Vzájomná poloha priamok v rovine

RNDr. Viera Vodičková

U: Začneme s opakovaním. Aká môže byť vzájomná poloha dvoch priamok v rovine?

Ž: *Priamky v rovine môžu byť rovnobežné alebo rôznobežné.*

U: V rámci rovnobežnosti rozlišujeme rovnobežné rôzne a rovnobežné totožné priamky. Na základe čoho takto klasifikujeme vzájomnú polohu priamok v rovine?

Ž: *Myslím, že na základe prieniku priamok, na základe počtu ich spoločných bodov.*

U: Správne.

- Ak prienikom dvoch priamok je prázdna množina (priamky nemajú spoločný bod), priamky sú ***rovnobežné rôzne***.
- Ak prienikom dvoch priamok je nekonečne veľa bodov (celá priamka), priamky sú ***rovnobežné totožné***.
- Ak prienikom dvoch priamok je práve jeden bod, priamky sú ***rôznobežné***.

Ž: *Je to jednoduché. Rôznobežné sa pretnú, rovnobežné nie. Totožné ležia na sebe.*

U: Zhruba tak.
Budeme skúmať vzájomnú polohu priamok z analytického hľadiska.

Ž: *Tomu celkom nerozumiem.*

U: V analytickej geometrii nemáme priamky narysované, ale dané pomocou rovníc. Z rovníc priamok musíme vedieť určiť, či sú rovnobežné alebo rôznobežné.

Ž: *Pochopil som. Budeme pracovať len s rovnicami priamok.*

U: Presne tak. Akou rovnicou vieme vyjadriť priamku v rovine?

Ž: *Priamku v rovine môžeme vyjadriť parametricky, všeobecnou rovnicou a smernicovým tvarom.*

U: Smernicový tvar je len upravená všeobecná rovnica priamky. Sústredíme sa preto na dva prípady, ak sú priamky dané parametricky, a ak sú priamky dané všeobecnou rovnicou.

U: Začneme s prípadom, ak sú ***priamky dané parametricky***. Zopakujme si, že parametrické vyjadrenie priamky v súradniciach je:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Čo všetko vieme určiť z parametrických rovníc priamky?

Ž: *Z parametrického vyjadrenia vieme určiť súradnice jedného bodu priamky, napr. bodu $A[a_1; a_2]$. Okrem toho aj súradnice smerového vektora priamky, vektora $\vec{u} = (u_1; u_2)$.*

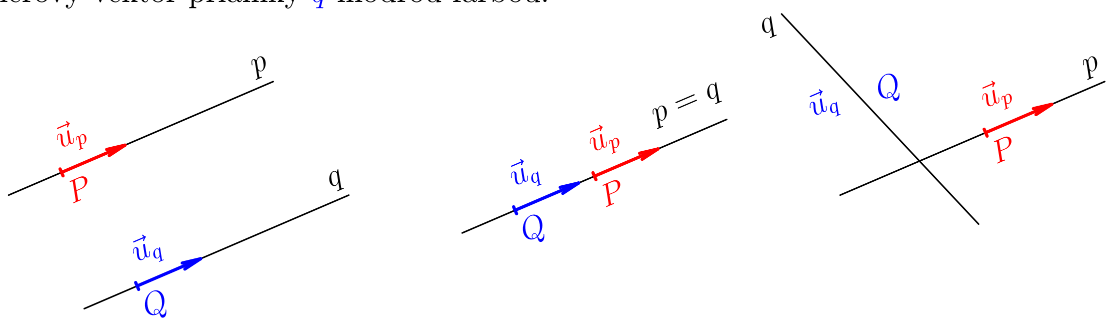
U: Výborne. Potrebujeme dve priamky, zoberme si napr. priamky p a q. Označme ich smerové vektory $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$. Body ležiace na príslušných priamkach označme ako P a Q. Potom môžeme povedať, že priamka p je určená bodom P a smerovým vektorom $\vec{u}_p$. Túto skutočnosť môžeme zapísať tak ako to vidíš v rámčeku.

$$\boxed{p(P; \vec{u}_p)}$$

Ž: *Zrejme podobne môžeme zapísať aj priamku q.*

$$\boxed{q(Q; \vec{u}_q)}$$

U: Nakreslíme si tri obrázky, na ktorých sú priamky p a q postupne rovnobežné, rovnobežné totožné a rôznobežné. Bod P a smerový vektor priamky p vyznačíme červenou, bod Q a smerový vektor priamky q modrou farbou.



Na obrázkoch budeme skúmať ako súvisí vzájomná poloha priamok s umiestnením smerových vektorov jednotlivých priamok.

Ž: *Na druhom obrázku, kde sú priamky totožné, sú smerové vektory umiestnené na jednej priamke.*

U: Výborne. Čo to znamená pre vektory?

Ž: *No, kľudne by mohli mať priamky p a q ten istý smerový vektor. Čiže mohlo by platiť:*

$$\vec{u}_p = \vec{u}_q.$$

U: Áno. Vektor $\vec{u}_p$ môže byť aj nenulovým násobkom vektora $\vec{u}_q$:

$$\vec{u}_p = k\vec{u}_q, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Inými slovami vektory $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$ sú lineárne závislé.

U: Pozrime sa teraz na prvý obrázok. Na rovnobežné priamky. Nie sú aj v tomto prípade smerové vektory lineárne závislé?

Ž: *No…nie sú na jednej priamke. Sú len rovnobežné.*

U: Nezabudni, že vektor nemôžeme znázorniť. Môžeme znázorniť len niektoré z jeho umiestnení. Rôzne umiestnenia toho istého vektora ležia na rovnobežných priamkach.

Ž: *Naozaj, zabudol som. Smerový vektor priamky p, vektor $\vec{u}_p$, môžeme umiestniť aj na priamku q. Keďže je s priamkou p rovnobežná.*

U: A tak dostávame predchádzajúci prípad.

Ž: *Znamená to, že ak sú priamky rovnobežné, ich smerové vektory sú lineárne závislé.*

U: Správne.

Ž: *Ako ale odlíšime, či sú totožné alebo rôzne?*

U: Tak sa na to pozrime. Zo smerových vektorov sme zistili, že priamky p a q sú rovnobežné. Všimnime si na obrázku bod P patriaci priamke p.

