Vzájomná poloha priamok v priestore

RNDr. Viera Vodičková

U: Aká môže byť vzájomná poloha dvoch priamok v rovine?

Ž: *Priamky v rovine môžu byť rovnobežné alebo rôznobežné.*

U: Áno. V rámci rovnobežnosti rozlišujeme rovnobežné rôzne a rovnobežné totožné priamky. A aká môže byť vzájomná poloha dvoch priamok ***v priestore***?

Ž: *Myslím, že sa to veľmi nezmení.*

U: Ale áno. Pribudnú ***mimobežné priamky***.

Ž: *Aha, spomínam si. Mimobežné priamky sa nikdy nestretnú. Sú to také, ktoré nemajú spoločný bod, ale zároveň nie sú rovnobežné.*

U: Na základe čoho klasifikujeme vzájomnú polohu priamok v priestore?

Ž: *Myslím, že na základe počtu ich spoločných bodov.*

U: Obávam sa, že nám to teraz nebude stačiť. Ani rovnobežné ani mimobežné priamky nemajú spoločný bod.

Ž: *No, tie mimobežky budú robiť problémy...*

U: Ani nie. Ako rozoznáš mimobežky od rovnobežiek?

Ž: *No predsa idú „mimo“...*

U: Idú „mimo“ - to znamená, že ***neležia v jednej rovine***. Naopak rovnobežky ležia v jednej rovine.

Ž: *Rozlišovacím kritériom, okrem prieniku, bude to, či dve priamky ležia v jednej rovine.*

U: Správne.

- Ak dve priamky ležia v jednej rovine a ich prienikom je prázdna množina (priamky nemajú spoločný bod), sú ***rovnobežné rôzne***.
- Ak dve priamky ležia v jednej rovine a ich prienikom je nekonečne veľa bodov (celá priamka), sú ***rovnobežné totožné***.
- Ak dve priamky ležia v jednej rovine a ich prienikom je práve jeden bod, sú ***rôznobežné***.
- Ak dve priamky neležia v jednej rovine, ich prienikom je prázdna množina (priamky nemajú spoločný bod), sú ***mimobežné***.

Ž: *Pekne sme si to zopakovali. Dôležité je, či ležia v jednej rovine alebo nie. Ak neležia, sú mimobežné. Ak ležia, tak je to tak ako pri dvoch priamkach v rovine.*

U: Budeme skúmať vzájomnú polohu priamok z analytického hľadiska.

Ž: *Pomocou vektorov?*

U: Áno. Z rovníc priamok musíme vedieť určiť, či sú rovnobežné, rôznobežné alebo mimobežné.

Ž: *Pochopil som. Budeme pracovať len s rovnicami priamok.*

U: Akou rovnicou vieme vyjadriť priamku v priestore?

Ž: *Priamku v priestore môžeme vyjadriť len parametricky.*

U: Správne. Zopakujme si, že parametrické vyjadrenie priamky v súradniciach je:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2 \\ z &= a_3 + tu_3, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Čo všetko vieme určiť z parametrických rovníc priamky?

Ž: *Z parametrického vyjadrenia vieme priamo určiť súradnice jedného bodu priamky, napr. bodu $A[a_1; a_2; a_3]$. Okrem toho aj súradnice smerového vektora priamky, vektora $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$.*

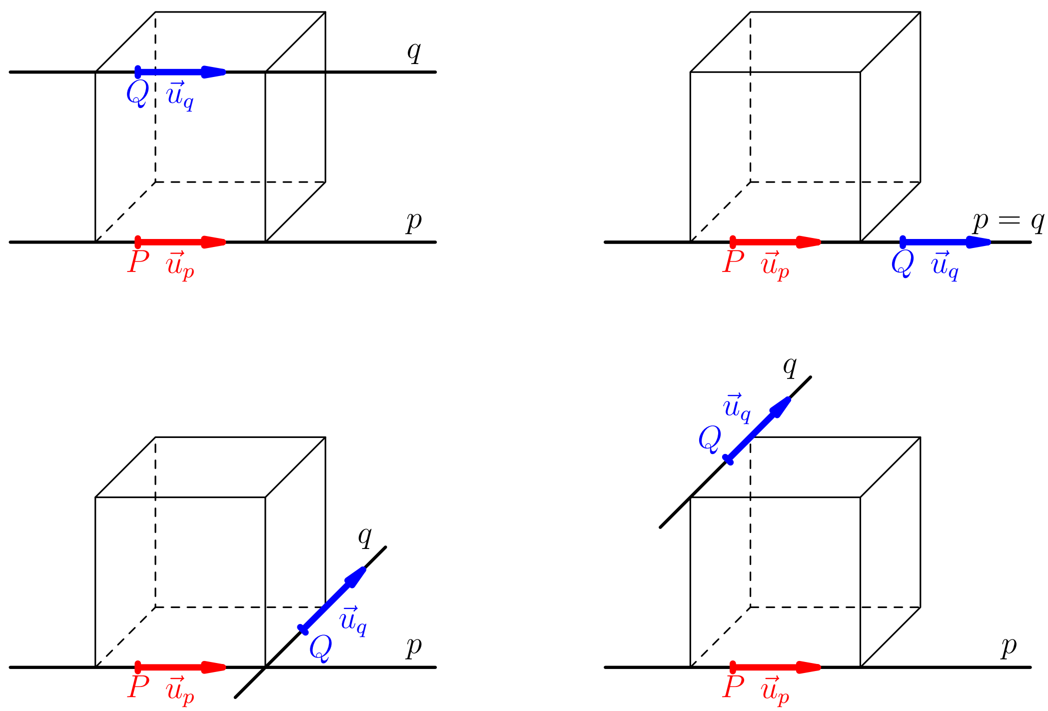
U: Výborne. Potrebujeme dve priamky, zoberme si napr. priamky p a q. Označme ich smerové vektory $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$. Body ležiace na príslušných priamkach označme ako P a Q. Potom môžeme povedať, že priamka p je určená bodom P a smerovým vektorom $\vec{u}_p$. Túto skutočnosť môžeme zapísať takto ako v tomto rámčeku:

$$\boxed{p(P; \vec{u}_p)}$$

Ž: *Zrejme podobne priamku q môžem zapísať ako v ďalšom rámčeku.*

$$\boxed{q(Q; \vec{u}_q)}$$

U: Kvôli lepšej predstavivosti sa nám hodia obrázky jednotlivých vzájomných polôh. Mimobežné priamky sa nezakresľujú jednoducho, a preto si zoberieme na pomoc kocku. Na hranách kocky nájdeme postupne dvojicu rovnobežných, rovnobežných totožných, rôznobežných a mimobežných priamok. Bod P a smerový vektor priamky p vyznačíme červenou, bod Q a smerový vektor priamky q modrou farbou.



Na obrázkoch budeme skúmať ako súvisí vzájomná poloha priamok s umiestnením smerových vektorov jednotlivých priamok.

Ž: *Na druhom obrázku, kde sú priamky totožné, sú smerové vektory umiestnené na jednej priamke.*

U: Výborne. Čo to znamená pre vektory?

Ž: *No, kľudne by mohli mať priamky p a q ten istý smerový vektor. Čiže mohlo by platiť:*

$$\vec{u}_p = \vec{u}_q.$$

U: Áno. Vektor $\vec{u}_p$ môže byť aj nenulovým násobkom vektora $\vec{u}_q$.

$$\vec{u}_p = k\vec{u}_q, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Inými slovami, vektory $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$ sú lineárne závislé.
Pozrime sa teraz na prvý obrázok. Na rovnobežné priamky. Nie sú aj teraz smerové vektory lineárne závislé?

Ž: *No... nie sú na jednej priamke. Sú len rovnobežné.*

U: Nezabudni, že vektor nemôžeme znázorniť. Môžeme znázorniť len jeho umiestnenie. Rôzne umiestnenia toho istého vektora ležia na rovnobežných priamkach.

Ž: *Naozaj, zabudol som. Smerový vektor priamky p, vektor $\vec{u}_p$, môžeme umiestniť aj na priamku q. Kedže je s priamkou p rovnobežná.*

U: A tak dostávame predchádzajúci prípad.

Ž: *Znamená to, že ak sú priamky rovnobežné, ich smerové vektory sú lineárne závislé.*

U: Správne. Pozrime sa na smerové vektory priamok na ďalších dvoch obrázkoch. Tam máme priamky rôznobežné a mimobežné.

Ž: *Teraz vektory ťažko umiestnime na jednu priamku, nedá sa to. Evidentne sú „iné".*

U: Smerové vektory rôznobežných a mimobežných priamok sú lineárne nezávislé. Smerový vektor priamky p nie je násobkom smerového vektora priamky q.

Ž: *Zhrnieme si to. Doteraz sme zistili, že ak sú smerové vektory lineárne závislé, priamky sú rovnobežné rôzne alebo totožné. Ak sú smerové vektory priamok lineárne nezávislé, priamky sú buď rôznobežné alebo mimobežné.*

U: Povedal si to veľmi dobre.

Ž: *Nanešťastie máme všade dva prípady. Ako odlíšime, či sú priamky rovnobežné totožné alebo rôzne? Alebo či sú rôznobežné alebo mimobežné?*

U: Pozrime sa najprv na rovnobežné priamky. Ako odlíšime rôzne od totožných?

Ž: *Totožné priamky majú spoločné všetky body, rovnobežné rôzne nemajú žiadne spoločné body.*

U: To aj využijeme. Všimnime si na obrázku bod P patriaci priamke p.

