialenosti bodu $M[m_1;m_2]$ od priamky p danej všeobecnou rovnicou $ax+by+c=0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, pričom $a \neq 0 \vee b \neq 0$.

Ž: *Ani tu nevidím problém.*

U: Mal som na mysli presnosť vyjadrovania sa. Ale aj tu vidím problém. Ako je zadaná priamka p?

Ž: *Priamka p je daná ... parametricky!*

U: Správne. Skôr ako použijeme vzorec, potrebujeme nájsť všeobecnú rovnicu priamky p.

Ž: *Znamená to, vylúčiť z rovníc parameter t. Tu sú parametrické rovnice priamky p:*

$$\begin{aligned} x &= 4 - t \\ y &= 2t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Prvú rovnicu vynásobím číslom 2 a obidve rovnice sčítam. Dostávam:

$$2x + y = 8.$$

Všeobecná rovnica priamky p je:

$$2x + y - 8 = 0.$$

U: Výborne. Môžeme sa vrátiť k nášmu vzorcu:

$$|Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ž: *Dobre. m_1 a m_2 to sú súradnice bodu M, a, b, c zase koeficienty všeobecnej rovnice priamky p.*

U: Súhlasím. Aby sme sa nepomýlili, určme si tieto koeficienty.

Ž: *Tak a je koeficient pri x, b pri y a c to je zvyšok. Preto:*

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = -8.$$

U: Dodám len, že a, b sú súradnice normálového vektora priamky, teda $\vec{n} = (2;1)$. Menovateľ vzorca nie je nič iné ako veľkosť normálového vektora priamky.

Ž: *Môžem dosadiť do vzorca:*

$$|Mp| = \frac{|2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-8)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}},$$

$$|Mp| = \frac{|-2 + 2 - 8|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

A máme to!

U: Ešte hodnotu $\frac{8}{\sqrt{5}}$ upravíme. Odstránime odmocninu z menovateľa.

Ž: *Tak dobre. Rozšírim zlomok* $\sqrt{5}$*:*

$$|Mp| = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

Vzdialenosť bodu M *od priamky* p *je* $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Úloha 1: *Vypočítajte vzdialenosť bodu* $P[3; 2]$ *od priamky* p*:* $x = t,\ y = 2 - 3t,\ t \in \mathbb{R}$.

Výsledok: $\frac{9\sqrt{10}}{10}$

Úloha 2: *Vypočítajte vzdialenosť bodu* $A[1; -5]$ *od priamky* p*:* $3x - 4y + 5 = 0$.

Výsledok: $\frac{28}{5}$

Príklad 2: *Vypočítajte vzdialenosť bodu* $A[3; 5; -6]$ *od roviny* ϱ: $2x - 2y + z - 8 = 0$.

Ž: *Na určenie vzdialenosti bodu od roviny máme vzorec:*

$$|M\alpha| = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

U: Je to vzorec na určenie vzdialenosti bodu $M[m_1; m_2; m_3]$ od roviny $\alpha: \ ax+by+cz+d = 0$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pričom $a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0$. My však máme bod A a rovinu ϱ.

Ž: *No tak namiesto súradníc bodu* M *použijeme súradnice bodu* A. *Rovina* ϱ *je daná všeobecnou rovnicou, to je v poriadku.*

U: Máš pravdu. Chcel som len povedať, že treba rozumieť, čo hovorí vzorec, aby nás iné označenie nezaskočilo.

Ž: *Vzorec hovorí, že zoberiem výraz z ľavej strany všeobecnej rovnicu roviny* ϱ, *dosadím súradnice bodu* A *– to bude čitateľ vzorca.*

U: Výborne. V menovateli máme zase veľkosť normálového vektora roviny ϱ. Určme si jeho súradnice.

Ž: *Súradnice normálového vektora roviny ľahko prečítam z jej všeobecnej rovnice, sú to čísla pri* x, y *a* z. *Preto:*

$$\vec{n} = (2; -2; 1).$$

U: Dobre. Dosaďme teda hodnoty do vzorca.

Ž: *Bod* A *má súradnice* $A[3; 5; -6]$, *takže:*

$$|A\varrho| = \frac{|2 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 + 1 \cdot (-6) - 8|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}},$$

po úprave máme:

$$|A\varrho| = \frac{|6 - 10 - 6 - 8|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{18}{\sqrt{9}} = 6.$$

U: Áno. Vzdialenosť bodu A od roviny ϱ je 6.

