# Vzájomná poloha dvoch rovín

***RNDr. Viera Vodičková***

**U**: Začneme s opakovaním. Aká môže byť vzájomná poloha dvoch rovín?

**Ž**: *Roviny môžu byť rovnobežné alebo rôznobežné.*

**U**: V rámci rovnobežnosti rozlišujeme rovnobežné rôzne a rovnobežné totožné roviny. Na základe čoho takto klasifikujeme vzájomnú polohu rovín?

**Ž**: *Myslím, že na základe prieniku rovín, čiže na základe počtu ich spoločných bodov.*

**U**: Aký prienik môžu mať dve roviny?

**Ž**: *Jedna možnosť je, že dve roviny nemajú žiaden spoločný bod, potom môžu mať spoločný práve jeden bod... Moment! To je hlúposť, taká situácia nemôže nastať.*

**U**: Skoro som sa zľakol.

**Ž**: *Dve roviny môžu mať spoločnú priamku, no a potom už len celú rovinu.*

**U**: Správne.

- Ak prienikom dvoch rovín je prázdna množina (roviny nemajú spoločný bod), roviny sú ***rovnobežné rôzne***.
- Ak prienikom dvoch rovín je celá rovina, roviny sú ***rovnobežné totožné***.
- Ak prienikom dvoch rovín je priamka, roviny sú ***rôznobežné***.

---

**U**: Budeme skúmať vzájomnú polohu rovín z analytického hľadiska.

**Ž**: *Nie celkom tomu rozumiem.*

**U**: V analytickej geometrii nemáme roviny narysované, ale dané pomocou rovníc. Z rovníc rovín musíme vedieť určiť, či sú rovnobežné alebo rôznobežné.

**Ž**: *Pochopil som. Budeme pracovať len s rovnicami rovín.*

**U**: Presne tak. Akou rovnicou vieme vyjadriť rovinu?

**Ž**: *Rovinu môžeme vyjadriť parametricky alebo všeobecnou rovnicou.*

**U**: Iste vieš, že parametrické rovnice roviny sú v podstate tri, vystupujú v nich dva smerové vektory a teda aj dva parametre. Naproti tomu všeobecná rovnica roviny je len jedna rovnica. Určite uznáš, že sa s ňou pracuje jednoduchšie. Sústredíme sa preto len na roviny dané všeobecnou rovnicou. V prípade, že by predsa bola niektorá rovina zadaná parametricky, mal by si už vedieť prepísať parametrické rovnice tejto roviny na rovnicu všeobecnú.

---

**U**: Pozrieme sa na vzájomnú polohu dvoch rovín daných ***všeobecnou rovnicou***.

**Ž**: *Zo všeobecných rovníc vieme určiť normálové vektory rovín. Normálový vektor je vektor kolmý na rovinu.*

**U**: Správne.
Majme dané dve roviny $\alpha$ a $\beta$. Nech tieto roviny majú všeobecné rovnice:

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

a

$$\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

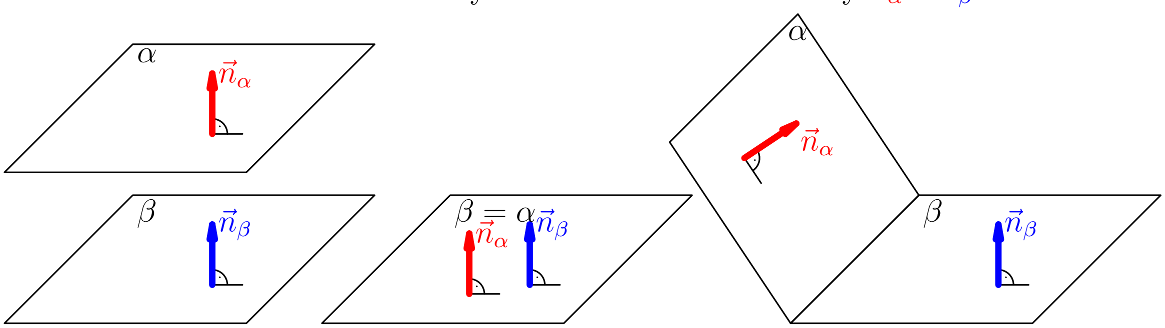
kde $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$, pričom aspoň jedno z čísel $a_1, b_1, c_1$ je rôzne od nuly a aspoň jedno z čísel $a_2, b_2, c_2$ je rôzne od nuly. Ich normálové vektory označme ako $\vec{n}_\alpha$ - to bude pre rovinu $\alpha$ a $\vec{n}_\beta$ pre rovinu $\beta$. Aké súradnice budú mať normálové vektory rovín?

**Ž**: *Súradnice normálového vektora sú čísla stojace pri $x, y, z$, preto*

$$\vec{n}_\alpha = (a_1; b_1; c_1),$$

$$\vec{n}_\beta = (a_2; b_2; c_2).$$

**U**: Nakreslime si tri obrázky, na ktorých budú roviny $\alpha$ a $\beta$ postupne rovnobežné, rovnobežné totožné a rôznobežné. Farebne si vyznačíme normálové vektory $\vec{n}_\alpha$ a $\vec{n}_\beta$.