Ž: *Aha! Ak sú priamky totožné, bod P patrí aj priamke Q.*

U: Presne tak. Overíme, či bod P patrí priamke q. Ak patrí, tak sú priamky totožné. A ak nepatrí, tak sú rovnobežné rôzne.
A teraz ako rozlíšime rôznobežné od mimobežných?

Ž: *Opäť si asi pomôžeme prienikom. Rôznobežné priamky majú spoločný práve jeden bod, mimobežné žiaden.*

U: Áno. Nepomôže nám už nič iné, ako hľadať prienik dvoch priamok, riešením sústavy rovníc. Ak sústava bude mať riešenie, a to práve jedno, priamky sú rôznobežné. Ak sústava nebude mať riešenie, priamky sú mimobežné.

Ž: *Nestačilo by od začiatku hľadať prienik dvoch priamok riešením sústavy rovníc? Musíme sa zaoberať aj smerovými vektormi?*

U: Tak si predstav, že hľadáme prienik dvoch priamok. Riešime sústavu lineárnych rovníc. Koľko môže mať riešení?

Ž: *Sústava rovníc môže mať nula, jedno alebo nekonečne veľa riešení.*

U: Ako to bude potom vyzerať s ich vzájomnou polohou?

Ž: *Ak má sústava nekonečne veľa riešení, priamky sú rovnobežné totožné, to je jasné. A ak má práve jedno riešenie, priamky sú rôznobežné.*

U: Ale, ak sústava nemá riešenie, ostávajú ešte dva prípady: rovnobežné rôzne alebo mimobežné. Musíme si pomôcť smerovými vektormi.

Ž: *Ak budú lineárne závislé, sú rovnobežné. A ak nie, sú mimobežné. Vyzerá to komplikovane, ale dufam, že počítať sa to bude ľahko.*

U: Zhrnieme si to. Máme priamku p danú bodom P a smerovým vektorom $\vec{u}_p$ a priamku q danú bodom Q a smerovým vektorom $\vec{u}_q$. Ak sú smerové vektory $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$ lineárne závislé, priamky p a q sú rovnobežné.

Ž: *V prípade, že bod P patriaci priamke p patrí aj priamke q, priamky sú totožné. Inak sú rovnobežné rôzne.*

U: Ak sú smerové vektory $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$ lineárne nezávislé a priamky majú spoločný práve jeden bod, napr. S, sú rôznobežné. Ak sú smerové vektory $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$ lineárne nezávislé a priamky nemajú spoločný bod, sú mimobežné.

Vzájomná poloha priamok v priestore

$$p(P;\vec{u}_p), \quad q(Q;\vec{u}_q)$$

- $\exists k \in \mathbb{R} : \vec{u}_p = k\vec{u}_q \Rightarrow$ priamky p a q sú rovnobežné
  - $P \in q \Rightarrow$ priamky p a q sú rovnobežné totožné
  - $P \notin q \Rightarrow$ priamky p a q sú rovnobežné rôzne
- $\forall k \in \mathbb{R} : \vec{u}_p \neq k\vec{u}_q \ \wedge \ p \cap q = \{S\} \Rightarrow$ priamky p a q sú rôznobežné
- $\forall k \in \mathbb{R} : \vec{u}_p \neq k\vec{u}_q \ \wedge \ p \cap q = \emptyset \Rightarrow$ priamky p a q sú mimobežné

Príklad 1: *Určte vzájomnú polohu priamok p a q, pričom:*
p: $x = t$, $y = -4t$, $z = -3t$; $t \in \mathbb{R}$,
q: $x = -2s$, $y = -8 + 8s$, $z = -3 + 6s$; $s \in \mathbb{R}$.

Ž: *Zdá sa mi, že vzájomnú polohu dvoch priamok v priestore určujeme porovnávaním smerových vektorov.*

U: Nevyriešime tým celý problém. Na začiatok je to však dobré.

Ž: *Neviem celkom, ako ste to mysleli.*

U: Porovnajme smerové vektory a uvidíme.

Ž: *Dobre. Súradnice smerových vektorov ľahko prečítam z parametrických rovníc. Sú to čísla stojace pri parametri t, resp. pri parametri s. Smerové vektory priamok p a q majú nasledovné súradnice:*

$$\vec{u}_p = (1; -4; -3)$$

$$\vec{u}_q = (-2; 8; 6).$$

U: Výborne. Teraz potrebujeme určiť, či tieto smerové vektory sú lineárne závislé. Predpokladám, že tak si myslel to porovnanie.

Ž: *Porovnanie som myslel… či je jeden násobkom druhého. To je lineárna závislosť?*

U: Presne tak.

Ž: *Na prvý pohľad vidno, že áno. Ak smerový vektor priamky p vynásobíme číslom (-2), dostaneme smerový vektor priamky q.*

U: Platí:

$$\vec{u}_q = -2\vec{u}_p.$$

Ž: *Smerové vektory sú lineárne závislé.*

U: Priamky p a q sú ***rovnobežné***. Potrebujeme ešte zistiť, či sú rôzne alebo totožné. Preto len porovnaním smerových vektorov úlohu nevyriešiš.

