Všeobecná rovnica roviny

RNDr. Viera Vodičková

U: Analytická geometria narába s geometrickými útvarmi, ako je priamka alebo rovina, pomocou čísel a rovníc. Analyticky vyjadriť rovinu znamená priradiť jej rovnicu.

Ž: *Viem rovinu vyjadriť parametricky, pomocou jej smerových vektorov.*

U: Som rád, že to poznáš. Parametrická rovnica roviny je takáto:

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Ž: *Povedal by som, že sú to skôr parametrické rovnice, veď sú v skutočnosti tri!*

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3, \qquad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

U: Správna pripomienka. Parametrické vyjadrenie roviny v súradniciach, to sú skutočne tri rovnice. Určite uznáš, že s troma rovnicami sa ťažko narába.

Ž: *Je to aj veľa písania... A ani parametre sa mi veľmi nepáčia.*

U: Tak ich odstráňme! Rovina dá vyjadriť aj iným spôsobom - jednou rovnicou, ktorú budeme nazývať ***všeobecná rovnica roviny***. Na konkrétnom príklade si ukážeme ako z parametrických rovníc získame rovnicu všeobecnú.

U: Majme rovinu danú parametricky takto:

$$\begin{aligned} x &= -1 + 3t - s \\ y &= 2 + t \\ z &= 5 + t + s, \qquad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ž: *Asi sa budeme snažiť odstrániť parametre t a s.*

U: Presne tak. Z jednej rovnice si vyjadríme prvý parameter t a dosadíme ho do zvyšných rovníc. V našom prípade je najvhodnejšia druhá rovnica.

Ž: *Áno, všimol som si, že tam chýba parameter s. Skúsim to. Z druhej rovnice*

$$y = 2 + t$$

si vyjadrím t:

$$t = y - 2.$$

U: Toto vyjadrenie dosadíme do zvyšných rovníc. Dostávame už len dve rovnice s jedným parametrom s:

$$\begin{aligned} x &= -1 + 3(y - 2) - s \\ z &= 5 + (y - 2) + s. \end{aligned}$$

Navrhujem rovnice ešte trochu upraviť.

Ž: *Môžem ja? Úpravy výrazov ovládam! Na pravých stranách odstránim zátvorky a sčítam, čo sa dá. Dostaneme tieto rovnice:*

$$x = -7 + 3y - s$$
$$z = 3 + y + s.$$

U: Na odstránenie parametra s použijeme v tomto prípade sčítaciu metódu. Rovnice jednoducho sčítame. Dostávame:

$$x + z = -4 + 4y.$$

Po úprave:

$$x - 4y + z + 4 = 0.$$

Ž: *Vidím, že ste usporiadali všetky členy na ľavú stranu. Podobá sa to na všeobecnú rovnicu priamky. Pribudol len člen so súradnicou z.*

U: Máš pravdu. Rovnica

$$x - 4y + z + 4 = 0,$$

ktorú sme dostali, je ***všeobecná rovnica roviny.*** Zovšeobecnením dostávame definíciu: ***Rovnicu typu*** $ax + by + cz + d = 0$***, kde*** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$***, pričom*** $a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0$***, nazývame všeobecná rovnica roviny.***

Ž: *Všeobecná rovnica roviny vyzerá jednoduchšie ako parametrické rovnice. Prečo však koeficienty a, b, c nemôžu byť nulové?*

U: Môžu byť nulové, ale nesmú byť všetky tri naraz nulové. To hovorí podmienka v definícii. Koeficienty a, b, c sú totiž súradnice jedného vektora, ktorý nemôže byť nulový.

Ž: *Bude to normálový vektor, tak ako pri priamke?*

U: Áno. Koeficienty a, b, c sú súradnice ***normálového vektora roviny***. Označuje sa ako $\vec{n}$ a má súradnice $\vec{n} = (a; b; c)$.

Ž: *Normálový vektor bude tiež na rovinu kolmý?*

U: Áno, preto to nemôže byť nulový vektor. Na našom príklade si ukážeme, že vektor $\vec{n}$ je skutočne na rovinu kolmý. Všeobecná rovnica roviny bola

$$x - 4y + z + 4 = 0.$$

Normalový vektor má teda súradnice $\vec{n} = (1; -4; 1)$. Z pôvodných parametrických rovníc, ktoré máme v rámčeku, by sme mali vedieť určiť súradnice smerových vektorov roviny.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -1 + 3t - s \\ y &= 2 + t \\ z &= 5 + t + s, \qquad t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

Ž: *Smerové vektory roviny sú:*

$$\vec{u} = (3; 1; 1) \quad a \quad \vec{v} = (-1; 0; 1).$$

U: Ak má byť normálový vektor kolmý na rovinu, musí byť kolmý aj na obidva smerové vektory roviny. Ako by sme to mohli overiť?