Ž: 6 *centimetrov alebo* 6 *milimetrov?*

U: Nie, 6 jednotiek dĺžky, pričom za jednotku dĺžky sa považuje veľkosť jedného dielika na súradnicových osiach.

Úloha 1: *Vypočítajte vzdialenosť bodu* $M[-1; 3; 2]$ *od roviny* ϱ: $3x - 4y + 5z + 15 = 0$.

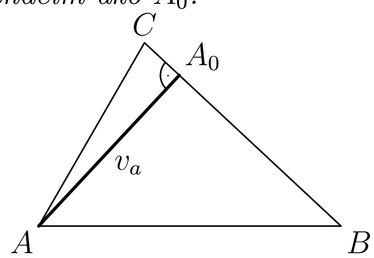
Výsledok: $\sqrt{2}$

Úloha 1: *Dané sú body* $A[1; -2; -2]$, $B[2; -1; -1]$, $C[1; -1; -2]$ *a* $D[0; 2; -2]$. *Vypočítajte vzdialenosť bodu* D *od roviny* ABC.

Výsledok: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Príklad 3: *Vypočítajte veľkosť výšky v_a v trojuholníku ABC, ak $A[1;5]$, $B[5;-5]$, $C[3;4]$.*

Ž: *Najprv si urobím obrázok. Načrtnem si trojuholník ABC a v ňom výšku na stranu a, t. j. na stranu BC. Pätu výšky označím ako A_0.*



U: Dobre. Máme teda vypočítať veľkosť výšky v_a.

Ž: *Veľkosť výšky v_a to je veľkosť úsečky AA_0. Potrebujem nájsť bod A_0 a potom už len použijem vzorec na výpočet veľkosti úsečky.*

U: Hm... To by sa dalo. Ako nájdeš bod A_0?

Ž: *Bod A_0 je priesečník kolmice z bodu A na stranu BC a priamky $\overleftrightarrow{BC}$.*

U: To znamená, že potrebuješ:

- rovnicu úsečky BC,
- rovnicu priamky, na ktorej leží výška v_a,
- prienik tejto priamky a priamky $\overleftrightarrow{BC}$, t. j. bod A_0,
- veľkosť úsečky AA_0.

Ž: *Áno, zhrnuli ste to dobre. Je to veľa práce, ale aspoň mi je jasný postup.*

U: Vydrž ešte. Ponúknem ti aj inú možnosť.

Ž: *Bude to menej prácne?*

U: Posúď sám. Vo svojom postupe si využil to, že veľkosť výšky v_a je rovná veľkosti úsečky AA_0. Ja sa pozriem na výšku ináč. Výška v_a nie je nič iné ako vzdialenosť bodu A od priamky $\overleftrightarrow{BC}$.

Ž: *Vlastne... Máte pravdu.*

U: A na určenie vzdialenosti bodu od priamky v rovine poznáme vzorec, stačí len dosadiť.

Ž: *Znie to lákavo. To by som potreboval len všeobecnú rovnicu priamky $\overleftrightarrow{BC}$ a potom vzorec.*

U: Iste uznáš, že je to menej práce ako v tvojom postupe.

Ž: *Máte zase pravdu. Vzdávam sa.*

U: Začnime teda všeobecnou rovnicou priamky $\overleftrightarrow{BC}$.

Ž: *Potrebujem normálový vektor priamky $\overleftrightarrow{BC}$.*

U: Máš dané súradnice bodov B a C: $B[5;-5]$, $C[3;4]$.

Ž: *Z nich viem určiť smerový vektor priamky* $\overleftrightarrow{BC}$. *Je to vektor* $\vec{u} = C - B$, *preto má súradnice:*

$$\vec{u} = (-2; 9).$$

U: Normálový vektor priamky je na jej smerový vektor kolmý, ich skalárny súčin je nula.

Ž: *Preto stačí v smerovom vektore vymeniť poradie súradníc, v jednej zmeniť znamienko a máme normálový vektor. Takže normálový vektor priamky* $\overleftrightarrow{BC}$ *má napr. súradnice:*

$$\vec{n} = (9; 2).$$

U: Výborne. Všeobecná rovnica priamky $\overleftrightarrow{BC}$ vyzerá potom takto:

$$9x + 2y + c = 0.$$

Ž: *Koeficient* c *dopočítame pomocou súradníc jedného bodu priamky, napr. bodu* $B[5; -5]$. *Dosadím ich do všeobecnej rovnice a dostávam:*

$$9 \cdot 5 + 2 \cdot (-5) + c = 0.$$

Z toho mám:

$$c = -35.$$

Všeobecná rovnica priamky $\overleftrightarrow{BC}$ *je:*

$$9x + 2y - 35 = 0.$$

U: Správne. Ako vypočítame veľkosť výšky v_a, teda vzdialenosť bodu A od priamky $\overleftrightarrow{BC}$?