Ž: *Aha! Ak sú priamky totožné, bod P patrí aj priamke q.*

U: Presne tak. Overíme, či bod P patrí priamke q. Ak patrí, tak sú priamky totožné. A ak nepatrí, tak sú rovnobežné rôzne.
Ostal nám prípad rôznobežných priamok.

Ž: *To je už jasné. Ak sú priamky rôznobežné, ich smerové vektory by sme ťažko umiestnili na jednu priamku.*

U: Je to dokonca nemožné. Smerové vektory rôznobežných priamok sú lineárne nezávislé.
Zhrnieme si to. Máme priamku p danú bodom P a smerovým vektorom $\vec{u}_p$ a priamku q danú bodom Q a smerovým vektorom $\vec{u}_q$. Ak sú smerové vektory $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$ lineárne závislé, priamky p a q sú rovnobežné.

Ž: *V prípade, že bod P patriaci priamke p patrí aj priamke q, priamky sú totožné. Inak sú rovnobežné rôzne.*

U: Ak sú smerové vektory $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$ lineárne nezávislé, t. j. jeden nie je násobkom druhého, priamky p a q sú rôznobežné.

Vzájomná poloha priamok v rovine daných parametricky

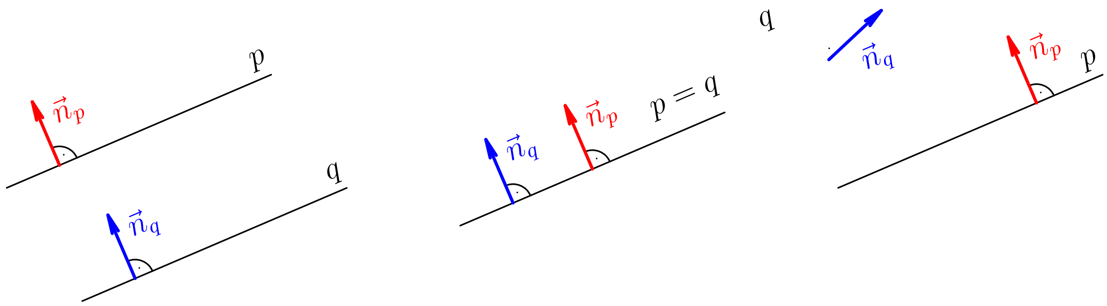
$$p(P; \vec{u}_p), \quad q(Q; \vec{u}_q)$$

- $\exists k \in \mathbb{R} : \vec{u}_p = k\vec{u}_q \Rightarrow p \parallel q$
  - $P \in q \Rightarrow p = q$
  - $P \notin q \Rightarrow p \parallel q \wedge p \neq q$
- $\forall k \in \mathbb{R} : \vec{u}_p \neq k\vec{u}_q \Rightarrow p \nparallel q$

U: Pozrieme sa teraz na vzájomnú polohu priamok daných ***všeobecnou rovnicou***.

Ž: *Zo všeobecnej rovnice vieme určiť normálové vektory priamok. Normálový vektor je vektor kolmý na priamku.*

U: Veľmi správne.
Majme dané priamky p a q. Ich normálové vektory označme ako $\vec{n}_p$ a $\vec{n}_q$. Nakreslime si opäť tri obrázky, na ktorých budú priamky p a q postupne rovnobežné, rovnobežné totožné a rôznobežné. Farebne si vyznačíme normálové vektory $\vec{n}_p$ a $\vec{n}_q$.



Ž: *Á… teraz je už všetko jasné. Bude to podobné ako so smerovými vektormi. Rovnobežné priamky majú rovnaké normálové vektory …*

U: … nemusia byť rovnaké, ale jeden je násobkom druhého. Sú lineárne závislé.

Ž: *Áno. A rôznobežné priamky majú iné normálové vektory, teda vektory, ktoré nie sú lineárne závislé.*

U: Správne. Situácia je taká istá, akurát namiesto so smerovými vektormi pracujeme s vektormi normálovými. Zhrnieme si to.

Ž: *Ak sú normálové vektory $\vec{n}_p$ a $\vec{n}_q$ lineárne závislé, priamky p a q sú rovnobežné.*

U: V prípade, že existuje bod napr. A patriaci priamke p, ktorý patrí zároveň aj priamke q, priamky sú totožné. Inak sú rovnobežné rôzne.

U: Ak sú normálové vektory $\vec{n}_p$ a $\vec{n}_q$ lineárne nezávislé, priamky p a q sú rôznobežné.

Vzájomná poloha priamok v rovine daných všeobecnou rovnicou

$$p(\vec{n}_p), \quad q(\vec{n}_q)$$

- $\exists k \in \mathbb{R} : \vec{n}_p = k\vec{n}_q \Rightarrow p \parallel q$
  - $\exists A : A \in p \wedge A \in q \Rightarrow p = q$
  - $\exists A : A \in p \wedge A \notin q \Rightarrow p \parallel q \wedge p \neq q$
- $\forall k \in \mathbb{R} : \vec{n}_p \neq k\vec{n}_q \Rightarrow p \nparallel q$

U: Na záver ešte jedna poznámka. Zistiť vzájomnú polohu dvoch priamok v rovine môžeme aj bez použitia vektorov, či už smerových alebo normálových. Táto metóda je založená na hľadaní prieniku dvoch priamok.

Ž: *Myslíte spoločných bodov?*

U: Presne tak. Spoločné body oboch priamok musia vyhovovať tak rovnici jednej priamky ako aj rovnici druhej priamky. Preto vyhovujú sústave dvoch rovníc zloženej z rovníc oboch priamok.

Ž: *Je jedno, či sú všeobecné alebo parametrické?*

U: Samozrejme. Koľko riešení môže mať sústava dvoch lineárnych rovníc?

Ž: *Myslím, že práve jedno, nekonečne veľa alebo žiadne.*

U: Nič ti to nepripomína?

Ž: *No áno... dve priamky v rovine môžu mať jeden spoločný bod, nekonečne veľa alebo žiaden.*

U: Presne tak. Podľa počtu riešení sústavy rovníc, vieme hneď určiť vzájomnú polohu. Výhodou je aj to, že ak sú priamky rôznobežné, máme hneď aj určené súradnice priesečníka rôznobežných priamok.