Na obrázkoch budeme skúmať ako súvisí vzájomná poloha rovín s umiestnením normálových vektorov jednotlivých rovín.

---

**Ž**: *Na druhom obrázku, kde sú roviny totožné, sa dajú normálové vektory premiestniť na jednu priamku. Normálové vektory rovín $\alpha$ a $\beta$ sú totiž rovnobežné.*

**U**: Výborne. Čo to znamená?

**Ž**: *No, kľudne by mohli mať roviny $\alpha$ a $\beta$ ten istý normálový vektor. Čiže mohlo by platiť:*

$$\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta.$$

**U**: Alebo vektor $\vec{n}_\alpha$ môže byť aj nenulovým násobkom vektora $\vec{n}_\beta$:

$$\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Inými slovami vektory $\vec{n}_\alpha$ a $\vec{n}_\beta$ sú lineárne závislé.
Pozrime sa teraz na prvý obrázok. Na rovnobežné roviny. Nie sú aj v tomto prípade normálové vektory lineárne závislé?

**Ž**: *No... vlastne aj v tomto prípade ich môžeme umiestniť na jednu priamku.*

**U**: Presne tak. Znamená to, že ***ak sú roviny rovnobežné, ich normálové vektory sú lineárne závislé***.

**Ž**: *Ako ale odlíšime, či sú totožné alebo rôzne?*

**U**: Tak napríklad stačí overiť, či aspoň jeden bod patriaci rovine $\alpha$ patrí aj rovine $\beta$.

**Ž**: *Aha! Ak budú mať aspoň jeden spoločný bod, tak už musia byť totožné.*

**U**: Dá sa to však zistiť aj ináč. Jednoduchšie. Vieme už, že normálové vektory sú lineárne závislé. Platí:

$$\exists k \in \mathbb{R} : \vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta.$$

Poznáme súradnice jednotlivých normálových vektorov. Zapíšme, čo potom platí o týchto súradniciach.

**Ž**: *Súradnice normálových vektorov sú*

$$\vec{n}_\alpha = (a_1; b_1; c_1),$$

$$\vec{n}_\beta = (a_2; b_2; c_2).$$

*Nakoľko*

$$\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta,$$

*pre súradnice musí platiť*

$$a_1 = ka_2, \quad b_1 = kb_2, \quad c_1 = kc_2.$$

**U**: Presne tak. Všimneme si rovnice oboch rovín

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Vyzerá to tak, že celá rovnica roviny $\alpha$ by mohla byť $k$-násobkom roviny $\beta$.

**Ž**: *Pri koeficientoch $a, b, c$ to platí, ostáva posledný koeficient $d$.*

**U**: A presne ten rozhodne o tom, či rovnica roviny $\alpha$ je $k$-násobkom roviny $\beta$. Ak navyše platí

$$d_1 = kd_2,$$

roviny $\alpha$ a $\beta$ sú totožné. Inak sú rovnobežné, ale rôzne.
Ostal nám prípad rôznobežných rovín.

**Ž**: *To je už z obrázka jasné. Ak sú roviny rôznobežné, ich normálové vektory by sme ťažko umiestnili na jednu priamku.*

**U**: Je to dokonca nemožné. ***Normálové vektory rôznobežných rovín sú*** lineárne nezávislé.

**U**: Zhrnieme si to. Máme rovinu $\alpha$ danú všeobecnou rovnicou

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

a rovinu $\beta$ danú všeobecnou rovnicou

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Ak sú normálové vektory $\vec{n}_\alpha$ a $\vec{n}_\beta$ lineárne závislé, roviny $\alpha$ a $\beta$ sú rovnobežné.

**Ž**: *V prípade, že platí aj*

$$d_2 = kd_2,$$

*sú roviny totožné. Inak sú rovnobežné rôzne.*

**U**: Ak sú normálové vektory $\vec{n}_\alpha$ a $\vec{n}_\beta$ lineárne nezávislé, roviny $\alpha$ a $\beta$ sú rôznobežné.

***Vzájomná poloha dvoch rovín***

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

- $\exists k \in \mathbb{R} : \vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta \wedge d_1 = kd_2 \Rightarrow \alpha \parallel \beta \wedge \alpha = \beta$
- $\exists k \in \mathbb{R} : \vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta \wedge d_1 \neq kd_2 \Rightarrow \alpha \parallel \beta \wedge \alpha \neq \beta$
- $\forall k \in \mathbb{R} : \vec{n}_\alpha \neq k\vec{n}_\beta \Rightarrow \alpha \nparallel \beta$

---

**U**: Na záver jedna poznámka. Ak sú roviny $\alpha$ a $\beta$ rôznobežné, ich prienikom je priamka. Ako túto priamku nájdeme?

**Ž**: *To bude asi podobné ako pri hľadaní prieniku dvoch priamok. Zoberieme sústavu dvoch rovníc oboch rovín a vyriešime ju.*

**U**: Také jednoduché to zase nebude. Spomínaná sústava vyzerá takto:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Koľko má neznámych?