Ž: *Na určenie vzdialenosti bodu* M *od priamky* p *máme vzorec:*

$$|Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

U: V našom prípade máme bod $A[1; 5]$ a priamku $\overleftrightarrow{BC}$: $9x + 2y - 35 = 0$. Čitateľ vzorca získame tak, že súradnice bodu A dosadíme do výrazu zo všeobecnej rovnice priamky $\overleftrightarrow{BC}$. V menovateli máme veľkosť normálového vektora priamky $\overleftrightarrow{BC}$.

Ž: *Dosadzujem hodnoty do vzorca:*

$$|A, \overleftrightarrow{BC}| = \frac{|9 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + (-35)|}{\sqrt{9^2 + 2^2}},$$

po úprave dostávam:

$$|A, \overleftrightarrow{BC}| = \frac{|9 + 10 - 35|}{\sqrt{81 + 4}} = \frac{16}{\sqrt{85}}.$$

A máme to!

U: Ešte hodnotu $\dfrac{16}{\sqrt{85}}$ upravíme. Odstránime odmocninu z menovateľa.

Ž: *Tak dobre. Rozšírim zlomok* $\sqrt{85}$*:*

$$|A, \overleftrightarrow{BC}| = \frac{16}{\sqrt{85}} = \frac{16\sqrt{85}}{85}.$$

Veľkosť výšky v_a *je* $\frac{16\sqrt{85}}{85}$.

Úloha 1: *Vypočítajte veľkosť výšky* v_c *v trojuholníku* ABC*, ak* $A[1;3]$*,* $B[-3;0]$*,* $C[4;-2]$*.*

Výsledok: $\frac{29}{5}$

Príklad 4: *Určte rovnicu roviny β, ktorá je rovnobežná s rovinou $\alpha:\ 3x-6y-2z+14=0$ a má od nej vzdialenosť 3 jednotky dĺžky.*

U: Začneme s tým, že rovina β má byť rovnobežná s rovinou α. Čo platí pre rovnobežné roviny?

Ž: *Hm… Rovnobežné roviny majú odchýlku $0°$.*

U: Dobre, čo platí pre ich normálové vektory?

Ž: *Normálové vektory rovnobežných rovín sú rovnaké!*

U: Presnejšie povedané, sú lineárne závislé, jeden je násobkom druhého. Máme určiť rovnicu roviny β, preto jej normálovým vektorom môže byť normálový vektor roviny α.

Ž: *Normálový vektor roviny α ľahko prečítam z jej všeobecnej rovnice. Teda:*

$$\vec{n}_\alpha=(3;-6;-2).$$

U: Nakoľko aj $\vec{n}_\beta=(3;-6;-2)$, všeobecná rovnica roviny β bude vyzerať takto:

$$3x-6y-2z+d=0.$$

Ž: *Ostáva nám vypočítať koeficient d. Potrebujeme jeden bod roviny β. Taký ale nemáme.*

U: Vieme však, že vzdialenosť oboch rovín sú 3 jednotky dĺžky. Znamená to, že aj vzdialenosť ľubovoľného bodu roviny α od roviny β sú 3 jednotky dĺžky. Nájdime jeden ľubovoľný bod roviny α.

Ž: *Tak napríklad si zvolím $x=0$, $y=0$ a podľa všeobecnej rovnice roviny α dopočítam z:*

$$3\cdot 0-6\cdot 0-2z+14=0.$$

Z toho máme $z=7$. Bod A patriaci rovine α má súradnice $A[0;0;7]$.

U: Dobre. Vieme, že vzdialenosť bodu A od roviny β sú 3 jednotky dĺžky. Na výpočet vzdialenosti bodu od roviny máme odvodený vzorec.