Príklad 1: *Určte vzájomnú polohu priamok p a q, ktorých parametrické vyjadrenie je takéto:*
p: $x = 1 + 4t$, $y = -t$; $t \in \mathbb{R}$
q: $x = 3 - 12s$, $y = -2 + 3s$; $s \in \mathbb{R}$.

U: Vzájomnú polohu dvoch priamok v rovine môžeme určiť rôznymi spôsobmi. Ukážeme si dva z nich.

Ž: *Pamätám sa, že jeden spôsob súvisí s porovnávaním vektorov. Priamky sú dané parametricky, tak pôjde o porovnanie smerových vektorov.*

U: Správne. Určme si súradnice smerových vektorov priamok.

Ž: *Dobre. Súradnice smerových vektorov ľahko prečítam z parametrických rovníc. Sú to čísla stojace pri parametri t, resp. pri parametri s. Smerové vektory priamok p a q majú tieto súradnice:*

$$\vec{u}_p = (4; -1),$$

$$\vec{u}_q = (-12; 3).$$

U: Výborne. Teraz potrebujeme určiť, či tieto smerové vektory sú lineárne závislé.

Ž: *Hm... či jeden je násobkom druhého? Na prvý pohľad vidno, že áno. Ak smerový vektor priamky p vynásobíme číslom (-3), dostaneme smerový vektor priamky q.*

U: Platí:

$$\vec{u}_q = -3\vec{u}_p.$$

Ž: *Smerové vektory sú lineárne závislé.*

U: Priamky p a q sú ***rovnobežné***. Potrebujeme ešte zistiť, či sú rôzne alebo totožné.

Ž: *Ak sú rôzne, nemajú žiadne spoločné body a ak sú totožné, majú spoločné všetky body.*

U: Práve to využijeme. Vyskúšame, či jeden bod z priamy p patrí aj priamke q.

Ž: *To bude stačiť? Nemali by sme preveriť všetky body?*

U: Nezabúdaj, že už vieme, že priamky sú rovnobežné. Preto, ak majú spoločný jeden bod, musia byť totožné. Naopak, ak jeden vybraný bod nebude ich spoločný, musia byť rovnobežné rôzne.

Ž: *Rozumiem. Vyberiem si jeden bod patriaci priamke p, nazvem ho P.*

U: Asi bude najjednoduchšie zobrať ten, ktorý vieme rýchlo prečítať z parametrickej rovnice.

Ž: *Áno. Zoberiem z parametrickej rovnice čísla stojace hneď za rovná sa, to budú súradnice bodu P, teda*

$$P[1; 0].$$

U: Teraz zistíme, či bod P patrí aj priamke q. Ak jej patrí, musia jeho súradnice vyhovovať parametrickej rovnici priamky q.

Ž: *Dosadím súradnice bodu P do parametrických rovníc priamky q:*

$$1 = 3 - 12s$$
$$0 = -2 + 3s.$$

U: Každému bodu priamky q zodpovedá práve jedna hodnota parametra s. Ak bude mať táto sústava riešenie, bod P patrí priamke q, ak nebude mať riešenie, bod P nepatrí priamke q.

Ž: *Vyriešim sústavu. Vyjadrím s najprv z prvej rovnice:*

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 12s \\ -2 &= -12s \\ s &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Pokračujem vyjadrením s z druhej rovnice:

$$\begin{aligned} 0 &= -2 + 3s \\ 2 &= 3s \\ s &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Vidím, že vypočítané hodnoty s sú rôzne, sústava nemá riešenie.

U: Bod P nepatrí priamke q, preto sú priamky p a q ***rovnobežné rôzne***.

Ž: *Spomínali ste ešte druhý spôsob zistenia vzájomnej polohy dvoch priamok.*

U: Áno. Je založený na určení prieniku dvoch priamok. Spoločné body oboch priamok musia vyhovovať tak rovnici jednej priamky ako aj rovnici druhej priamky. Preto vyhovujú sústave dvoch rovníc zloženej z rovníc oboch priamok.

Ž: *Vyriešime len sústavu rovníc? Ako dostaneme takú sústavu? Bude to sústava štyroch rovníc? Veď priamka p má dve parametrické rovnice a priamka q tiež.*

U: No, skrátime to na sústavu dvoch rovníc. V rovniciach vystupujú x a y - to sú súradnice ľubovoľného bodu priamok. Spoločný bod priamok p a q musí mať súradnicu x rovnakú vo vyjadreniach oboch priamok. Podobne je to aj so súradnicou y. Preto stačí rovnice len porovnať:

$$\begin{aligned} 1 + 4t &= 3 - 12s \\ -t &= -2 + 3s. \end{aligned}$$

Ž: *To je predsa obyčajná sústava lineárnych rovníc s dvoma neznámymi.*

U: Samozrejme.

Ž: *Vyriešim ju. Najprv si rovnice upravím:*

$$\begin{aligned} 4t + 12s &= 2 \\ -t - 3s &= -2. \end{aligned}$$

Teraz použijem sčítaciu metódu, druhú rovnicu vynásobím s číslom 4. *Potom ich sčítam. Dostanem rovnicu*

$$12s - 12s = 2 - 8.$$

Čo je po úprave

$$0 = -6.$$

Pekná blbosť. Sústava nemá riešenie.

$$\boxed{\begin{array}{rl} 4t + 12s = 2 & \\ -t - 3s = -2 & / \cdot 4 \\ \hline 12s - 12s = 2 - 8 & \\ 0 = -6 & \end{array}}$$

U: Máš pravdu, aj keď „blbosť“ by som to nepomenoval. Sústava nemá riešenie, to znamená, že priamky p a q nemajú žiadne spoločné body. Sú rovnobežné a rôzne.

Ž: *Ako by to vyzeralo, keby boli rôznobežné?*

U: Sústava by mala práve jedno riešenie, usporiadanú dvojicu odpovedajúcu parametrom t a s. Po ich dosadení do parametrických rovníc by sme dostali súradnice priesečníka priamok.

Ž: *Aha! A ak by boli rovnobežné totožné, sústava by mala nekonečne veľa riešení.*

U: Správne. Namiesto $0 = -6$ by si dostal napr. $-6 = -6$.