**Ž**: *Tri, $x, y, z$. Aha. Ale rovnice sú len dve. To nebude jedno riešenie.*

**U**: Jedno riešenie ani neočakávame. Dohodli sme sa predsa, že prienikom dvoch rovín nemôže byť práve jeden bod! Prienikom dvoch rôznobežných rovín je priamka a my potrebujeme nájsť jej parametrické vyjadrenie. To však uvidíš až v príkladoch. Chcel som ti len ukázať, že ***priamku v priestore možno vyjadriť aj pomocou sústavy dvoch všeobecných rovníc***. Sú to rovnice rovín, ktorých je priesečnicou. Je to akási náhrada všeobecnej rovnice priamky v priestore.

**Príklad 1**: *Určte vzájomnú polohu rovín $\alpha$ a $\beta$, ktorých analytické vyjadrenie je takéto:*
$\alpha: 2x - 3y + z - 4 = 0,$
$\beta: -4x + 6y - 2z + 5 = 0.$

**Ž**: *Máme určiť vzájomnú polohu dvoch rovín...*

**U**: Zopakujme si najprv, aká môže byť vzájomná poloha dvoch rovín!

**Ž**: *Dve roviny môžu byť rovnobežné alebo rôznobežné. Ak sú rovnobežné, môžu byť aj totožné.*

**U**: Áno. Vzájomná poloha závisí od ich prieniku. Prienikom rovnobežných rovín je prázdna množina, prienikom totožných rovín je celá rovina.

**Ž**: *A prienikom rôznobežných rovín je zase priamka.*

**U**: Súhlasím. Ako z analytického vyjadrenia rovín zistíme ich vzájomnú polohu?

**Ž**: *Viem, že to súvisí s porovnávaním vektorov. Roviny sú dané všeobecnou rovnicou, tak pôjde o porovnanie normálových vektorov oboch rovín.*

**U**: Správne. Určme si súradnice normálových vektorov rovín.

**Ž**: *Dobre. Súradnice normálových vektorov ľahko prečítam zo všeobecných rovníc. Sú to čísla stojace pri $x, y, z$. Normálové vektory rovín $\alpha$ a $\beta$ majú súradnice:*

$$\vec{n}_\alpha = (2; -3; 1)$$

$$\vec{n}_\beta = (-4; 6; -2).$$

**U**: Výborne. Teraz potrebujeme určiť, či tieto normálové vektory sú lineárne závislé.

**Ž**: *Hm... či jeden je násobkom druhého? Na prvý pohľad vidno, že áno. Ak normálový vektor roviny $\alpha$ vynásobíme číslom $(-2)$, dostaneme normálový vektor roviny $\beta$.*

**U**: Áno, platí:

$$\vec{n}_\beta = -2\vec{n}_\alpha.$$

**Ž**: *Normálové vektory sú lineárne závislé.*

**U**: Roviny $\alpha$ a $\beta$ sú rovnobežné.

---

**U**: Potrebujeme ešte zistiť, či sú rôzne alebo totožné.

**Ž**: *Ak sú rôzne nemajú žiadne spoločné body a ak sú totožné, majú spoločné všetky body.*

**U**: To môžeme využiť. Vyskúšame, či jeden bod z roviny $\alpha$ patrí aj rovine $\beta$.

**Ž**: *To bude stačiť? Nemali by sme preveriť všetky body?*

**U**: Nezabúdaj, že už vieme, že roviny sú rovnobežné. Preto, ak majú spoločný jeden bod, musia byť totožné. Naopak, ak nejaký vybraný bod z jednej roviny nebude ich spoločný, musia byť rovnobežné rôzne.

**Ž**: *Dobre. Vyberiem si jeden bod patriaci rovine $\alpha$, nazvem ho $A$. No... vo všeobecnej rovnici sa nedá len tak ľahko nájsť!*

**U**: Nie je to žiadny problém. V rovnici máme tri neznáme, $x, y, z$. Dve si zvolíme a tretiu dopočítame podľa rovnice.

**Ž**: *Dobre. Tu je všeobecná rovnica roviny* $\alpha$

$$2x - 3y + z - 4 = 0.$$

*Zvolím si napr.* $x = 1$ *a* $y = 2$.

**U**: Môžeš si zvoliť ľubovoľne, to je pravda. Prečo si si nezvolil napr. $x = 153$ a $y = -28$?

**Ž**: *Kto by počítal s takými číslami?*

**U**: Práve o to ide. Ak si môžeme vybrať, snažíme sa zvoliť si také čísla, aby sa nám s nimi čo najľahšie počítalo. Navrhujem zobrať $x = 0$ a $y = 0$.

**Ž**: *Ďakujem. Po dosadení do všeobecnej rovnice roviny* $\alpha$ *dostávame:*

$$z - 4 = 0.$$

*Z čoho máme tretiu súradnicu* $z = 4$. *Bod* $A$ *patriaci rovine* $\alpha$ *má súradnice*

$$A[0; 0; 4]$$

**U**: Teraz zistíme, či bod $A$ patrí aj rovine $\beta$. Ak jej patrí, musia jeho súradnice vyhovovať všeobecnej rovnici roviny $\beta$.