Ž: *Na kolmosť vektorov môžeme použiť skalárny súčin. Ak je rovný nule, vektory sú na seba kolmé.*

U: Výborne. Tak si to preverme. Vypočítame skalárny súčin vektorov $\vec{n} = (1; -4; 1)$ a $\vec{u} = (3; 1; 1)$:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 \cdot 3 + (-4) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3 - 4 + 1 = 0.$$

Vektory $\vec{n}$ a $\vec{u}$ sú na seba kolmé.

Ž: *Druhú dvojicu overím ja! Vypočítam skalárny súčin vektorov* $\vec{n} = (1; -4; 1)$ *a* $\vec{v} = (-1; 0; 1)$*:*

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-1) + (-4) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -1 + 0 + 1 = 0.$$

Aj vektory $\vec{n}$ *a* $\vec{v}$ *sú na seba kolmé.*

U: Pre tento prípad sme overili, že normálový vektor je kolmý na smerové vektory roviny a teda aj na celú rovinu. Na overenie sme použili skalárny súčin vektorov. Ak však potrebujeme nájsť vektor, ktorý je kolmý na dva iné nenulové vektory, použijeme iný súčin.

Ž: *Máte na mysli vektorový súčin?*

U: Práve ten. Vektorový súčin dvoch vektorov je vektor na ne kolmý. Preto ***normálový vektor roviny*** môžeme dostať ako ***vektorový súčin smerových vektorov***.

U: Koľko má rovina normálových vektorov?

Ž: *Povedal by som, že nekonečne veľa. Každý nenulový násobok normálového vektora je tiež vektor kolmý na rovinu.*

U: Výborne. Preto má aj rovina nekonečne veľa všeobecných rovníc. Každý nenulový násobok všeobecnej rovnice roviny je tiež všeobecná rovnica tej istej roviny.

Všeobecná rovnica roviny

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0$$

normálový vektor : $\vec{n} = (a; b; c)$

U: Už vieme, že rovina je jednoznačne daná bodom a dvoma lineárne nezávislými smerovými vektormi.

Ž: *Áno. Hovorili sme o tom pri parametrickom vyjadrení roviny.*

U: Vektorový súčin týchto smerových vektorov nám dáva normálový vektor roviny. Preto rovina je jednoznačne daná aj bodom a normálovým vektorom.

U: Krátko si povieme ešte niečo o ***polpriestore***. Analytické vyjadrenie polpriestoru totiž súvisí so všeobecnou rovnicou roviny.

Ž: *Polpriestor? To je časť priestoru, ohraničená rovinou?*

U: Presne tak. Zoberme si polpriestor ohraničený rovinou ϱ, ktorej všeobecná rovnica je

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Ž: *Rovina nám rozdelí priestor na dve časti, jedna z nich bude náš polpriestor.*

U: Áno. Súradnice všetkých bodov, ktoré patria rovine ϱ, vyhovujú všeobecnej rovnici roviny $ax + by + cz + d = 0$. Platí pre ne ***rovnosť***.

Ž: *Body, ktoré nepatria rovine ϱ, nevyhovujú všeobecnej rovnici. To je jasné.*

U: Práve o to ide. Ak ich súradnice dosadíme do všeobecnej rovnice roviny, ľavá strana sa nerovná nule. Ale ľavá strana bude buď kladná alebo záporná. A to rozdelí body, ktoré nepatria rovine na dve časti. Tie, pre ktoré ľavá strana všeobecnej rovnice bude ***kladná***, budú ležať v jednom polpriestore ohraničenom rovinou ϱ.

Ž: *Už rozumiem. Tie body, pre ktoré bude hodnota ľavej strany všeobecnej rovnice roviny* **záporná**, *budú ležať v druhom polpriestore. Každá rovina predsa vymedzí dva polpriestory.*

U: Presne tak. Preto polpriestor môžeme analyticky vyjadriť takto:

$$ax + by + cz + d \geqq 0,\ \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0.$$

Ž: *Prečo je tam aj to „rovná sa“? Hovorili sme, že pre body jedného polpriestoru bude ľavá strana napr. kladná.*

U: Zabudol si, že aj hraničná rovina patrí polpriestoru. Pre body patriace rovine platí rovnosť.