Úloha 1: *Určte vzájomnú polohu priamok p a q, ktorých parametrické vyjadrenie je takéto:*
p: $x = 3 - 2t,\ y = 4 + 3t;\ t \in \mathbb{R}$
q: $x = 6 + 3s,\ y = -0,5 - 4,5s;\ s \in \mathbb{R}$.

Výsledok: Priamky sú rovnobežné totožné.

Príklad 2: *Dané sú priamky $p: -2x+4y-10=0$ a $q: 3x-6y+15=0$. Určte ich vzájomnú polohu, v prípade rôznobežnosti určte aj ich priesečník.*

U: Vzájomnú polohu dvoch priamok v rovine môžeme rôznymi spôsobmi. Ukážeme si dva z nich.

Ž: *Pamätám sa, že jeden spôsob súvisí s porovnávaním vektorov. Parametre nevidím, priamky sú dané všeobecnou rovnicou. Pôjde o porovnanie normálových vektorov.*

U: Správne. Určme si súradnice normálových vektorov priamok.

Ž: *Dobre. Súradnice normálových vektorov ľahko prečítam zo všeobecných rovníc. Sú to koeficienty pri x a y. Normálové vektory priamok p a q majú súradnice:*

$$\vec{n}_p = (-2; 4),$$

$$\vec{n}_q = (3; -6).$$

U: Výborne. Teraz potrebujeme určiť, či normálové vektory sú lineárne závislé.

Ž: *Teda, či jeden je násobkom druhého? Povedal by som, že nie.*

U: Naozaj? Je dobré, ak to vieš na prvý pohľad zistiť. Potrebné je to však aj zdôvodniť. Predpokladajme, že sú lineárne závislé. Znamená to, že existuje také číslo $k \in \mathbb{R}$, že platí:

$$\vec{n}_q = k\vec{n}_p.$$

Môžeme písať:

$$(3; -6) = k(-2; 4)$$

Ž: *To by znamenalo, že*

$$3 = -2k \;\wedge\; -6 = 4k.$$

Z prvého máme $k = -\frac{3}{2}$ a z druhého $k = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$. Uf! Vektor $\vec{n}_q$ je násobkom vektora $\vec{n}_p$!

U: Normálové vektory sú lineárne závislé. Zrejme násobok $(-\frac{3}{2})$ nevidno na prvý pohľad. Priamky p a q sú ***rovnobežné***.
Potrebujeme ešte zistiť, či sú rôzne alebo totožné.

Ž: *Ak sú rôzne, nemajú žiadne spoločné body a ak sú totožné, majú spoločné všetky body.*

U: Práve to využijeme. Vyskúšame, či jeden bod z priamy p patrí aj priamke q.

Ž: *To bude stačiť? Nemali by sme preveriť všetky body?*

U: Nezabúdaj, že už vieme, že priamky sú rovnobežné. Preto, ak majú spoločný jeden bod, musia byť totožné. Naopak, ak jeden vybraný bod nebude ich spoločný, musia byť rovnobežné rôzne.

Ž: *Dobre. Vyberiem si jeden bod patriaci priamke p, nazvem ho P. No... ako ho nájdem?*

U: Jednu súradnicu si zvolíme, samozrejme čo najjednoduchšie, a druhú dopočítame podľa všeobecnej rovnice.

Ž: *Priamka p má všeobecnú rovnicu*

$$p: \ -2x + 4y - 10 = 0.$$

Zvolím si napr. $y = 0$, dosadím ho do rovnice a vypočítam x:

$$\begin{aligned} -2x + 4 \cdot 0 - 10 &= 0 \\ -2x &= 10 \\ x &= -5. \end{aligned}$$

Bod P má súradnice

$$P[-5; 0].$$

U: Teraz zistíme, či bod P patrí aj priamke q. Ak jej patrí, musia jeho súradnice vyhovovať všeobecnej rovnici priamky q.

Ž: *Priamka q má všeobecnú rovnicu*

$$p: \ 3x - 6y + 15 = 0.$$

Dosadím súradnice bodu P:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-5) - 6 \cdot 0 + 15 &= 0 \\ -15 + 15 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

U: Rovnosť platí. Bod P patrí priamke q. Priamky p a q sú ***rovnobežné totožné***.

Ž: *Spomínali ste ešte druhý spôsob zistenia vzájomnej polohy dvoch priamok.*

U: Áno. Je založený na určení prieniku dvoch priamok. Spoločné body oboch priamok musia vyhovovať tak rovnici jednej priamky ako aj rovnici druhej priamky. Preto vyhovujú sústave dvoch rovníc zloženej z rovníc oboch priamok.

Ž: *To vyzerá jednoducho. Vytvorím si sústavu z rovníc oboch priamok:*

$$\begin{aligned} -2x + 4y - 10 &= 0 \\ 3x - 6y + 15 &= 0. \end{aligned}$$

U: Je to sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi.

Ž: *Takú viem riešiť. Použijem sčítaciu metódu, prvú rovnicu vynásobím 3 a druhú 2. Následne ich sčítam. Sledujte rámček. Dostanem rovnicu*

$$-6x + 6x + 12y - 12y - 30 + 30 = 0.$$

Čo je po úprave dáva

$$0 = 0.$$

$$\begin{array}{rl} -2x + 4y - 10 = 0 & / \cdot 3 \\ 3x - 6y + 15 = 0 & / \cdot 2 \\ \hline 6x - 6x + 12y - 12y - 30 + 30 = 0 & \\ 0 = 0 & \end{array}$$

U: Sústava má nekonečne veľa riešení. To znamená, že priamky p a q majú nekonečne veľa spoločných bodov. Sú ***rovnobežné a totožné***.

Ž: *Ako by to vyzeralo, keby boli rôznobežné?*

U: Sústava by mala práve jedno riešenie, usporiadanú dvojicu čísel x a y. Boli by to súradnice priesečníka dvoch priamok.

Ž: *Aha! A ak by boli rovnobežné rôzne, sústava by nemala riešenie.*

U: Správne. Ešte jeden postreh. Pozrime sa ešte raz na všeobecné rovnice oboch priamok.

$$\begin{aligned} -2x + 4y - 10 &= 0 \\ 3x - 6y + 15 &= 0. \end{aligned}$$

Nielen normálový vektor $\vec{n}_q$ je násobkom normálového vektora $\vec{n}_p$, ale aj celá všeobecná rovnica priamky q je násobkom všeobecnej rovnice priamky p.