**Ž**: *Do všeobecnej rovnice roviny* $\beta$

$$-4x + 6y - 2z + 5 = 0$$

*dosadím súradnice bodu* $A$*:*

$$\begin{aligned} -4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 2 \cdot 4 + 5 &= 0 \\ -3 &= 0. \end{aligned}$$

*Rovnosť neplatí. Bod* $A$ *nepatrí rovine* $\beta$. **Roviny $\alpha$ a $\beta$ sú rovnobežné rôzne.**

---

**U**: Výborne. K tomuto riešeniu sme však mohli dôjsť aj rýchlejšie. Ak sú roviny totožné, môžeme povedať, že je to vlastne tá istá rovina.

**Ž**: *To je pravda.*

**U**: Koľko všeobecných rovníc môže mať jedna rovina?

**Ž**: *No predsa jednu! Moment! Jedna rovina môže mať nekonečne veľa všeobecných rovníc. Aj hocijaký násobok rovnice predstavuje danú rovinu.*

**U**: Áno. Každý nenulový násobok všeobecnej rovnice roviny predstavuje tiež jej všeobecnú rovnicu. Takže, ak sú roviny totožné, musí byť rovnica roviny $\beta$ nenulovým násobkom rovnice roviny $\alpha$. Všimneme si rovnice oboch rovín

$$\alpha : 2x - 3y + z - 4 = 0$$

$$\beta : -4x + 6y - 2z + 5 = 0.$$

**Ž**: *Vyzerá to tak, že celá rovnica roviny* $\beta$ *by mohla byť* $(-2)$*-násobkom rovnice roviny* $\alpha$.

**U**: Pri koeficientoch $a, b, c$ to platí. Ak sa pamätáš, zistili sme, že

$$\vec{n}_\beta = -2\vec{n}_\alpha.$$

**Ž**: *Ostáva posledný koeficient $d$.*

**U**: A presne ten rozhodne o tom, či rovnica roviny $\beta$ je $(-2)$-násobkom rovnice roviny $\alpha$.

**Ž**: *Vidím, že nie, pretože $5 \neq -2 \cdot (-4)$. Roviny nie sú totožné. Zhrniem to teda. Ak som zistil, že normálový vektor roviny $\beta$ je $(-2)$ násobkom normálového vektora roviny $\alpha$, stačí mi pozrieť sa na celé rovnice. Ak po vynásobení rovnice roviny $\alpha$ číslom $(-2)$ dostanem rovnicu roviny $\beta$, roviny sú totožné. Ak nie, roviny sú rovnobežné a rôzne. A je to hotovo.*

**U**: Vystihol si to presne.

---

**Úloha 1**: *Určte vzájomnú polohu rovín $\alpha$ a $\beta$, ktorých analytické vyjadrenie je takéto:*
$\alpha : 3x - 6y + 9z - 3 = 0,$
$\beta : 5x - 10y + 15z - 5 = 0.$

**Výsledok**: roviny sú totožné

**Príklad 2**: *Určte vzájomnú polohu rovín $\alpha$ a $\beta$, ktorých analytické vyjadrenie je takéto:*
$\alpha: 2x - 3y + z - 4 = 0$,
$\beta: x + 2y - z + 1 = 0$.

**Ž**: *Máme určiť vzájomnú polohu dvoch rovín. Pokiaľ viem, roviny môžu byť rovnobežné, rôznobežné alebo totožné.*

**U**: Áno. Aj keď totožné roviny zahŕňame tiež pod prípad rovnobežných rovín. Ako určíme vzájomnú polohu dvoch rovín na základe ich analytického vyjadrenia?

**Ž**: *Analytické vyjadrenie - to myslíte rovnice?*

**U**: Samozrejme.

**Ž**: *Roviny sú dané všeobecnými rovnicami. Pamätám sa, že to súviselo s porovnávaním vektorov. Asi normálových vektorov.*

**U**: Správne. Určme si súradnice normálových vektorov rovín.

**Ž**: *Dobre. Súradnice normálových vektorov ľahko prečítam zo všeobecných rovníc. Sú to koeficienty pri $x$, $y$ a $z$. Normálové vektory rovín $\alpha$ a $\beta$ majú nasledovné súradnice:*

$$\vec{n}_\alpha = (2; -3; 1),$$

$$\vec{n}_\beta = (1; 2; -1).$$

**U**: Výborne. Teraz potrebujeme určiť, či normálové vektory sú lineárne závislé.

**Ž**: *Teda, či jeden je násobkom druhého? Povedal by som, že nie.*

**U**: Vedel by si to aj zdôvodniť?

**Ž**: *No, však to vidno. 1 krát 2 je 2, ale 2 krát 2 nie je $-3$.*

**U**: Predpokladám, že si násobil najprv prvé súradnice oboch vektorov a potom aj druhé. Tam ti to už neplatilo. Máš, samozrejme, pravdu. Niekedy je však dobré vedieť si to aj zapísať. Tak to skúsime. Predpokladajme, že vektory $\vec{n}_\alpha$ a $\vec{n}_\beta$ sú lineárne závislé. Znamená to, že existuje také číslo $k \in \mathbb{R}$, že platí:

$$\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta.$$

Môžeme písať:

$$(2; -3; 1) = k(1; 2; -1).$$

**Ž**: *To by znamenalo, že*

$$2 = k \ \wedge \ -3 = 2k \ \wedge \ 1 = -k.$$

*Z prvého máme $k = 2$, ako som hovoril. Z druhého $k = -\frac{3}{2}$. A na tretie sa už nemusím ani pozerať.*