Ž: *Ak sú priamky rôzne nemajú žiadne spoločné body a ak sú priamky totožné, majú spoločné všetky body.*

U: Práve to využijeme. Vyskúšame, či jeden bod z priamy p patrí aj priamke q.

Ž: *To bude stačiť? Nemali by sme preveriť všetky body?*

U: Nezabúdaj, že už vieme, že priamky sú rovnobežné. Ak majú rovnobežné priamky spoločný jeden bod, musia mať spoločné aj všetky ostatné body. Sú totožné. Naopak, ak jeden vybraný bod nebude ich spoločný, musia byť priamky rovnobežné rôzne.

Ž: *Dobre. Vyberiem si jeden bod patriaci priamke p, nazvem ho P.*

U: Asi bude najjednoduchšie zobrať ten, ktorý vieme rýchlo vyčítať z parametrickej rovnice.

Ž: *Áno. Zoberiem z parametrických rovníc priamky p čísla stojace hneď za rovná sa, to budú súradnice bodu P:*

$$P[0; 0; 0].$$

To je zaujímavý bod!

U: Čím je pre teba zaujímavý?

Ž: *Súradnice sú samé nuly! Aha, je to predsa začiatok sústavy súradníc.*

U: Áno. Priamka p prechádza začiatkom sústavy súradníc. Teraz zistíme, či aj priamka q prechádza začiatkom sústavy súradníc. Patrí bod P aj priamke q?

Ž: *Ak jej patrí, musia jeho súradnice vyhovovať parametrickej rovnici priamky q. Dosadím súradnice bodu $P[0;0;0]$ do parametrických rovníc priamky q:*

$$\begin{aligned} 0 &= s \\ 0 &= -8-4s \\ 0 &= -3-3s. \end{aligned}$$

Už vidím, že to neplatí. V prvej rovnici sa $s=0$ a v druhej rovnici sa $s=-2$. Tretiu rovnicu som ani nepotreboval.

U: Správne. Bod P nepatrí priamke q, preto sú priamky p a q ***rovnobežné a rôzne***.

Úloha 1: *Určte vzájomnú polohu priamok p a q, ktorých parametrické vyjadrenie je takéto:*
p: $x=3-2t$, $y=4+3t$; $t\in\mathbb{R}$,
q: $x=6+3s$, $y=-0,5-4,5s$; $s\in\mathbb{R}$.

Výsledok: rovnobežné totožné

Príklad 2: *Určte vzájomnú polohu priamok p a q, pričom:*
p: $x = 1 + 2t,\ y = -1 - t,\ z = 3 - 3t;\ t \in \mathbb{R}$,
q: $x = -1 - s,\ y = 1 + s,\ z = -3 + 3s;\ s \in \mathbb{R}$.

U: Máme určiť vzájomnú polohu dvoch priamok v priestore. Trochu ťa vyskúšam. Aká môže byť vzájomná poloha dvoch priamok v priestore?

Ž: *Priamky v priestore môžu byť rovnobežné, rôznobežné a mimobežné.*

U: Rovnobežné môžu byť buď rôzne alebo totožné. Ako určíme vzájomnú polohu dvoch priamok v priestore, ak poznáme ich parametrické vyjadrenia?

Ž: *Pamätám sa, že to nejako súvisí s porovnávaním vektorov. Smerových vektorov.*

U: V poriadku, poďme na to.

Ž: *Dobre. Súradnice smerových vektorov priamok ľahko prečítam z ich parametrických rovníc. Sú to čísla stojace pri parametri t, resp. pri parametri s. Smerové vektory priamok p a q majú tieto súradnice:*

$$\vec{u}_p = (2; -1; -3)$$

$$\vec{u}_q = (-1; 1; 3).$$

U: Výborne. Potrebujeme určiť, či tieto smerové vektory sú lineárne závislé. Predpokladám, že tak si myslel to porovnanie.

Ž: *Porovnanie som myslel... či je jeden násobkom druhého. To je lineárna závislosť?*

U: Presne tak.

Ž: *Zdá sa, že nie je jeden násobkom druhého. Smerové vektory nie sú lineárne závislé.*

U: Vedel by si to aj zdôvodniť?

Ž: *Je to predsa úplne jasné. Pozriem a vidím! No, dobre. Hľadám číslo, ktorým mám vynásobiť smerový vektor priamky p, $\vec{u}_p = (2; -1; -3)$ tak, aby som dostal smerový vektor priamky q, $\vec{u}_q = (-1; 1; 3)$. Tak napr. prvú súradnicu potrebujem vynásobiť s číslom $(-\frac{1}{2})$ a druhú potrebujem vynásobiť s číslom (-1). To už nesedí.*

U: Súhlasím. Dalo sa to aj matematicky zapísať, ale uznávam, že si to pekne zdôvodnil. Smerové vektory priamok p a q nie sú lineárne závislé. Čo to znamená pre ich vzájomnú polohu?