Príklad 1: *Dané sú body $A[0;1;2]$, $B[-1;-2;1]$ a $C[1;-1;-1]$. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny $\overleftrightarrow{ABC}$.*

Ž: *Všeobecná rovnica roviny vyzerá takto:*

$$ax + by + cz + d = 0.$$

U: Musím ale dodať, že $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pričom aspoň jedno z čísel a, b, c je rôzne od nuly.

Ž: *Tak to musím zistiť koeficienty a, b, c, d pre našu rovinu.*

U: O koeficientoch a, b, c niečo predsa vieš.

Ž: *Sú to súradnice normálového vektora roviny. Ešte viem, že je to vektor kolmý na rovinu.*

U: Výborne. Asi ťa mýli, že žiaden taký vektor nemáme daný. Máme dané tri rôzne body roviny. Pomocou nich vieme určiť smerové vektory roviny.

Ž: *Smerové vektory sú potrebné pri parametrickom vyjadrení… Mohol by som rovinu vyjadriť parametricky a potom parametrické rovnice prepísať na všeobecnú rovnicu!*

U: Áno, to je jeden spôsob, ako vyriešiť našu úlohu. Ponúknem ti však aj iný. Potrebujeme smerové vektory. Určme ich.

Ž: *Smerové vektory sú $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$. Vypočítam ich súradnice. Bod A má súradnice $A[0;1;2]$ a bod B má súradnice $B[-1;-2;1]$. Súradnice vektora $\vec{u}$ vypočítam ako rozdiel súradníc bodov B a A. Preto:*

$$\vec{u} = B - A = (-1-0; -2-1; 1-2) = (-1; -3; -1).$$

Nasleduje druhý vektor $\vec{v} = C - A$. Bod $C[1;-1;-1]$ a bod $A[0;1;2]$. Súradnice vektora $\vec{v}$ sú:

$$\vec{v} = C - A = (1-0; -1-1; -1-2) = (1; -2; -3).$$

Ž: *Teraz by sme mohli napísať parametrické rovnice roviny.*

U: Moment! Skúsme porozmýšľať, či by sme pomocou smerových vektorov nevedeli určiť vektor normálový.

Ž: *Normálový vektor je kolmý na rovinu…*

U: … a teda aj na všetky vektory v nej ležiace.

Ž: *Dobre. Normálový vektor je kolmý na smerové vektory. Ako získam vektor kolmý na iné dva vektory?*

U: Spomeň si na vektorový súčin.

Ž: *Jasné! Vektorový súčin dvoch vektorov je vektor na ne kolmý. Vypočítam vektorový súčin smerových vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a mám normálový vektor $\vec{n}$.*

U: Na výpočet súradníc vektorového súčinu máme pomôcku. Zapíšeme súradnice vektorov pekne pod seba…

Ž: *… pridáme ešte raz prvú a druhú súradnicu. Áno, poznám to.*

$$\begin{matrix} -1 & -3 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -2 \end{matrix}$$

A počítam. Prvá súradnica: $-3 \cdot (-3) - (-1) \cdot (-2) = 9 - 2 = 7.$
Druhá súradnica: $(-1) \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) = -1 - 3 = -4.$
A nakoniec tretia súradnica: $-1 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 = 2 + 3 = 5.$
Normálový vektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ *má súradnice* $\vec{n} = (7; -4; 5)$.

U: Výborne. Súradnice normálového vektora môžeme dosadiť do všeobecnej rovnice a dostávame:

$$7x - 4y + 5z + d = 0.$$

Ž: *Ostáva nám vypočítať* d.

U: To nebude problém. Body A, B, C sú body roviny, ich súradnice musia vyhovovať všeobecnej rovnici. Preto dosadíme súradnice napr. bodu A a vypočítame d.

Ž: *Bod* A *má súradnice* $A[0; 1; 2]$. *Dosadím ich do všeobecnej rovnice namiesto* x, y, z *a dostanem:*

$$7 \cdot 0 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + d = 0.$$

Spočítam, čo sa dá:

$$6 + d = 0,$$

odtiaľ

$$d = -6.$$

U: Všeobecná rovnica roviny je:

$$7x - 4y + 5z - 6 = 0.$$

Úloha 1: *Dané sú body* $A[2; -1; 0]$, $B[-1; 2; -3]$ *a* $C[-2; -3; 1]$. *Napíšte všeobecnú rovnicu roviny* $\overleftrightarrow{ABC}$.