Ž: *Pre výpočet vzdialenosti bodu $M[m_1;m_2;m_3]$ od roviny $\varrho:\ ax+by+cz+d=0$, kde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, pričom $a\neq 0\vee b\neq 0\vee c\neq 0$ platí*

$$|M\varrho|=\frac{|am_1+bm_2+cm_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

U: V našom prípade bod $A[0;0;7]$ a rovnica roviny β je $3x-6y-2z+d=0$. Platí teda:

$$|A\beta|=\frac{|3\cdot 0-6\cdot 0-2\cdot 7+d|}{\sqrt{3^2+(-6)^2+(-2)^2}}=3.$$

Ž: *Aha! Tým sme získali rovnicu a z nej vypočítame d. Skúsim už ďalej sám. Upravím rovnicu:*

$$\frac{|-14+d|}{\sqrt{9+36+4}}=3.$$

V menovateli mám odmocninu zo 49, to je 7, preto dostávam rovnicu:

$$|-14+d|=21.$$

U: Je to rovnica s absolútnou hodnotou. Najrýchlejšie ju vyriešime pomocou číselnej osi. Môžeme ju prečítať aj takto: vzdialenosť čísla d od čísla 14 na číselnej osi je rovná 21.

Ž: *Máme dve riešenia:* $d_1 = 35$ *a* $d_2 = -7$.

U: Preto existujú aj dve roviny požadovaných vlastností:

$$\beta_1 : 3x - 6y - 2z + 35 = 0 \quad \text{a} \quad \beta_2 : 3x - 6y - 2z - 7 = 0.$$

Ž: *To, že riešenia budú dve, som mohol tušiť už na začiatku. Jedna rovina je predsa „nad" a druhá „pod" rovinou* α.

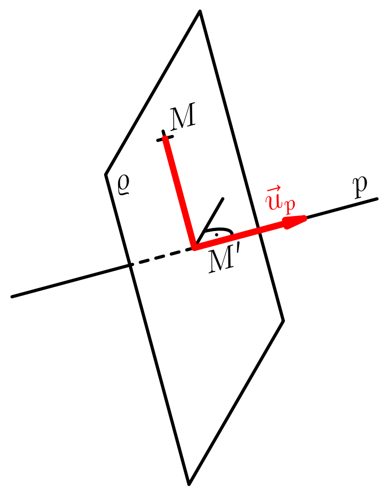
Príklad 5: *Vypočítajte vzdialenosť bodu $M[5; -1; 3]$ od priamky p: $x = -1 + 2t$, $y = -5 + 3t$, $z = -2 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$.*

Ž: *Na určenie vzdialenosti bodu od priamky máme odvodený vzorec.*

U: Pozor! Máme odvodený vzorec na výpočet vzdialenosti bodu od priamky ***v rovine***. V priestore situácia už nie je taká jednoduchá. Súvisí to s tým, že nájsť analytické vyjadrenie kolmice spustenej z bodu na priamku nie je jednoduché.

Ž: *To je škoda. Myslím, že môžeme namiesto kolmice preložiť daným bodom celú rovinu...*

U: Máš pravdu. Máme daný bod M a priamku p. Zostrojíme rovinu ϱ, ktorá je kolmá na priamku p a prechádza bodom M. Prienikom priamky p a roviny ϱ je bod M'. Vzdialenosť $|Mp|$ potom určíme ako vzdialenosť bodov $|MM'|$. Situáciu znázorňuje aj nasledujúci obrázok.



Ž: *Postup je jasný. Nájdem najprv všeobecnú rovnicu roviny ϱ. Na obrázku som si všimol, že smerový vektor priamky p je aj normálovým vektorom roviny ϱ.*

U: Výborne. Určme jeho súradnice.

Ž: *Súradnice smerového vektora priamky p prečítam z jej parametrických rovníc, sú to čísla stojace pri parametri t. Preto:*

$$\vec{n}_\varrho = \vec{u}_p = (2; 3; 2).$$

U: Rovina ϱ má potom všeobecnú rovnicu:

$$2x + 3y + 2z + d = 0.$$

Ž: *Koeficient d vypočítam podľa súradníc bodu $M[5; -1; 3]$, ktorý patrí rovine ϱ. Dosadím ich do všeobecnej rovnice a dostávam:*

$$2 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + d = 0.$$

Vypočítam d:

$$\begin{aligned} 10 - 3 + 6 + d &= 0 \\ d &= -13. \end{aligned}$$

U: Všeobecná rovnica roviny ϱ je:

$$2x + 3y + 2z - 13 = 0.$$

U: Vzdialenosť bodu M od priamky p určíme ako vzdialenosť bodov $|MM'|$, pričom bod M' je prienikom priamky p a roviny ϱ.