Ž: *Priamky nemôžu byť rovnobežné.*

U: Ostávajú dva prípady. Buď sú priamky rôznobežné alebo mimobežné.

Ž: *To už asi pomocou smerových vektorov neurčím...*

U: Čím sa odlišujú mimobežné priamky od rôznobežných?

Ž: *Rôznobežné ležia v jednej rovine a mimobežné nie.*

U: To je pravda. Ale máme ešte jeden rozdiel.

Ž: *Rôznobežné sa pretnú v jednom bode a mimobežné sa nepretínajú.*

U: To je ono. Prienikom rôznobežných priamok je práve jeden bod a prienikom mimobežných priamok je prázdna množina.

Ž: *Potrebujeme teda určiť prienik priamok.*

U: Správne. Je to jednoduché. Stačí porovnať pravé strany parametrických rovníc oboch priamok postupne pre súradnicu x, y a z.

Ž: *Získame tým sústavu rovníc*

$$\begin{aligned} 1 + 2t &= -1 - s \\ -1 - t &= 1 + s \\ 3 - 3t &= -3 + 3s. \end{aligned}$$

U: Je to sústava troch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi. Vyber si dve rovnice a pomocou nich nájdi hodnoty pre t a s.

Ž: *Zoberiem si napr. prvé dve rovnice:*

$$\begin{aligned} 1 + 2t &= -1 - s \\ -1 - t &= 1 + s. \end{aligned}$$

Sú celkom sympatické. Keď ich sčítam, hneď mi vypadne s. Dostávam:

$$t = 0.$$

Dosadím $t = 0$ napr. do prvej rovnice a mám

$$1 + 2 \cdot 0 = -1 - s.$$

To znamená, že

$$s = -2.$$

U: Hodnoty, ktoré sme takto dostali, $t = 0$, $s = -2$, dosadíme do tretej rovnice, ktorú sme zatiaľ nepoužili.

Ž: *Dosadzujem:*

$$3 - 3 \cdot 0 = -3 + 3 \cdot (-2).$$

Upravím a

$$3 = -9.$$

Vlastne by som mal napísať, nerovná sa. V tretej rovnici rovnosť neplatí, a preto sústava nemá riešenie.

U: Súhlasím. Vráťme sa teraz k tomu, čo sme počítali.

Ž: *Pri riešení sústavy som aj zabudol o čo nám išlo.*

U: Hľadali sme prienik dvoch priamok, o ktorých už vieme, že môžu byť buď rôznobežné alebo mimobežné.

Ž: *Aha! Sústava nemá riešenie, to znamená, že prienikom priamok je prázdna množina. Z tých dvoch možností, čo ste spomínali, vyhovujú len mimobežky.*

U: Áno. Priamky p a q nemajú prienik a ich smerové vektory nie sú lineárne závislé. Priamky p a q sú ***mimobežné***.

Úloha 1: *Určte vzájomnú polohu priamok p a q, pričom:*
p: $x = -3 + 2t$, $y = -1 - 2t$, $z = 4t$; $t \in \mathbb{R}$,
q: $x = 3 + s$, $y = -1 + 2s$, $z = 4$; $s \in \mathbb{R}$.

Výsledok: mimobežné

Príklad 3: *Určte hodnotu parametra $m \in \mathbb{R}$ tak, aby priamky p a q boli rôznobežné.*
p: $x = 6 - 3t,\ y = m + t,\ z = -5 + 3t;\ t \in \mathbb{R}$,
q: $x = -4 + s,\ y = 4 + 2s,\ z = 8 - 4s;\ s \in \mathbb{R}$.
Určte aj súradnice priesečníka priamok.

Ž: *Priamky p a q majú byť rôznobežné, znamená to, že majú spoločný jeden bod.*

U: Vyjadrovať sa treba presne. Prienikom rôznobežných priamok je ***práve*** jeden bod. Aj totožné priamky majú spoločný jeden bod. A okrem neho aj nekonečne veľa ďalších…

Ž: *Zapämatám si to.*

U: Dobre. Úlohou je nájsť hodnotu parametra m tak, aby prienikom bol práve jeden bod.

Ž: *To s tým parametrom mi zatiaľ nie je celkom jasné. Ale určiť prienik priamok viem, také úlohy som už riešil. Stačí porovnať parametrické rovnice oboch priamok.*

$$\begin{aligned} 6 - 3t &= -4 + s \\ m + t &= 4 + 2s \\ -5 + 3t &= 8 - 4s. \end{aligned}$$

U: Dostali sme sústavu troch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi.

Ž: *Ja tam vidím tri neznáme t, s a m.*

U: m vystupuje ako parameter. Ale máš pravdu, môžeme sa na to pozrieť aj ako na sústavu s troma neznámymi. Ak bude mať práve jedno riešenie, priamky budú rôznobežné.