Ž: *Naozaj! Platí, že*

$$-10 \cdot \frac{3}{2} = 15.$$

U: Preto je jasné, že ide o tú istú priamku. Vieme predsa, že priamka môže mať nekonečne veľa všeobecných rovníc, pričom jedna je nenulovým násobkom druhej.

Úloha 1: *Dané sú priamky* $p:\ -2x + 3y - 1 = 0$ *a* $q:\ 4x - y - 3 = 0$. *Určte ich vzájomnú polohu, v prípade rôznobežnosti určte aj ich priesečník.*

Výsledok: Priamky sú rôznobežné, priesečník $P[1; 1]$.

Príklad 3: *Dané sú priamky* $p: 5x+8y+17=0$ *a* $q: x=2-4t,\ y=-3+2t,\ t\in\mathbb{R}$. *Určte ich vzájomnú polohu, v prípade rôznobežnosti určte aj ich priesečník.*

Ž: *Vzájomnú polohu dvoch priamok určujeme na základe porovnania ich smerových alebo normálových vektorov.*

U: To je pravda. Vhodné je to v prípade, keď máme dané obidve priamky parametricky alebo obidve priamky všeobecnou rovnicou.

Ž: *Hm... Priamka* p *je daná všeobecnou rovnicou a priamka* q *parametricky. Mohol by som jednu, napr. priamku* q *upraviť tiež na všeobecnú rovnicu.*

U: Nie „priamku upravíme na rovnicu", ale z jej parametrického vyjadrenia určíme jej všeobecnú rovnicu. Myslím však, že to nebude potrebné.

Ž: *Akože? Budeme porovnávať normálový a smerový vektor? To predsa nemá zmysel.*

U: Dalo by sa to aj tak. Namiesto o lineárnej závislosti by sme uvažovali o kolmosti, ale to teraz necháme tak. Existuje jednoduchší spôsob.

Ž: *Tak potom mi ostáva iba nájsť spoločné body oboch priamok.*

U: Presne tak. Spoločné body oboch priamok musia vyhovovať tak rovnici jednej priamky ako aj rovnici druhej priamky. Priamka q je daná parametricky. Ľubovoľný bod patriaci priamke q má súradnice

$$[x;y]=[2-4t;-3+2t],\ t\in\mathbb{R}.$$

Ž: *Aha! To ste namiesto súradníc* $x;y$ *zapísali vyjadrenia z parametrických rovníc priamky* q.

U: Samozrejme. Tieto súradnice dosadíme do všeobecnej rovnice priamky p.

Ž: *Je to logické. Súradnice spoločných bodov musia vyhovovať aj rovnici priamky* p.

U: Dostávame jednu rovnicu s jednou neznámou t:

$$5(2-4t)+8(-3+2t)+17=0$$

Ž: *To sa mi páči. Žiadna sústava, len obyčajná lineárna rovnica. Vyriešim ju. Najprv upravím ľavú stranu - roznásobím zátvorky*

$$10-20t-24+16t+17=0,$$

spočítam čo sa dá

$$-4t+3=0$$

a vyjadrím t

$$t=\frac{3}{4}.$$

U: Výborne. Rovnicu máme vyriešenú. Má práve jedno riešenie $t=\frac{3}{4}$. Aká je ale vzájomná poloha priamok p a q?

Ž: *To je zaujímavá otázka. Neviem, čo nám to vlastne vyšlo.*

U: Hľadali sme spoločné body oboch priamok. Ak hodnotu parametra $t = \frac{3}{4}$ dosadíme do parametrických rovníc priamky q, dostaneme súradnice bodu, ktoré vyhovujú rovniciam oboch priamok.

Ž: *Bude to spoločný bod oboch priamok. Priesečník. Priamky p a q sú* ***rôznobežné****.*

U: Správne. Určme súradnice priesečníka.

Ž: *Dobre. Povedali ste, že hodnotu parametera $t = \frac{3}{4}$ dosadíme do parametrických rovníc priamky q, tak to urobím:*

$$x = 2 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 2 - 3 = -1$$
$$y = -3 + 2 \cdot \frac{3}{4} = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Priesečník P má súradnice $P[-1; -\frac{3}{2}]$.

U: Výborne. Ako samostatnú prácu si môžeš overiť, či bod P naozaj patrí aj priamke p.

Ž: *Ako by vyzeralo riešenie, keby boli priamky rovnobežné?*

U: Všetko súvisí s počtom spoločných bodov oboch priamok. Ak sú priamky rovnobežné a rôzne, nemajú žiaden spoločný bod. Preto zostavená rovnica s parametrom t by nemala žiadne riešenie. Ak sú priamky totožné, majú nekonečne veľa spoločných bodov.

Ž: *Preto zostavená rovnica by mala nekonečne veľa riešení. Už rozumiem. Je to dobre vymyslené. Tak ako rovnica môže mať nula, jedno alebo nekonečne veľa riešení, aj dve priamky v rovine môžu mať nula, jeden alebo nekonečne veľa spoločných bodov.*

U: Som rád, že si postrehol túto súvislosť. Rozhodne nie je náhodná.

Úloha 1: *Dané sú priamky $p: 2x - y + 3 = 0$ a $q: x = -t,\ y = 3 - 2t,\ t \in \mathbb{R}$. Určte ich vzájomnú polohu, v prípade rôznobežnosti určte aj ich priesečník.*

Výsledok: Priamky sú rovnobežné totožné.

Príklad 4: *Určte vzájomnú polohu priamok*
$2x + ay - 4 = 0,$
$x - 3y + a = 0.$
Urobte diskusiu vzhľadom na parameter a.

Ž: *Pamätám si, že vzájomnú polohu dvoch priamok v rovine môžeme určiť porovnávaním smerových vektorov alebo riešením sústavy rovníc.*

U: To je pravda. V našom prípade by som však skôr porovnával normálové vektory ako smerové.

Ž: *Ó, samozrejme. Priamky sú dané všeobecnými rovnicami, normálové vektory sú vhodnejšie. Vieme ich rovno prečítať z rovníc priamok.*

U: Navrhoval by som začať riešením sústavy dvoch rovníc.

Ž: *No dobre. Zostavím si sústavu dvoch rovníc pozostávajúcu so všeobecných rovníc oboch priamok.*

$$2x + ay - 4 = 0$$
$$x - 3y + a = 0.$$

U: Výborne. Je to sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi.