**U**: Súhlasím. Nakoľko hodnoty $k$ nie sú rovnaké, vektor $\vec{n}_\alpha$ nie je násobkom vektora $\vec{n}_\beta$.

**Ž**: *Normálové vektory rovín nie sú lineárne závislé. Roviny $\alpha$ a $\beta$ sú* **rôznobežné**.

**Úloha 1**: *Určte vzájomnú polohu rovín $\alpha$ a $\beta$, ktorých analytické vyjadrenie je takéto:*
$\alpha : 3x - 3y - 5z + 1 = 0,$
$\beta : x - y - z - 1 = 0.$

**Výsledok**: roviny sú rôznobežné

**Príklad 3**: *Určte vzájomnú polohu rovín $\alpha$ a $\beta$, ktorých analytické vyjadrenie je takéto:*
$\alpha : 2x - 3y + z - 4 = 0,$
$\beta$*:* $x = 1 - r + 3s,\ y = 7 + 2r - s,\ z = -3 - r + s;\ r, s \in \mathbb{R}.$

**Ž**: *Vidím, že rovina $\beta$ je daná parametrickými rovnicami! Zatiaľ viem určiť vzájomú polohu rovín len pomocou ich všeobecných rovníc.*

**U**: Nemal by byť pre teba problém napísať všeobecnú rovnicu roviny, ak poznáš jej parametrické vyjadrenie.

**Ž**: *Snáď to zvládnem.*

**U**: Tvojou úlohou bude odstrániť z rovníc parametre.

**Ž**: *Dobre. Mám parametrické rovnice*

$$x = 1 - r + 3s$$
$$y = 7 + 2r - s$$
$$z = -3 - r + s, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

*Najprv si z jednej rovnice vyjadrím parameter $r$ a dosadím ho do zvyšných dvoch rovníc.*

**U**: S tým súhlasím.

**Ž**: *Vybral som si prvú rovnicu*

$$x = 1 - r + 3s.$$

*Vyjadrím si z nej parameter $r$:*

$$r = 1 + 3s - x.$$

**U**: Výborne. Toto vyjadrenie dosadíme do zvyšných rovníc.

**Ž**: *Dostávame už len dve rovnice s jedným parametrom $s$:*

$$y = 7 + 2(1 + 3s - x) - s$$
$$z = -3 - (1 + 3s - x) + s.$$

**U**: Navrhujem rovnice ešte trochu upraviť.

**Ž**: *Dobre. Upravím pravé strany. Odstránim zátvorky a sčítam, čo sa dá. Dostanem tieto rovnice:*

$$y = 9 - 2x + 5s$$
$$z = -4 + x - 2s.$$

**U**: Parameter $s$ odstránime použitím sčítacej metódy.

**Ž**: *Rozumiem. Prvú rovnicu vynásobím dvoma a druhú piatimi. Potom ich sčítam. Dostanem rovnicu*

$$2y + 5z = 18 - 20 - 4x + 5x.$$

*Upravím ju a máme rovinu vyjadrenú všeobecnou rovnicou*

$$x - 2y - 5z - 2 = 0.$$

$$\begin{array}{rl} y = 9 - 2x + 5s & / \cdot 2 \\ z = -4 + x - 2s & / \cdot 5 \\ \hline 2y + 5z = 18 - 20 - 4x + 5x & \end{array}$$

$$x - 2y - 5z - 2 = 0$$

---

**U**: To si zvládol. Máme dve roviny dané, teraz už, všeobecnými rovnicami.

$$\alpha : 2x - 3y + z - 4 = 0,$$

$$\beta : x - 2y - 5z - 2 = 0.$$

Ako určíme ich vzájomnú polohu?

**Ž**: *Budeme porovnávať normálové vektory.*

**U**: Správne. Určme si súradnice normálových vektorov rovín.

**Ž**: *Dobre. Súradnice normálových vektorov ľahko prečítam zo všeobecných rovníc. Sú to koeficienty pri $x$, $y$ a $z$. Normálové vektory rovín $\alpha$ a $\beta$ majú súradnice:*

$$\vec{n}_\alpha = (2; -3; 1),$$

$$\vec{n}_\beta = (1; -2; -5).$$

**U**: Výborne. Teraz potrebujeme určiť, či normálové vektory sú lineárne závislé.

**Ž**: *Teda, či jeden je násobkom druhého? Povedal by som, že nie.*

**U**: Vedel by si to aj zdôvodniť?

**Ž**: *No, však to vidno.*

**U**: Máš, samozrejme pravdu. Niekedy je však dobré vedieť si to aj zapísať. Tak to skúsime. Predpokladajme, že vektory $\vec{n}_\alpha$ a $\vec{n}_\beta$ sú lineárne závislé. Znamená to, že existuje také číslo $k \in \mathbb{R}$, že platí:

$$\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta.$$

Môžeme písať:

$$(2; -3; 1) = k(1; -2; -5).$$

**Ž**: *To by znamenalo, že*

$$2 = k \ \wedge \ -3 = -2k \ \wedge \ 1 = -5k.$$

*Z prvého máme $k = 2$. Z druhého $k = \frac{3}{2}$. A na tretie sa už nemusím ani pozerať.*