Ž: *Pustím sa do riešenia. Ako vidím m vystupuje len v druhej rovnici.*

U: Navrhujem využiť najprv prvú a tretiu rovnicu. Pomocou nich určíme t a s.

Ž: *Súhlasím. Tu sú rovnice:*

$$\begin{aligned} 6 - 3t &= -4 + s \\ -5 + 3t &= 8 - 4s. \end{aligned}$$

Použijem sčítaciu metódu. Sčítam obe rovnice, hneď mi vypadne t. Dostávam:

$$1 = 4 - 3s.$$

Z toho po malej úprave mám

$$s = 1.$$

Dosadím $s = 1$ napr. do prvej rovnice a mám

$$6 - 3t = -4 + 1.$$

Čo znamená, že

$$t = 3.$$

U: Výborne. Ak má mať sústava práve jedno riešenie, musí to byť usporiadaná dvojica $t = 3$ a $s = 1$. Teraz je dôležitá druhá rovnica, tá ktorú sme nepoužili.

Ž: *Aha! Dosadím do nej vypočítané hodnoty a zistím, či platí rovnosť. Ale moment, je tam ten parameter.*

U: Veď práve. Určíme, akú hodnotu musí nadobúdať parameter m, aby rovnosť platila.

Ž: *Jasné. Dosadzujem:*

$$m + 3 = 4 + 2 \cdot 1.$$

Z toho mám

$$m = 3.$$

U: Aby mala sústava práve jedno riešenie, musí byť $m = 3$. Priamky p a q sú rôznobežné práve vtedy, ak $m = 3$.

Ž: *Ostáva určiť priesečník, teda jeho súradnice.*

U: Tie v podstate máme.

Ž: *Myslíte?*

U: Hľadali sme prienik oboch priamok. Označme ho P. Ak hodnotu parametera $t = 3$ dosadíme do parametrických rovníc priamky p, dostaneme súradnice bodu P. Zároveň, ak hodnotu parametera $s = 1$ dosadíme do parametrických rovníc priamky q, dostaneme tiež súradnice bodu P.

Ž: *Rozumiem tomu tak, že bod P patrí aj priamke p aj priamke q. V rovnici priamky p mu prislúcha $t = 3$ a v rovnici priamky q parameter $s = 1$.*

U: Vystihol si to.

Ž: *Dobre. Vyberiem si napr. priamku q. Hodnotu parametra $s = 1$ dosadím do parametrických rovníc priamky q:*

$$\begin{aligned} x &= -4 + 1 = -3 \\ y &= 4 + 2 \cdot 1 = 4 + 2 = 6 \\ z &= 8 - 4 \cdot 1 = 8 - 4 = 4. \end{aligned}$$

Priesečník má súradnice $P[-3; 6; 4]$.

U: Výborne.

Úloha 1: *Určte hodnotu parametra $m \in \mathbb{R}$ tak, aby priamky p a q boli rôznobežné.*
p: $x = 2 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = 4$; $t \in \mathbb{R}$,
q: $x = 1 - 4s$, $y = m + s$, $z = 1 - 3s$; $s \in \mathbb{R}$.
Určte aj súradnice priesečníka.

Výsledok: $m = -2$, $P[5; -3; 4]$

Príklad 4: *Určte súradnice priesečníka (ak existuje) priamky* $\overleftrightarrow{AB}$ *a úsečky* CD*, ak* $A[-3;-5;1]$, $B[1;-8;0]$, $C[8;-12;7]$, $D[11;-14;8]$.

Ž: *Asi by som najprv potreboval rovnice priamky* $\overleftrightarrow{AB}$ *a úsečky* CD*. Mám napísať parametrické alebo všeobecné?*

U: Nezabúdaj, že je to úloha v priestore, body majú tri súradnice. Priamky v priestore nemajú všeobecnú rovnicu.

Ž: *Jasné. Priamka v priestore nemá jednoznačne určený kolmý vektor. Takže parametrické rovnice. Začnem s priamkou* $\overleftrightarrow{AB}$*. Potrebujem smerový vektor, zvolím si vektor* $\vec{u} = B - A$*. Jeho súradnice budú*

$$\vec{u} = B - A = (1-(-3); -8-(-5); 0-1) = (4; -3; -1).$$

Použijem jeden bod z priamky, napr. bod $A[-3;-5;1]$ *a môžem písať parametrické rovnice priamky* $\overleftrightarrow{AB}$*:*

$$\begin{aligned} x &= -3 + 4t \\ y &= -5 - 3t \\ z &= 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

U: Výborne. Teraz ťa čaká to isté s úsečkou CD.

Ž: *Dám sa do toho. Ako smerový vektor si zvolím vektor* $\vec{v} = D - C$*. Jeho súradnice sú*

$$\vec{v} = D - C = (11-8; -14-(-12); 8-7) = (3; -2; 1).$$

Použijem jeden bod z úsečky, napr. bod $C[8;-12;7]$ *a môžem písať parametrické rovnice úsečky* CD*:*

$$\begin{aligned} x &= 8 + 3s \\ y &= -12 - 2s \\ z &= 7 + s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

U: Naozaj je to správne? Skontroloval si si to?