Výsledok: $x - 5y - 6z - 7 = 0$

Príklad 2: *Napíšte všeobecnú rovnicu roviny ϱ, ktorá prechádza bodmi $A[2;4;7]$, $B[1;6;0]$ a je rovnobežná s priamkou $\overleftrightarrow{CD}$, pričom $C[3;1;5]$ a $D[-1;0;4]$.*

Ž: *Všeobecnou rovnicou roviny nazývame rovnicu:*

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pričom aspoň jedno z čísel a, b, c je rôzne od nuly.

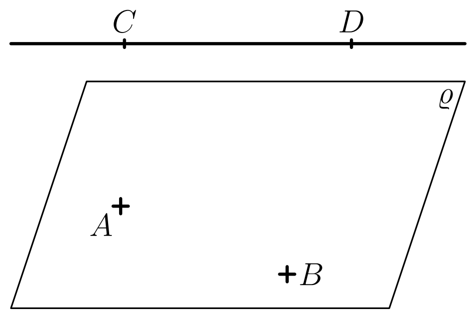
U: Výborne. Na napísanie všeobecnej rovnice roviny potrebujeme poznať normálový vektor $\vec{n} = (a;b;c)$ a súradnice aspoň jedného bodu roviny.

Ž: *Vidím, že problémy bude robiť normálový vektor. Viem len, že je to vektor kolmý na rovinu.*

U: Áno, a keď je kolmý na rovinu, je kolmý aj na dva smerové vektory tejto roviny. Ako získame jej smerové vektory?

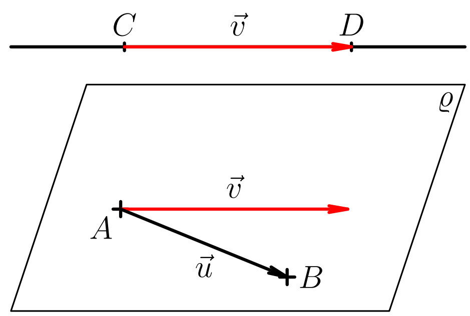
Ž: *Jedným by mohol byť vektor $\vec{u} = B - A$. Ale tým druhým...?*

U: Načrtnime si obrázok. Rovinu ϱ, v nej dva body A, B. Priamku $\overleftrightarrow{CD}$ rovnobežnú s rovinou ϱ.



Správne si povedal, že jeden smerový vektor bude vektor $B - A$. Druhým bude vektor $\vec{v} = D - C$.

Ž: *Ale ten predsa leží na priamke! Počkajte, priamka je s rovinou rovnobežná, tak vektor môžem umiestniť aj do roviny. Máte pravdu, druhým smerovým vektorom bude vektor $\vec{v} = D - C$.*



U: Môžeš si to pozrieť aj na obrázku. Keď to máme všetko ujasnené, vypočítajme súradnice smerových vektorov roviny.

Ž: *Dobre. Bod A má súradnice $A[2;4;7]$ a bod B má súradnice $B[1;6;0]$. Súradnice vektora $\vec{u}$ vypočítam ako rozdiel súradníc bodov B a A. Preto:*

$$\vec{u} = B - A = (1-2; 6-4; 0-7) = (-1; 2; -7).$$

Nasleduje druhý vektor $\vec{v} = D - C$. Bod D má súradnice $D[-1;0;4]$ a bod C má súradnice $C[3;1;5]$. Súradnice vektora $\vec{v}$ budú:

$$\vec{v} = D - C = (-1-3; 0-1; 4-5) = (-4; -1; -1).$$

U: Normálový vektor $\vec{n}$ je kolmý na oba vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Získame ho ako vektorový súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Ž: *Počítam vektorový súčin. Zapíšem si súradnice vektorov pod seba a pridám ešte raz prvú a druhú súradnicu.*

$$\begin{array}{rrrrr} -1 & 2 & -7 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & -1 & -4 & -1 \end{array}$$

Počítam. Prvá súradnica: $2 \cdot (-1) - (-7) \cdot (-1) = -2 - 7 = -9$.
Druhá súradnica: $(-7) \cdot (-4) - (-1) \cdot (-1) = 28 - 1 = 27$.
A nakoniec tretia súradnica: $-1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-4) = 1 + 8 = 9$.
Normálový vektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ má súradnice $\vec{n} = (-9; 27; 9)$.