**U**: Súhlasím. Nakoľko hodnoty $k$ nie sú rovnaké, vektor $\vec{n}_\alpha$ nie je násobkom vektora $\vec{n}_\beta$.

**Ž**: *Normálové vektory rovín nie sú lineárne závislé. Roviny $\alpha$ a $\beta$ sú* **rôznobežné**.

---

**Úloha 1**: *Určte vzájomnú polohu rovín $\alpha$ a $\beta$, ktorých analytické vyjadrenie je takéto:*
$\alpha : x = 2 + 3u - v,\ y = 1 - 9u + v,\ z = -3 - 12u - 2v;\ u, v \in \mathbb{R}$,
$\beta$: $x = 1 - 2r + s,\ y = 2r - 3s,\ z = 2 - 4r - 4s;\ r, s \in \mathbb{R}$.

**Výsledok**: roviny sú rovnobežné rôzne

**Príklad 4**: *Určte hodnoty parametrov $a, b$ tak, aby roviny*
$\alpha : x + by + z - 7 = 0$ *a* $\beta : ax + 4y - z + 3 = 0$
*boli*

*(a) rovnobežné,*

*(b) rôznobežné.*

**U**: Prečítal si si zadanie, tak mi povedz, čo si sa z neho dozvedel.

**Ž**: *No... Sú tam parametre, ktoré sa mi veľmi nepáčia.*

**U**: To sú subjektívne pocity.

**Ž**: *Dobre. Prejdem na fakty. Máme dve roviny dané všeobecnými rovnicami. Znamená to, že poznáme súradnice ich normálových vektorov. A máme určiť, kedy budú roviny rovnobežné a kedy rôznobežné. O totožných sa nepíše nič.*

**U**: To bolo výstižné zhodnotenie situácie. Pomôžu nám normálové vektory rovín pri určení ich vzájomnej polohy?

**Ž**: *Myslím, že áno. Pamätám si, že vzájomnú polohu dvoch rovín môžeme určiť porovnaním normálových vektorov.*

**U**: Porovnaním - to myslíš, či sú vektory lineárne závislé, alebo nie?

**Ž**: *Áno, tak som to myslel. Ak budú normálové vektory lineárne závislé, roviny budú rovnobežné. A ak budú lineárne nezávislé, roviny budú rôznobežné.*

**U**: Správne. Určme si súradnice normálových vektorov rovín.

**Ž**: *Dobre. Súradnice normálových vektorov ľahko prečítam zo všeobecných rovníc. (Aj keď sú tam tie parametre.) Sú to koeficienty pri $x$, $y$ a $z$. Normálové vektory rovín $\alpha$ a $\beta$ majú súradnice:*

$$\vec{n}_\alpha = (1; b; 1)$$

$$\vec{n}_\beta = (a; 4; -1).$$

**U**: Výborne. Začneme s rovnobežnými rovinami. Aby boli roviny $\alpha$ a $\beta$ rovnobežné, musia byť ich normálové vektory lineárne závislé.

**Ž**: *Teda, jeden je násobkom druhého.*

**U**: Áno. Znamená to, že existuje také číslo $k \in \mathbb{R}$, že platí:

$$\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta.$$

**Ž**: *Môžeme písať:*

$$(1; b; 1) = k(a; 4; -1).$$

*To by znamenalo, že*

$$1 = k \cdot a \;\wedge\; b = 4k \;\wedge\; 1 = -k.$$

*Z tretej podmienky máme $k = -1$.*

---

**U**: Výborne. Aby boli vektory lineárne závislé, musia byť hodnoty $k$ rovnaké vo všetkých troch vzťahoch. To nám umožní vypočítať hodnoty parametrov $a$ a $b$.

**Ž**: *Dosadím $k = -1$ do prvého a druhého vzťahu. Z prvého dostávam*

$$a = -1.$$

*Z druhého máme*

$$b = -4.$$

**U**: Súhlasím. ***Roviny $\alpha$ a $\beta$ budú rovnobežné, ak parameter $a = -1$ a zároveň parameter $b = -4$.***

**Ž**: *Rôznobežné roviny, to už bude hračka. Normálové vektory musia byť lineárne nezávislé. Preto $a \neq -1$ a zároveň $b \neq -4$.*

**U**: Trochu spomaľ. Normálové vektory musia byť lineárne nezávislé. To znamená, že neplatí, že $a = -1$ a zároveň $b = -4$.

**Ž**: *Však ja som povedal to isté!*

**U**: To teda nie! Hovorí ti niečo negácia výroku? Normálové vektory sú lineárne závislé, ak $a = -1$ ***a zároveň*** $b = -4$. Negáciou tohto výroku je výrok: Normálové vektory sú lineárne nezávislé, ak $a \neq -1$ alebo $b \neq -4$. Stačí aby jedna podmienka neplatila.