Ž: *Ale s parametrom!!!*

U: To predsa nemôže prekážať. Určite vieš takéto sústavy riešiť. Najprv si však povieme niečo o možnom počte riešení tejto sústavy.

Ž: *Sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi môže mať nula, jedno alebo nekonečne veľa riešení.*

U: Správne. Akurát by som povedal „práve jedno“ riešenie. Každé riešenie sústavy predstavuje jeden spoločný bod oboch priamok.

Ž: *Aha. Takže, ak sústava nemá riešenie, ani priamky nemajú spoločný bod, sú rovnobežné.*

U: A rôzne. Presne tak.

Ž: *Ak má sústava nekonečne veľa riešení, priamky majú nekonečne veľa spoločných bodov, sú totožné. A ak sú rôznobežné, sústava má práve jedno riešenie.*

U: Veľmi dobre povedané.

U: Pustime sa do riešenia. Použijeme dosadzovaciu metódu. Druhá rovnica sa mi zdá na vyjadrenie vhodnejšia.

Ž: *Súhlasím. Z druhej rovnice*

$$x - 3y + a = 0$$

si vyjadrím x

$$x = 3y - a.$$

U: Dosadíme toto modré vyjadrenie do prvej rovnice:

$$2(3y - a) + ay - 4 = 0.$$

Ž: *Rovnicu upravím*

$$6y - 2a + ay - 4 = 0.$$

Členy s neznámou y *nechám na ľavej strane a zvyšok „hodím" napravo. Snažím sa nevšímať si parameter. Teda*

$$6y + ay = 4 + 2a,$$

y *vyberiem pred zátvorky*

$$y(6 + a) = 4 + 2a.$$

U: Nasleduje diskusia ohľadom parametra. Potrebovali by sme totiž deliť výrazom $6 + a$ a to môžeme len v prípade, ak je rôzny od nuly.

Ž: *Takže, ak*

$$6 + a = 0,$$

čiže

$$a = -6,$$

dostávame rovnicu

$$0y = 4 + 2 \cdot (-6).$$

Čo po úprave je

$$0y = -8.$$

Rovnica nemá riešenie a ani sústava nemá riešenie.

U: Ak sa $a = -6$, sústava nemá riešenie, priamky sú ***rovnobežné rôzne***. Ak sa $a \neq -6$, môžeme výrazom $6 + a$ vydeliť rovnicu.

Ž: *Pokračujem pri rovnici*

$$y(6 + a) = 4 + 2a.$$

Výraz v zátvorke je teraz rôzny od nuly, vydelím s ním obe strany rovnice

$$y = \frac{4 + 2a}{6 + a}.$$

To je hodnota neznámej y. *Budem pokračovať s výpočtom neznámej* x. *Predtým sme mali*

$$x = 3y - a.$$

Dosadím y *a mám*

$$x = 3 \cdot \frac{(4 + 2a)}{6 + a} - a.$$

U: Upravíme tento výraz.

Ž: *No dobre. Obidva členy upravím na spoločného menovateľa:*

$$x = \frac{12 + 6a - 6a - a^2}{6 + a},$$

čo dáva

$$x = \frac{12 - a^2}{6 + a}.$$

U: Výborne. Pre $a \neq -6$ máme riešenie sústavy

$$x = \frac{12 - a^2}{6 + a}\ , \quad y = \frac{4 + 2a}{6 + a}.$$

Znamená to, že každej hodnote parametra $a \neq -6$ zodpovedá práve jedna usporiadaná dvojica čísel x, y. Sústava má práve jedno riešenie a priamky sú ***rôznobežné***, majú spoločný práve jeden bod.

Ž: *Dali by sa vypočítať aj súradnice ich priesečníka?*

U: Práve sme ich vypočítali. Hodnoty

$$x = \frac{12 - a^2}{6 + a}\ , \quad y = \frac{4 + 2a}{6 + a}$$

tvoria súradnice priesečníka zadaných priamok.

Ž: *Ešte to zhrniem.* **Pre $a = -6$ sú priamky rovnobežné a rôzne. Pre $a \neq -6$ sú priamky rôznobežné.**

U: Teraz ten druhý spôsob. Využijeme normálové vektory priamok. Aké majú súradnice?

Ž: *Prvá priamka má rovnicu $2x + ay - 4 = 0$, preto jej normálový vektor má súradnice $\vec{n_1} = (2; a)$. Druhá priamka má rovnicu $x - 3y + a = 0$, preto jej normálový vektor má súradnice $\vec{n_2} = (1; -3)$.*

U: Ak sú priamky rovnobežné, ich normálové vektory by mali byť lineárne závislé.

Ž: *Myslíte asi, že jeden je násobkom druhého.*

U: Nech existuje také $k \in \mathbb{R}$, že platí:

$$\vec{n_1} = k\vec{n_2}.$$

Ž: *Aha. Vektor $\vec{n_1}$ bude k násobkom vektora $\vec{n_2}$. Potom pre súradnice vektorov musí platiť:*

$$2 = k \cdot 1 \quad \wedge \quad a = k \cdot (-3).$$

U: Z prvej časti máme

$$k = 2.$$

A preto

$$a = 2 \cdot (-3) = -6.$$

Ak sú normálové vektory lineárne závislé, tak $a = -6$.

Ž: *Priamky sú vtedy rovnobežné. Pre $a \neq -6$ sú priamky rôznobežné, lebo normálové vektory nie sú lineárne závislé. To bolo celkom jednoduché!*

U: Počkaj! Ešte sme neskončili. Musíme rozriešiť, či pri rovnobežnosti budú priamky rôzne alebo totožné.

Ž: *Vieme, že* $a = -6$*. Napadá mi iba dosadiť túto hodnotu do rovníc.*

U: Dobrý nápad.

Ž: *Pre* $a = -6$ *vyzerajú všeobecné rovnice priamok takto:* $2x - 6y - 4 = 0$ *a* $x - 3y - 6 = 0$.

U: Myslím, že vidno, že sa nejedná o tú istú priamku. Druhá rovnica nie je násobkom prvej.