U: Výborne. Súradnice normálového vektora môžeme dosadiť do všeobecnej rovnice, dostávame:

$$-9x + 27y + 9z + d = 0.$$

Ž: *Ostáva nám vypočítať d.*

U: To nebude problém. Body A, B sú body roviny, ich súradnice musia vyhovovať všeobecnej rovnici. Preto dosadíme súradnice napr. bodu A a vypočítame d.

Ž: *Bod $A[2;4;7]$. Dosadím ich do všeobecnej rovnice namiesto x, y, z:*

$$-9 \cdot 2 + 27 \cdot 4 + 9 \cdot 7 + d = 0.$$

Vypočítam d:

$$-18 + 108 + 63 + d = 0,$$

odtiaľ

$$153 + d = 0$$

a teda

$$d = -153.$$

Všeobecná rovnica roviny je:

$$-9x + 27y + 9z - 153 = 0.$$

U: Išlo ti to výborne. Na záver len niekoľko poznámok. Rovina má nekonečne veľa všeobecných rovníc.

Ž: *Každý násobok tejto rovnice je tiež jej všeobecnou rovnicou.*

U: Každý nenulový násobok. Všetky koeficienty v našej rovnici sú násobkom čísla 9. Naviac mínus na začiatku sa mi nepáči. Predelíme preto rovnicu číslom -9 a získavame:

$$x - 3y - z + 17 = 0.$$

Ž: *No, je to jednoduchšia rovnica.*

U: Ocenil by si to hlavne vtedy, ak by si s rovnicou musel ešte ďalej pracovať. Druhá poznámka sa týka tiež zjednodušenia výpočtov. Normálový vektor mal súradnice $\vec{n} = (-9; 27; 9)$. Vieme, že rovina má nekonečne veľa normálových vektorov. Mohli sme už tu zobrať normálový vektor 9-krát kratší, čiže vektor $-\frac{1}{9}\vec{n} = (1; -3; 1)$. Tým by sa nám zjedodušil výpočet koeficientu d. Vyhli by sme sa násobeniu veľkých čísel.

Úloha 1: *Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi $M[3; -2; -4]$, $N[7; 2; 1]$ a je rovnobežná s osou x.*

Výsledok: $5y - 4z - 6 = 0$

Príklad 3: *Napíšte všeobecnú rovnicu roviny ϱ, ktorá je určená bodom $A[2; -3; 1]$ a priamkou p s parametrickým vyjadrením $x = t,\ y = 2 + 3t,\ z = 1 - t,\ t \in \mathbb{R}$.*

U: Zopakujme si, ako vyzerá všeobecná rovnica roviny.

Ž: *Všeobecnou rovnicou roviny nazývame rovnicu*

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pričom aspoň jedno z čísel a, b, c je rôzne od nuly.

U: Výborne. Koeficienty a, b, c sú súradnice normálového vektora roviny.

Ž: *To je vektor na rovinu kolmý. Nemáme ho však daný.*

U: Budeme si ho musieť nejako zaobstarať. Oprieme sa len o to, čo máme dané.

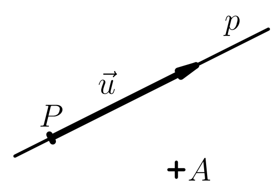
Ž: *Bod a priamku.*

U: Priamku máme danú parametrickým vyjadrením. Čo vieme z neho vyčítať?

Ž: *Vedel by som z neho vyčítať smerový vektor priamky. Označím ho $\vec{u}$ a má súradnice $\vec{u} = (1; 3; -1)$. Ešte poznám aj súradnice jedného bodu priamky, ten nazvem napr. P a bude mať súradnice $P[0; 2; 1]$.*

U: Perfektne si predviedol svoje vedomosti. Zakreslíme si všetko do obrázku.

Ž: *Dobre. Zakreslím priamku p, na nej vyznačím bod P a smerový vektor $\vec{u}$. Potom mimo priamky zakreslím bod A.*



U: Moment! Odkiaľ vieš, že bod A neleží na priamke p?

Ž: *Intuitívne som to predpokladal. Ak by bod A ležal na priamke p, tak by neurčovali rovinu!*

U: To je pravda. Práve preto to musíme overiť. Bude to rýchle. Ak by bod A patril priamke p, museli by jeho súradnice vyhovovať parametrickým rovniciam priamky pre tú istú hodnotu parametra t.