**Ž**: *Aha! Už si spomínam, poplietol som to. Namiesto „a zároveň“ som mal použiť „alebo“.*

**U**: Nenazval by som to popletením. Dôležité je, aby si tomu rozumel.

**Ž**: *Tak to zopakujem.* **Roviny $\alpha$ a $\beta$ budú rôznobežné, ak parameter $a \neq -1$ alebo parameter $b \neq -4$.**

**Príklad 5**: *Určte analytické vyjadrenie útvaru, ktorý je prienikom rovín* $\alpha: x + 2y - 2z - 1 = 0$ *a* $\beta: x - y + z + 1 = 0$.

**Ž**: *Prienik rovín? To potom musia byť roviny rôznobežné. Ich prienikom bude priamka.*

**U**: Vedel by si aj overiť, či sú rôznobežné?

**Ž**: *Áno. Pozriem sa na ich normálové vektory. Normálový vektor roviny* $\alpha$ *má súradnice*

$$\vec{n}_\alpha = (1; 2; -2).$$

*Normálový vektor roviny* $\beta$ *má súradnice*

$$\vec{n}_\beta = (1; -1; 1).$$

*Na prvý pohľad vidno, že nie sú lineárne závislé. Roviny sú naozaj rôznobežné.*

**U**: Výborne. Súhlasím aj s tým, že prienikom rôznobežných rovín je priamka. Úlohou je vyjadriť túto priamku analyticky. Aké analytické vyjadrenie môže mať priamka?

**Ž**: *Nakoľko sme v priestore, ostáva nám len parametrické vyjadrenie priamky.*

**U**: Správne. Čo potrebuješ na napísanie parametrického vyjadrenia priamky?

**Ž**: *No, potreboval by som bod, samozrejme patriaci priamke, a smerový vektor priamky.*

**U**: Začnime smerovým vektorom priamky. Čo o ňom vieš?

**Ž**: *Smerový vektor priamky je vektor, ktorý môžeme na danú priamku umiestniť. Neviem si však predstaviť, ako ho získam z rovníc týchto dvoch rovín!*

**U**: Musíme si vystačiť s tým, čo máme. Čo sa teda dá vyčítať z rovníc oboch rovín?

**Ž**: *No predsa už spomínané normálové vektory rovín. Tu sú ich súradnice:*

$$\vec{n}_\alpha = (1; 2; -2)$$

$$\vec{n}_\beta = (1; -1; 1).$$

---

**U**: Dobre. Opäť sa budem pýtať. Akú vlastnosť majú normálové vektory?

**Ž**: *Normálový vektor roviny je kolmý na danú rovinu. To je predsa jasné!*

**U**: Výborne. Označme priesečnicu rovín ako $p$. Venujme sa na chvíľu len rovine $\alpha$. Priesečnica $p$ zrejme leží v rovine $\alpha$. Povedal si, že normálový vektor roviny je na rovinu kolmý.

**Ž**: *Aha. Ak je normálový vektor kolmý na rovinu, tak je kolmý aj na každú priamku ležiacu v danej rovine. Normálový vektor roviny* $\alpha$ *je kolmý na priamku* $p$*!*

**U**: Správne. A teraz sa venujme rovine $\beta$.

**Ž**: *To je také isté. Priamka* $p$ *leží aj v rovine* $\beta$*, preto normálový vektor roviny* $\beta$ *je tiež kolmý na priamku* $p$.

**U**: Tak si to zhrňme. Máme tu dva vektory kolmé na priamku $p$. Sú teda kolmé aj na smerový vektor priamky. Ako ho získame?

**Ž**: *Smerový vektor priamky $p$ je kolmý aj na normálový vektor roviny $\alpha$, aj na normálový vektor roviny $\beta$. Hľadám vektor, kolmý na dva známe vektory... To bude vektorový súčin!*

**U**: Potešil si ma, že si si naňho spomenul! Áno. Smerový vektor priamky $p$ bude vektorovým súčinom normálových vektorov rovín $\alpha$ a $\beta$. Vypočítajme jeho súradnice.

**Ž**: *Dobre. Určím vektorový súčin vektorov $\vec{n}_\alpha$ a $\vec{n}_\beta$. Zapíšem si ich súradnice do zákrytov pod seba, prvý riadok budú súradnice vektora $\vec{n}_\alpha$, teda 1, 2 a −2, pridám ešte raz prvú a druhú súradnicu. Pripíšem 1 a 2. V druhom riadku urobím to isté s vektorom $\vec{n}_\beta$, budú to čísla 1, −1 a 1 a ešte 1 a −1.*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

*A teraz počítam. Prvá súradnica:*

$$2 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) = 2 - 2 = 0.$$

*Druhá súradnica:*

$$-2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -2 - 1 = -3.$$

*A nakoniec tretia súradnica:*

$$1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -1 - 2 = -3.$$

*Smerový vektor priamky $p$ má súradnice*

$$\vec{u}_p = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = (0; -3; -3).$$

---

**U**: Výborne. Smerový vektor priamky už máme. Ostáva nám získať súradnice aspoň jedného bodu priamky.

**Ž**: *Súradnice priesečníka dvoch priamok sme získavali riešením sústavy rovníc. Tu sa to ale nedá, lebo taká sústava má nekonečne veľa riešení...*

**U**: Si na dobrej ceste. Zrejme myslíš sústavu rovníc, pozostávajúcu zo všeobecných rovníc oboch rovín. Tu ju máme

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z - 1 &= 0 \\ x - y + z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Má skutočne nekonečne veľa riešení, sú to súradnice všetkých bodov priamky - priesečnice oboch rovín. Nám však bude stačiť jedno z tohto nekonečného počtu riešení. Ako ho nájdeme?