Ž: *Určím teda priesečník priamky* p

$$\begin{aligned} x &= -1 + 2t \\ y &= -5 + 3t \\ z &= -2 + 2t \end{aligned}$$

a roviny ϱ

$$2x + 3y + 2z - 13 = 0.$$

U: Dobre. Vyriešime sústavu týchto rovníc. Vyjadrenia pre x, y, z z parametrických rovníc priamky dosadíme do rovnice roviny.

Ž: *Dosadzujem:*

$$2(-1 + 2t) + 3(-5 + 3t) + 2(-2 + 2t) - 13 = 0.$$

U: Získali sme jednu rovnicu s jednou neznámou t.

Ž: *Tú hravo vyriešim. Upravím najprv ľavú stranu*

$$-2 + 4t - 15 + 9t - 4 + 4t - 13 = 0,$$

sčítam čo sa dá

$$17t - 34 = 0.$$

Z toho je jasné, že

$$t = 2.$$

U: Výborne. Ako získame súradnice bodu M'?

Ž: *Stačí dosadiť vypočítanú hodnotu* $t = 2$ *do parametrických rovníc priamky* p*:*

$$\begin{aligned} x &= -1 + 2 \cdot 2 = 3 \\ y &= -5 + 3 \cdot 2 = 1 \\ z &= -2 + 2 \cdot 2 = 2. \end{aligned}$$

Priesečník priamky p *a roviny* ϱ *je bod* $M'[3; 1; 2]$.

U: Ostáva nám vypočítať vzdialenosť bodov $|MM'|$.

Ž: *Vzdialenosť dvoch bodov vypočítam podľa vzorca. Teda:*

$$|Mp| = |MM'| = \sqrt{(3-5)^2 + (1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3.$$

U: Výborne. Vzdialenosť bodu M od priamky p je rovná 3.

Úloha 1: *Vypočítajte vzdialenosť bodu* $P[1; 0; -3]$ *od priamky* q*:* $x = 1 - t$, $y = -2 + t$, $z = -1$, $t \in \mathbb{R}$.

Výsledok: $2\sqrt{2}$

Príklad 6: *Dané sú roviny $\alpha : x+y+z-6=0$ a $\beta : x+y+z-3=0$. Určte ich vzdialenosť.*

Ž: *Máme určiť vzdialenosť dvoch rovín... Takže na jednej z nich si zvolím bod a z neho spustím kolmicu na druhú rovinu...*

U: Najprv by sme mali vedieť akú vzájomnú polohu majú dané roviny α a β. Vzdialenosť má zmysel určovať, len ak sú rovnobežné.

Ž: *Dobre, určím si ich normálové vektory:*

$$\vec{n}_\alpha = (1; 1; 1), \quad \vec{n}_\beta = (1; 1; 1).$$

Sú rovnaké a teda je úplne jasné, že roviny sú rovnobežné.

U: Súhlasím. Vrátime sa k vzdialenosti. Vzdialenosťou dvoch rovnobežných rovín α a β nazývame vzdialenosť ľubovoľného bodu roviny α od roviny β. Potrebujeme jeden ľubovoľný bod roviny α.

Ž: *Nazvem ho napr. A. Jeho súradnice získam tak, že dve súradnice si zvolím, napr. $x = 0$ a $y = 0$. Tretiu súradnicu dopočítam podľa všeobecnej rovnice roviny α. To znamená:*

$$0 + 0 + z - 6 = 0.$$

Čiže $z = 6$. Bod A má súradnice $A[0; 0; 6]$. Teraz určíme jeho vzdialenosť od roviny β.

U: Na určenie vzdialenosti bodu od roviny máme vzorec:

$$|M\alpha| = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

pričom $M[m_1; m_2; m_3]$ a rovina α je daná všeobecnou rovnicou: $ax + by + cz + d = 0$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0$.

Ž: *Áno, ten si pamätám. Najprv len dosadím súradnice daného bodu do všeobecnej rovnice roviny a potom to vydelím veľkosťou normálového vektora roviny.*

U: V našom prípade pôjde o vzdialenosť $|A\beta|$. Bod A má súradnice $A[0; 0; 6]$ a rovnica roviny β je $x + y + z - 3 = 0$.