Ž: *Súhlasím. Druhá rovnica by mala byť dvojnásobkom prvej, ale*

$$-6 \neq 2 \cdot (-4).$$

Pre $a = -6$ *sú priamky rovnobežné a rôzne.*

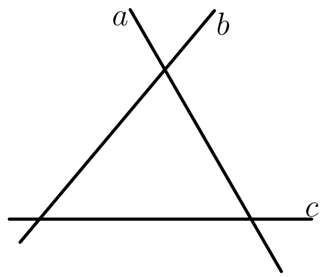
Úloha 1: *Určte hodnoty parametrov* $a, b \in \mathbb{R}$ *tak, aby priamky* p *a* q *boli totožné, ak ich rovnice sú:* $p: x = 1 - t,\ y = 2 + t,\ t \in \mathbb{R}$, $q: x = a + s,\ y = 5 + bs,\ s \in \mathbb{R}$.

Výsledok: $a = -2$, $b = -1$

Príklad 5: *Vypočítajte súradnice vrcholov trojuholníka ABC, ak jeho strany ležia na priamkach s rovnicami:*
$a: 7x - 4y - 1 = 0,$
$b: x - 2y + 7 = 0,$
$c: 2x + y + 4 = 0.$

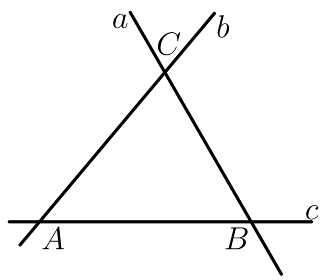
Ž: *Ak tomu dobre rozumiem, máme určiť vrcholy trojuholníka. Nepoznáme nič iné, len strany trojuholníka, presnejšie povedané, strany vyjadrené rovnicami.*

U: Predstav si, že nemáš dané vrcholy trojuholníka, len priamky, na ktorých ležia jeho strany. Asi tak, ako na obrázku.



Ž: *Ale potom je jasné, kde sú vrcholy trojuholníka! Sú to predsa priesečníky priamok.*

U: Presne tak. Označíme ich A, B, C a to tak, aby oproti priamke a ležal bod A, oproti priamke b bol bod B a oproti priamke c bol bod C.



Ž: *Bod A je priesečníkom priamok b a c, bod B je prienikom priamok a a c a bod C je prienikom priamok a a b. Stačí nájsť len prieniky príslušných priamok.*

U: Prienik priamok, zrejme rôznobežných, získame ako riešenie sústavy rovníc príslušných priamok.

Ž: *No, priamky sú dané všeobecnými rovnicami, zostaviť sústavu bude jednoduché.*

U: Zoberme si bod $A = b \cap c$. Zostavíme sústavu z rovníc priamok b a c:

$$x - 2y + 7 = 0$$
$$2x + y + 4 = 0.$$

Je to sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi.

Ž: *Takú viem riešiť. Použijem sčítaciu metódu, druhú rovnicu vynásobím číslom* 2*. Následne ich sčítam. Sledujte rámček. Dostanem rovnicu*

$$5x + 15 = 0.$$

Z čoho dostávam

$$x = -3.$$

$$\boxed{\begin{array}{r} x - 2y + 7 = 0 \\ \underline{2x + y + 4 = 0 \quad / \cdot 2} \\ 5x + 15 = 0 \\ x = -3 \end{array}}$$

U: Ostáva dopočítať súradnicu y.

Ž: *Mohol by som pokračovať sčítacou metódou, ale ja radšej dosadím* $x = -3$ *napr. do prvej rovnice:*

$$-3 - 2y + 7 = 0.$$

Z toho mám hneď

$$y = 2.$$

Riešením sústavy je usporiadaná dvojica $[-3; 2]$*.*

U: Výborne. Riešenie sústavy zároveň predstavuje súradnice spoločného bodu daných priamok, čiže bodu A. Bod A má súradnice $A[-3; 2]$.

Ž: *To bolo celkom ľahké. Budem pokračovať s bodom* B*. Platí, že* $B = a \cap c$*. Preto si zostavíme sústavu z rovníc priamok* a *a* c*:*

$$7x - 4y - 1 = 0$$
$$2x + y + 4 = 0.$$

Použijem sčítaciu metódu, druhú rovnicu vynásobím číslom 4*. Následne ich sčítam. Dostanem rovnicu*

$$15x + 15 = 0.$$

Z čoho dostávam

$$x = -1.$$

Túto hodnotu dosadím napr. do prvej rovnice:

$$-7 - 4y - 1 = 0.$$

Z toho mám hneď

$$y = -2.$$

Bod B má súradnice $B[-1; -2]$*.*

U: Výborne. Ostal už len posledný vrchol trojuholníka, bod C. Ten je prienikom priamok a a b.

Ž: *Preto si zostavíme sústavu z rovníc priamok a a b:*

$$\begin{aligned} 7x - 4y - 1 &= 0 \\ x - 2y + 7 &= 0. \end{aligned}$$

Použijem sčítaciu metódu, druhú rovnicu vynásobím číslom (-2). Následne ich sčítam. Dostanem rovnicu

$$5x - 15 = 0.$$

Z čoho dostávam

$$x = 3.$$

Túto hodnotu dosadím napr. do prvej rovnice:

$$21 - 4y - 1 = 0.$$

Z toho mám hneď

$$y = 5.$$

Bod C má súradnice $C[3;5]$.

Úloha 1: *Vypočítajte súradnice vrcholov trojuholníka ABC, ak jeho strany ležia na priamkach s rovnicami:* $a: x - 2y + 8 = 0$,
$b: 2x + y + 1 = 0$,
$c: 8x - y - 11 = 0$.

Výsledok: $A[1;-3]$, $B[2;5]$, $C[-2;3]$

Príklad 6: *Daný je trojuholník ABC, $A[-1;2]$, $B[3;-1]$, $C[-3;-4]$. Určte súradnice ortocentra trojuholníka.*

Ž: *Viem, že „orto“ znamená kolmý. Ale ortocentrum…*

U: Kde sa v trojuholníku využívajú kolmice?

Ž: *Kolmice? Kolmice na stranu trojuholníka - to sú výšky!*

U: Presnejšie výška v trojuholníku je úsečka spájajúca vrchol a pätu kolmice z tohto vrchola na protiľahlú stranu.

Ž: *Á, už viem! Ortocentrum bude priesečník výšok.*

U: Opäť ťa musím trošku opraviť. Ortocentrum trojuholníka je priesečník priamok, na ktorých ležia výšky.