Ž: *Myslím, že áno. Smerový vektor je v poriadku, aj súradnice bodu* C*.*

U: Píšeš však parametrické rovnice úsečky, nie priamky!

Ž: *Jáj! To by malo byť niekde vidieť. Už viem, týka sa to parametra. Ide o úsečku* CD*, to znamená, že parameter bude z uzavretého intervalu* $\langle 0; 1\rangle$*. Parametrické rovnice úsečky* CD *sú tieto:*

$$\begin{aligned} x &= 8 + 3s \\ y &= -12 - 2s \\ z &= 7 + s, \quad s \in \langle 0; 1\rangle. \end{aligned}$$

U: Dobre. Navrhujem začať hneď s určovaním priesečníka priamky $\overleftrightarrow{AB}$ a úsečky CD.

Ž: *Priesečník nájdem tak, že porovnám parametrické rovnice priamky a úsečky:*

$$-3+4t = 8+3s$$
$$-5-3t = -12-2s$$
$$1-t = 7+s.$$

U: Je to sústava troch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi. Vyberiem si dve rovnice a pomocou nich nájdem hodnoty pre t a s.

Ž: *Páči sa mi druhá a tretia rovnica:*

$$-5-3t = -12-2s$$
$$1-t = 7+s.$$

Druhú rovnicu vynásobím číslom 2 *a sčítam ich. Vypadne mi s. Dostávam rovnicu:*

$$-3-5t = 2.$$

Odtiaľ už ľahko mám

$$t = -1.$$

U: Išlo ti to skvele. Pokračujme výpočtom druhej neznámej.

Ž: *Stačí dosadiť $t = -1$ napr. do tretej rovnice a mám*

$$1-(-1) = 7+s.$$

Čo znamená, že

$$s = -5.$$

U: Výborne. Hodnoty, ktoré sme takto dostali, $t = -1$, $s = -5$, dosadíme do prvej rovnice, ktorú sme zatiaľ nepoužili.

Ž: *Dosadzujem:*

$$-3+4\cdot(-1) = 8+3\cdot(-5).$$

Upravím a

$$-7 = -7.$$

Hodnoty vyhovujú aj tejto rovnici.

U: Sústava má riešenie a to $t = -1$ a $s = -5$.

Ž: *Existuje preto aj priesečník. Stačí dosadiť $t = -1$ do parametrických rovníc priamky $\overleftrightarrow{AB}$. Priesečník má súradnice:*

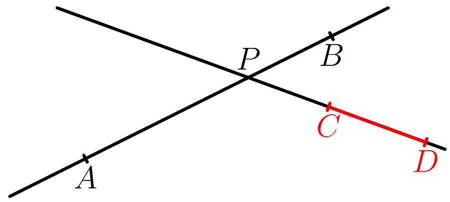
$$x = -3+4\cdot(-1) = -7$$
$$y = -5-3\cdot(-1) = -2$$
$$z = 1-(-1) = 2.$$

Súradnice sú $P[-7;-2;2]$.

U: Moment! Ak by išlo o priesečník ***priamok*** $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$, nemám námietky. Opäť si však zabudol, že máme nie priamku, ale ***úsečku*** CD!

Ž: *To mení situáciu?*

U: Samozrejme. Dve priamky môžu mať priesečník, ale priamka a úsečka nemusia mať. Pozri si napr. tento obrázok.



Ž: *Aha. To som si neuvedomil. Ako to ale teraz zistím?*

U: Pozrime sa na hodnoty parametrov, ktoré sme dostali. $t = -1$ a $s = -5$. S priamkou $\overleftrightarrow{AB}$ nie je problém. Parameter $t \in \mathbb{R}$, bod P patrí priamke $\overleftrightarrow{AB}$.

Ž: *Dôležité bude ohraničenie parametra s, ktoré som na začiatku aj tak zabudol. Aby to bola úsečka CD, parameter $s \in \langle 0; 1 \rangle$. Pre bod P sa $s = -5$, preto leží už mimo úsečky CD.*

U: Správne. priamky $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$ sa pretínajú v bode P. Ale priamka $\overleftrightarrow{AB}$ a úsečka CD sa ***nepretínajú***.

Úloha 1: *Dané sú body $A[3; 2; 1]$, $B[-5; -10; 5]$, $C[4; 7; -3]$, $D[3; 5; -2]$. Určte priesečník, ak existuje, úsečky AB a priamky $\overleftrightarrow{CD}$.*

Výsledok: $P[-3; -7; 4]$

Príklad 5: *Označme Q priesečník priamok*
p: $x = 1 + t$, $y = -2t$, $z = -2 + 3t$; $t \in \mathbb{R}$ a
q: $x = 1 + 2s$, $y = -2 - 6s$, $z = 3 + 11s$; $s \in \mathbb{R}$.
Určte vzdialenosť bodu Q od začiatku sústavy súradníc.