Ž: *Môžem dosadiť do vzorca:*

$$|A\beta| = \frac{|0 + 0 + 6 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}},$$

$$|A\beta| = \frac{|3|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

U: Upravíme ešte získanú hodnotu, odstránime odmocninu z menovateľa zlomku.

Ž: *Dobre. Vynásobím čitateľa aj menovateľa zlomku číslom $\sqrt{3}$.*

$$|A\beta| = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

U: Vzdialenosť rovín α a β je rovná vzdialenosti bodu A od roviny β, a to je $\sqrt{3}$.

Úloha 1: *Dané sú priamky* $p : 8x - 6y + 3 = 0$ *a* $q : 8x - 6y - 3 = 0$. *Určte ich vzdialenosť.*

Výsledok: $\dfrac{3}{5}$

Úloha 2: *Dané sú roviny* $\varrho : 2x + y - 2z - 3 = 0$ *a* $\sigma : 2x + y - 2z - 1 = 0$. *Určte ich vzdialenosť.*

Výsledok: $\dfrac{2}{3}$

Príklad 7: *Určte všeobecné rovnice všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom* $A[3;1]$ *tak, že ich vzdialenosť od začiatku sústavy súradníc je* $\sqrt{2}$.

U: Máme určiť všeobecnú rovnicu priamky. Začneme s tým, ako taká rovnica vyzerá.

Ž: *Všeobecná rovnica priamky je rovnica typu:*

$$ax + by + c = 0.$$

U: Zároveň je potrebné dodať, že a, b, c sú reálne čísla, pričom $a \neq 0$ alebo $b \neq 0$. Dobre, takže zatiaľ máme tri neznáme: a, b, c. Čo všetko o hľadanej priamke vieme?

Ž: *Vieme, že jej patrí bod* A.

U: Preto súradnice bodu $A[3;1]$ musia vyhovovať všeobecnej rovnici priamky.

Ž: *Dosadím jeho súradnice namiesto* x *a* y *a dostávam:*

$$a \cdot 3 + b \cdot 1 + c = 0.$$

Alebo aj:

$$3a + b + c = 0.$$

U: To máme jednu rovnicu. Čo ešte o priamke vieme?

Ž: *Vieme, že vzdialenosť priamky od začiatku sústavy súradníc je* $\sqrt{2}$. *Začiatok sústavy súradníc - to je bod* O *so súradnicami* $O[0;0]$.

U: Áno. Na zostavenie ďalšej rovnice využijeme vzorec na určenie vzdialenosti bodu $M[m_1; m_2]$ od priamky p danej všeobecnou rovnicou $ax + by + c = 0$:

$$|Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ž: *Pre vzdialenosť bodu* O *od hľadanej priamky* p *platí:*

$$|Op| = \frac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}.$$

U: Čo po krátkej úprave dáva druhú rovnicu:

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}.$$

Ž: *Keď to zhrniem, mám sústavu dvoch rovníc:*

$$3a + b + c = 0$$

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}.$$

Neznáme sú však tri...

U: Neboj sa, aj to nejako vyriešime.

Ž: *Skúsil by som dosadzovaciu metódu. Z modrej rovnice si vyjadrím napr.* $c = -3a - b$ *a dosadím do červenej rovnice:*

$$\frac{|-3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{2}.$$

U: Výborne. Podotýkam, že vyjadrenie neznámej c si si zvolil šikovne. Ostali nám tak len neznáme a a b. Ak si spomenieš na všeobecnú rovnicu priamky, sú to súradnice jej normálového vektora, $\vec{n} = (a; b)$. Koľko normálových vektorov má jedna priamka?

Ž: *Jeden. . . Počkajte, nie, je ich nekonečne veľa, veď to môžu byť aj násobky.*

U: Chcel si povedať, že každý nenulový násobok normálového vektora priamky je tiež jej normálovým vektorom. Preto môžeme predpokladať, že medzi nimi existuje taký normálový vektor, ktorého prvá súradnica je rovná jednej, t. j. $a = 1$.

Ž: *To vyzerá logicky.*

U: Má to len jeden háčik. Ak by priamka mala špeciálnu polohu v sústave súradníc, mohlo by byť $a = 0$.

Ž: *Aha, to by boli priamky s rovnicou:* $by + c = 0$, *čiže* $y = -\frac{c}{b}$. *Sú rovnobežné s osou* x.

U: Tento prípad musíme vyriešiť zvlášť. Dosadíme do rovnice

$$\frac{|-3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{2}$$

$a = 0$ a vypočítame b.