**Ž**: *To teda naozaj netuším.*

**U**: Nakoľko rovnice sú len dve a neznáme tri, jedna neznáma plní funkciu parametra. Skrátka, hodnotu jednej neznámej si zvolíme a zvyšok dopočítame.

**Ž**: *Aha. Takže napr. si zvolím $z = 0$. (Dúfam, že ste si všimli, že som snažil zvoliť si, čo najjednoduchšie číslo.) Sústava bude potom vyzerať*

$$\begin{aligned} x + 2y - 1 &= 0 \\ x - y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

*Hravo ju vyriešim. Druhú rovnicu vynásobím číslom 2 a rovnice sčítam. Dostávam*

$$3x = -1,$$

*čo znamená, že*

$$x = -\frac{1}{3}.$$

**U**: V poriadku.

**Ž**: *Dopočítam hodnotu $y$. Dosadím $x = -\frac{1}{3}$ napr. do druhej rovnice $x - y + 1 = 0$ a dostávam*

$$y = \frac{2}{3}.$$

*Jeden bod priamky $p$, napr. bod $P$ má súradnice*

$$P[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0].$$

**U**: Výborne. Teraz nám už nič nebráni napísať parametrické vyjadrenie priamky $p$, priesečnice rovín $\alpha$ a $\beta$.

**Ž**: *Mám bod $P[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0]$ a smerový vektor $\vec{u}_p = (0; -3; -3)$. Parametrické vyjadrenie priamky $p$ je*

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{3} \\ y &= \frac{2}{3} - 3t \\ z &= -3t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**U**: Ešte by som rád pripomenul, že parametrických vyjadrení tej istej priamky existuje nekonečne veľa. So susedom môžete mať teda rôzne výsledky.

---

**U**: Ukážeme si ešte iný postup riešenia tohto príkladu. Povedali sme, že prienikom rovín je priamka $p$.

**Ž**: *Áno. A my hľadáme jej parametrické vyjadrenie.*

**U**: Priamka $p$ je priesečnicou rovín $\alpha$ a $\beta$. Znamená to, že všetky body priamky patria aj obidvom rovinám. Hľadáme teda body, ktorých súradnice vyhovujú rovniciam oboch rovín:

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z - 1 &= 0 \\ x - y + z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

**Ž**: *Ale to sme tu už mali. Takú sústavu neviem vyriešiť, rovnice sú len dve a neznáme tri.*

**U**: Sústava má nekonečne veľa riešení, veď jej riešením sú všetky body priamky. A tých je nekonečne veľa. A nie je pravda, že ju nevieme vyriešiť.

**Ž**: *Ako ju mám teda riešiť?*

**U**: Jedna neznáma bude parametrom. Napr. nech $z = t$. Sústava potom vyzerá takto:

$$\begin{aligned} x + 2y - 2t - 1 &= 0 \\ x - y + t + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Skús ju vyriešiť. T. j. vyjadriť neznáme $x$ a $y$ pomocou parametra $t$.

**Ž**: *Pokúsim sa. Druhú rovnicu vynásobím číslom* $(-1)$ *a rovnice sčítam, vypadne mi tak* $x$*. Dostávam:*

$$3y - 3t - 2 = 0.$$

*Odtiaľ vyjadrím* $y$*:*

$$y = \frac{2}{3} + t.$$

**U**: Výborne. Dosadíme to napr. do druhej rovnice a vyjadríme neznámu $x$.

**Ž**: *Dosadzujem:*

$$x - \left(\frac{2}{3} + t\right) + t + 1 = 0.$$

*Po úprave dostávam:*

$$x = -\frac{1}{3}.$$

**U**: Ja to už len zhrniem. Priesečnica rovín má parametrické vyjadrenie:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{3} \\ y &= \frac{2}{3} + t \\ z &= t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Ž**: *Už vidno, že je to iný výsledok ako v prvom riešení.*

**U**: Áno. Parametrických vyjadrení tej istej priamky existuje nekonečne veľa. Ale nie je až také iné. Len namiesto smerového vektora so súradnicami $(0; -3; -3)$ sme použili smerový vektor so súradnicami $(0; 1; 1)$. Vidno, že ide len o násobok pôvodného vektora.

---

**Úloha 1**: *Určte analytické vyjadrenie útvaru, ktorý je prienikom rovín* $\alpha : 2x - y + z + 1 = 0$ *a* $\beta : x + y + 2z - 3 = 0$.

**Výsledok**: napr.

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3} - 3t \\ y &= \frac{7}{3} - 3t \\ z &= 3t, \qquad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$