Ž: *Ak tomu dobre rozumiem, najprv budem musieť určiť priesečník týchto dvoch priamok.*

U: Máš na mysli zadané priamky p a q. Áno. Potrebujeme určiť súradnice ich priesečníka.

Ž: *Tak sa do toho pustím. Dúfam len, že priamky sú rôznobežné. Teda, že ten priesečník naozaj existuje.*

U: Nechceš si to overiť?

Ž: *Ak mám povedať pravdu, ani nie. Ak nemusím, nechce sa mi zaoberať sa vektormi, tuším smerovými.*

U: Áno, išlo by o smerové vektory priamok. Priamky máme dané v priestore parametricky. Ale nie je nutné sa zaoberať smerovými vektormi. Zbežným pohľadom sa dá zistiť, že smerové vektory priamok nie sú lineárne závislé. To však neznamená, že priamky sú rôznobežné.

Ž: *Sme v priestore. Priamky môžu byť rôznobežné alebo aj mimobežné.*

U: Áno. Či existuje práve jeden priesečník, aj tak odhalí len riešenie sústavy rovníc.

Ž: *Dobre. Dám sa do toho. Priesečník nájdem tak, že porovnám parametrické rovnice oboch priamok:*

$$\begin{aligned} 1 + t &= 1 + 2s \\ -2t &= -2 - 6s \\ -2 + 3t &= 3 + 11s. \end{aligned}$$

U: Je to sústava troch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi. Vyberieme si dve rovnice a pomocou nich nájdeme hodnoty pre t a s.

Ž: *Vyberiem si prvú a druhú rovnicu:*

$$\begin{aligned} 1 + t &= 1 + 2s \\ -2t &= -2 - 6s. \end{aligned}$$

Prvú rovnicu vynásobím číslom 2 a sčítam ich. Vypadne mi t. Dostávam rovnicu:

$$2 = -2s.$$

Odtiaľ už ľahko mám

$$s = -1.$$

U: Išlo ti to skvele. Pokračujme druhou neznámou.

Ž: *Stačí dosadiť $s = -1$ napr. do prvej rovnice a mám*

$$1 + t = 1 + 2 \cdot (-1).$$

Čo znamená, že

$$t = -2.$$

U: Výborne. Hodnoty, ktoré sme takto dostali, $t = -2$, $s = -1$, dosadíme do tretej rovnice, ktorú sme zatiaľ nepoužili. Slúži ako skúška správnosti. Ak bude platiť rovnosť, priamky majú práve jeden priesečník.

Ž: *Dosadzujem:*

$$-2 + 3 \cdot (-2) = 3 + 11 \cdot (-1).$$

Upravím a

$$-8 = -8.$$

Hodnoty vyhovujú aj tejto rovnici.

U: Sústava má práve jedno riešenie a to $t = -2$ a $s = -1$. Existuje preto aj priesečník priamok p a q. Stačí dosadiť napr. $t = -2$ do parametrických rovníc priamky p.

Ž: *Dosadzujem:*

$$x = 1 + (-2) = -1$$
$$y = -2 \cdot (-2) = 4$$
$$z = -2 + 3 \cdot (-2) = -8.$$

Súradnice priesečníka priamok p a q sú $Q[-1; 4; -8]$.

U: Výborne. Ostáva nám určiť vzdialenosť bodu Q od začiatku sústavy súradníc.

Ž: *Začiatok sústavy súradníc? To je bod z ktorého vychádzajú všetky tri osi.*

U: To nie je celkom správne vyjadrenie. Začiatok sústavy súradníc je priesečník všetkých troch osí.

Ž: *Tak som to myslel. Má všetky súradnice nulové.*

U: Áno. Začiatok sústavy súradníc je bod $O[0; 0; 0]$.

Ž: *Na určenie vzdialenosti dvoch bodov bol nejaký vzorček. Nejaká druhá odmocnina a súradnice sa odčítavali, alebo niečo také. Nepamätám sa.*

U: Dúfal som, že tento základný vzorec ti zostane v pamäti. Pripomeniem ti ho. Vzdialenosť dvoch bodov A a B vypočítame podľa vzorca:

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Ž: *Aha! Spomínam si! Pre body Q a O bude vzorec vyzerať nasledovne:*

$$|QO| = \sqrt{(o_1 - q_1)^2 + (o_2 - q_2)^2 + (o_3 - q_3)^2}.$$

Stačí len dosadiť súradnice:

$$|QO| = \sqrt{(0+1)^2 + (0-4)^2 + (0+8)^2}$$

$$|QO| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{81} = 9.$$

U: Vzdialenosť bodu Q, priesečníka priamok p a q, od začiatku sústavy súradníc je 9.