Ž: *Skúsim sám. Dostávam:*

$$\frac{|-b|}{\sqrt{b^2}} = \sqrt{2}.$$

V menovateli máme $\sqrt{b^2}$ *čo sa rovná* $|b|$, *preto na ľavej strane rovnice máme po vykrátení* 1, *čiže:*

$$1 = \sqrt{2}.$$

Z toho je jasné, že v tomto prípade rovnica nemá riešenie.

U: Preto sa môžeme vrátiť k predpokladu, že $a = 1$.

Ž: *Dosadím* $a = 1$ *do rovnice a mám:*

$$\frac{|-3-b|}{\sqrt{1^2+b^2}} = \sqrt{2}.$$

U: To už máme rovnicu len s jednou neznámou.

Ž: *Vyriešim ju. Najprv odstránim zlomok:*

$$|-3-b| = \sqrt{1+b^2} \cdot \sqrt{2},$$

potom obidve strany rovnice umocním na druhú:

$$9 + 6b + b^2 = 2 + 2b^2.$$

U: Dostali sme kvadratickú rovnicu.

Ž: *Preto „hodím" všetky členy na ľavú stranu:*

$$-b^2 + 6b + 7 = 0$$

a prenásobím mínus jednotkou, dostávam:

$$b^2 - 6b - 7 = 0.$$

Kvadratickú rovnicu vyriešim rozkladom na súčin:

$$(b - 7)(b + 1) = 0.$$

Z toho sú jasné jej korene $b_1 = 7$ *a* $b_2 = -1$.

U: Výborne. Pomocou modrého vyjadrenia dopočítame c: $c = -3a - b$. Nezabudneme, že $a = 1$.

Ž: *Takže, pre* $b_1 = 7$ *je:*

$$c_1 = -3 \cdot 1 - 7 = -10.$$

A pre $b_2 = -1$ *je:*

$$c_2 = -3 \cdot 1 - (-1) = -2.$$

U: Zhrnutím dostávame všeobecné rovnice dvoch priamok, ktoré vyhovujú zadaniu.

$$p_1 : x + 7y - 10 = 0 \quad a \quad p_2 : x - y - 2 = 0.$$

Úloha 1: *Určte všeobecné rovnice všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom* $A[2; 3]$ *a majú od bodu* $B[0; -1]$ *vzdialenosť* 4.

Výsledok: $p_1 : 4x + 3y - 17 = 0$, $p_2 : y - 3 = 0$

Príklad 8: *Vypočítajte vzdialenosť priamok p a q, pričom: p: $x = -2 + t$, $y = t$, $z = 3 + t$, $t \in \mathbb{R}$, q: $x = -1 + s$, $y = 1 + 2s$, $z = 2 + 2s$, $s \in \mathbb{R}$.*

Ž: *Hm... Vzdialenosť priamok. To si zoberiem ľubovoľný bod z jednej priamky a určím jeho vzdialenosť od druhej priamky.*

U: Máš pravdu len v prípade, ak sa jedná o rovnobežné priamky.

Ž: *Jasne, že sú rovnobežné. Ak by boli rôznobežné, ich vzdialenosť je nula, nemám čo počítať.*

U: Zabúdaš ešte na jeden prípad. Priamky v priestore môžu byť aj mimobežné.

Ž: *Aha! Takže najprv sa pozriem, akú majú vzájomnú polohu. Z ich parametrických vyjadrení si určím smerové vektory. Smerové vektory jednotlivých priamok majú súradnice:*

$$\vec{u}_p = (1; 1; 1),$$

$$\vec{u}_q = (1; 2; 2).$$

Hneď vidím, že jeden nie je násobkom druhého, že by boli predsa rôznobežné?

U: Ak smerové vektory priamok nie sú lineárne závislé, priamky môžu byť rôznobežné alebo mimobežné. Závisí to od ich prieniku. Ak v tomto prípade je ich prienikom prázdna množina, sú mimobežné, inak sú rôznobežné.

Ž: *Dobre teda. Vidím, že mi neostáva nič iné ako zistiť ich prienik. Zostavím si sústavu rovníc tak, že porovnám pravé strany parametrických rovníc oboch priamok postupne pre súradnicu x, y a z:*

$$\begin{aligned} -2 + t &= -1 + s \\ t &= 1 + 2s \\ 3 + t &= 2 + 2s. \end{aligned}$$

Druhú rovnicu vynásobím (-1) a sčítam ju s prvou rovnicou, dostávam:

$$-2 = -2 - 3s,$$

z čoho mám $s = 0$. Dosadím do prvej rovnice:

$$-2 + t = -1 + 0.$$

Čo znamená, že $t = 1$.