Ž: *Nepovedal som to isté?*

U: Nie. Súvisí to s tým, že výšky sú úsečky nie priamky. Napríklad v tupouhlom trojuholníku leží ortocentrum mimo trojuholníka, rozhodne nie na výške, ale len na priamke, na ktorej výška leží.

Ž: *Ortocentrum je prienikom priamok, na ktorých ležia výšky. Keby som vedel rovnice týchto priamok, mohli by sme získať aj ich priesečník.*

U: To je pravda. Potrebujeme všetky tri výšky?

Ž: *Áno.*
…počkajte, stačia predsa dve, tam kde sa pretnú, už je ortocentrum. Aj keď rysujem ortocentrum, nepotrebujem narysovať všetky tri výšky, stačia dve.

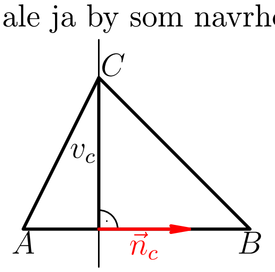
U: Správne úvaha. Potrebujeme teda rovnice dvoch priamok, na ktorých ležia výšky trojuholníka ABC. Začnime napr. s priamkou, na ktorej leží výška na stranu c, označíme ju v_c. Vyjadrime ju rovnicou, navrhoval by som všeobecnou.

Ž: *Na napísanie všeobecnej rovnice budem potrebovať normálový vektor výšky a aspoň jeden bod, ktorý leží na výške. Hľadaná výška je kolmica z vrcholu C na protiľahlú stranu AB. Bod, ktorý na nej leží už máme, je to bod C.*

U: S tým súhlasím. Bod teda máme. Ostáva normálový vektor. Navrhujem nakresliť obrázok.

Ž: *Dobre. Kreslím obrázok. Načrtnem ľubovoľný trojuholník ABC, potom výšku z bodu C a predĺžim ju, čím vznikne priamka, na ktorej leží výška. Normálový vektor je vektor kolmý na výšku, tak ho niekde zakreslím, napr. z bodu C?*

U: Môže byť umiestnený ľubovoľne, ale ja by som navrhol načrtnúť ho na úsečke AB:



Ž: *No jasné! Úsečka AB je kolmá na výšku, preto na nej leží normálový vektor.*

U: A čo keby sme zobrali ako normálový vektor celý vektor $B - A$?

Ž: *Celý vektor $B - A$? Samozrejme, je kolmý na výšku a normálový vektor môže byť ľubovoľne dlhý. Aký geniálny nápad! Máme normálový vektor pre výšku.*

U: Vypočítajme jeho súradnice.

Ž: *Dobre.*

$$\vec{n_c} = B - A = (3-(-1); -1-2) = (4; -3)$$

U: Do všeobecnej rovnice

$$ax + by + c = 0$$

dosadíme súradnice normálového vektora:

$$4x - 3y + c = 0.$$

Na výpočet c použijeme bod $C[-3; -4]$.

Ž: *Dosadím súradnice bodu C do všeobecnej rovnice a získavam:*

$$4 \cdot (-3) - 3 \cdot (-4) + c = 0.$$

Vypočítam c:

$$c = 0.$$

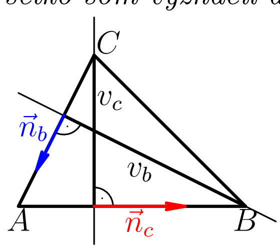
Všeobecná rovnica priamky, na ktorej leží výška v_c je:

$$4x - 3y = 0.$$

U: Výborne.

U: Potrebujeme ešte druhú priamku, navrhujem napr. priamku, na ktorej leží výška z bodu B, označíme ju v_b.

Ž: *Určenie rovnice by malo byť také isté. Bod, ktorý leží na priamke bude bod B a normálový vektor môže byť vektor $C - A$. Všetko som vyznačil aj na obrázku.*



U: Výborne. Poďme počítať.

Ž: *Vypočítam súradnice normálového vektora:*

$$\vec{n_b} = C - A = (-3-(-1); -4-2) = (-2; -6).$$

Tieto dosadím do všeobecnej rovnice a dostávam

$$-2x - 6y + c = 0.$$

Na výpočet c *použijeme bod* $B[3; -1]$.

$$-2 \cdot 3 - 6 \cdot (-1) + c = 0$$

$$c = 0$$

Všeobecná rovnica priamky, na ktorej leží výška v_b *je:*

$$-2x - 6y = 0.$$

U: Navrhoval by som, upraviť ju, t. j. vydeliť rovnicu číslom (-2).

Ž: *Súhlasím. Všeobecná rovnica priamky, na ktorej leží výška* v_b *potom vyzerá takto:*

$$x + 3y = 0.$$

U: Máme teda rovnice dvoch priamok, na ktorých ležia dve výšky trojuholníka ABC. Nájdem ich priesečník, ktorým bude ortocentrum trojuholníka.

Ž: *Nájsť priesečník, znamená vyriešiť túto sústavu rovníc:*

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 0 \\ x + 3y &= 0. \end{aligned}$$

U: Na riešenie sa núka sčítacia metóda.

Ž: *OK. Sčítam obe rovnice a dostávam*

$$5x = 0.$$

Z čoho

$$x = 0.$$

Po dosadení do prvej rovnice dostávam aj

$$y = 0.$$

Riešením je usporiadaná dvojica $[0; 0]$.

U: Správne. Ortocentrum má súradnice $O[0;0]$.
Musím však poznamenať, že toto riešenie bolo hneď jasné. Rovnice priamok sú

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 0 \\ x + 3y &= 0. \end{aligned}$$

V každej rovnici chýba koeficient c, teda je rovný nule. Znamená to, že obe priamky prechádzajú začiatkom sústavy súradníc, bodom so súradnicami $[0;0]$. Nakoľko sú rôznobežné, je to zároveň aj ich jedinný priesečník, čiže ortocentrum.

Úloha 1: *Daný je trojuholník ABC, $A[1;2]$, $B[3;6]$, $C[-7;8]$. Určte súradnice ťažiska trojuholníka ABC ako priesečníka jeho ťažníc.*

Výsledok: $T[-1; \frac{16}{3}]$