U: Hodnoty, ktoré sme dostali pomocou prvej a druhej rovnice, $t = 1$, $s = 0$, dosadíme do tretej rovnice.

Ž: *Dosadzujem a pýtam sa, či sa $3 + 1$ rovná $2 + 2 \cdot 0$. Vidím, že*

$$4 \neq 2.$$

Sústava nemá riešenie. Priamky sú mimobežné.

U: Pripomeniem ti, ako určíme vzdialenosť mimobežných priamok. Stačí jednou z priamok, napr. priamkou p preložiť rovinu ϱ, ktorá je rovnobežná s druhou priamkou q. Potom už len potrebujeme určiť vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky q od roviny ϱ.

Ž: *Uf! Musím si to zopakovať, aby mi to bolo jasné. Takže priamkou p preložím rovinu rovnobežnú s q a určím ich vzdialenosť.*

U: Tým sa úloha mení na problém určenia vzdialenosti bodu od roviny. Na tento prípad máme vzorec.

Ž: *A bude také jednoduché nájsť rovnicu roviny ϱ?*

U: Správna otázka. Ale odpoveď je áno. Priamka p patrí rovine ϱ. Preto smerový vektor priamky p je jedným zo smerových vektorov roviny ϱ. Priamka q je s rovinou ϱ rovnobežná, preto aj smerový vektor priamky q môže byť jedným zo smerových vektorov roviny ϱ.

Ž: *A to už máme dva smerové vektory roviny, takže jej normálový vektor nájdem ako vektorový súčin týchto vektorov. Pustím sa do toho. Zopakujem si súradnice smerových vektorov priamok:*

$$\vec{u}_p = (1; 1; 1),$$

$$\vec{u}_q = (1; 2; 2).$$

Teraz si ich zapíšem pod seba, tak ako sme zvyknutí pri určovaní vektorového súčinu:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

Ž: *A počítam.*
Prvá súradnica: $1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0$.
Druhá súradnica: $1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1$.
A nakoniec tretia súradnica: $1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$.
Vektorový súčin $\vec{u}_p \times \vec{u}_q$ *má súradnice* $(0; -1; 1)$.

U: Tento vektor bude normálovým vektorom roviny ϱ, čiže:

$$\vec{n}_\varrho = (0; -1; 1).$$

Ž: *Jej všeobecná rovnica potom vyzerá takto:*

$$0x - y + z + d = 0.$$

U: Povedali sme, že priamka p patrí rovine ϱ. Preto aj ľubovoľný bod priamky p bude patriť rovine ϱ.

Ž: *Dobre. Bod patriaci priamke p nazvem P a jeho súradnice prečítam rovno z parametrických rovníc priamky p. Čiže $P[-2; 0; 3]$. Dosadím jeho súradnice do získanej všeobecnej rovnice roviny ϱ a dopočítam d:*

$$-0 + 3 + d = 0.$$

Takže $d = -3$. Všeobecná rovnica roviny ϱ je

$$-y + z - 3 = 0.$$

U: Súhlasím. Vzdialenosť priamok p a q sa rovná vzdialenosti roviny ϱ a priamky q. Nakoľko $\varrho \parallel q$, túto vzdialenosť určíme ako vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky q od roviny ϱ.

Ž: *Pre zmenu si teraz určím súradnice nejakého bodu priamky* q. *Bude to bod* Q *a jeho súradnice si tiež prečítam rovno z parametrických rovníc priamky* q. *Čiže* $Q[-1; 1; 2]$.

U: Vzdialenosť bodu Q od roviny ϱ určíme podľa vzorca.

Ž: *To už viem vypočítať sám! Dosadzujem do vzorca:*

$$|Q\varrho| = \frac{|-1+2-3|}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

A máme to!

U: Výborne. Vzdialenosť priamok p a q je $\sqrt{2}$.

Úloha 1: *Vypočítajte vzdialenosť priamok* p *a* q, *pričom:* p: $x = 2+2t$, $y = 1-t$, $z = 2+t$, $t \in \mathbb{R}$, q: $x = 1-s$, $y = 3+s$, $z = 6$, $s \in \mathbb{R}$.

Výsledok: $\sqrt{3}$