Ž: *Ak dosadím prvú súradnicu, vidím, že*

$$2 = t.$$

Pre druhú súradnicu dostávam

$$-3 = 2 + 3t,$$

odkiaľ máme hneď

$$t = -\frac{5}{3}.$$

Téčka sú rôzne. Je jasné, že bod A nepatrí priamke p.

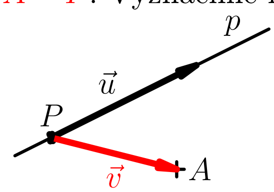
U: Dobre. Vráťme sa k obrázku. Priamka p a bod A určujú rovinu. Normálový vektor nepoznáme. Ale čo smerové vektory roviny?

Ž: *Jeden by sme mali. Je ním smerový vektor priamky p, vektor $\vec{u}$.*

U: Výborne. Skúsme pohľadať aj druhý smerový vektor. Presnejšie hľadáme začiatočný a koncový bod pre vektor umiestnený v tejto rovine.

Ž: *Aha! Asi už viem. Začiatok by mohol byť v bode P a koniec v bode A.*

U: Výborne. Nazvime ho napr. $\vec{v} = A - P$. Vyznačíme ho červenou farbou aj na obrázku.



Vypočítajme súradnice vektora $\vec{v}$.

Ž: *Vektor $\vec{v} = A - P$, jeho súradnice sa rovnajú rozdielu príslušných súradníc bodov A a P.*

$$\vec{v} = (2-0; -3-2; 1-1) = (2; -5; 0)$$

U: Máme teda dva smerové vektory roviny. Ako pomocou nich určíme normálový vektor roviny?

Ž: *Spomínam si, že normálový vektor dostaneme ako vektorový súčin smerových vektorov.*

U: Správne. Je to preto, že normálový vektor je kolmý nielen na rovinu, ale aj na každý vektor umiestnený v tejto rovine.

Ž: *Skrátka normálový vektor je kolmý na každý smerový.*

U: Áno, a aj vektorový súčin dvoch vektorov je kolmý na tieto dva vektory. Poďme vypočítať vektorový súčin vektorov $\vec{u} \times \vec{v}$.

Ž: *Dobre. Súradnice vektorov sú $\vec{u} = (1; 3; -1)$ a $\vec{v} = (2; -5; 0)$. Zapíšem si ich pod seba a pridáme ešte raz prvú a druhú súradnicu:*

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & 2 & -5 \end{array}$$

Počítam. Prvá súradnica: $3 \cdot 0 - (-1) \cdot (-5) = 0 - 5 = -5$.
Druhá súradnica: $(-1) \cdot 2 - 1 \cdot 0 = -2 - 0 = -2$.
A nakoniec tretia súradnica: $1 \cdot (-5) - 3 \cdot 2 = -5 - 6 = -11$.
Normálový vektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ má súradnice $\vec{n} = (-5; -2; -11)$.

U: Výborne. Nakoľko sú všetky súradnice záporné, navrhujem zobrať (-1)-násobok tohto vektora, vektor $(5; 2; 11)$. Súradnice tohto normálového vektora môžeme dosadiť do všeobecnej rovnice roviny, dostávame:

$$5x + 2y + 11z + d = 0.$$

Ž: *Ostáva nám vypočítať d.*

U: To nebude problém. Potrebujeme iba jeden bod patriaci rovine.

Ž: *Zoberieme napr. bod* $A[2;-3;1]$. *Dosadím ich do všeobecnej rovnice namiesto* x, y, z*:*

$$5 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 11 \cdot 1 + d = 0.$$

Vypočítam d*:*

$$10 - 6 + 11 + d = 0,$$

čo je po úprave

$$15 + d = 0$$

a teda

$$d = -15.$$

Všeobecná rovnica roviny je:

$$5x + 2y + 11z - 15 = 0.$$

Úloha 1: *Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá je určená bodom* $A[0;-1;5]$ *a priamkou* p *s parametrickým vyjadrením* $x = 3 - t,\ y = -2 + t\ z = 4 + 2t,\ t \in \mathbb{R}$.

Výsledok: $x + 5y - 2z + 15 = 0$

Príklad 4: *Určte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $A[-3; 5; -7]$ a je kolmá na vektor $\vec{n} = (1; -2; -1)$.*

U: Zopakujme si, ako vyzerá všeobecná rovnica roviny.

Ž: *Všeobecnou rovnicou roviny nazývame rovnicu*

$$ax + by + cz + d = 0.$$

U: Je potrebné dodať, že $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pričom aspoň jedno z čísel a, b, c je rôzne od nuly. Aký význam majú koeficienty a, b, c vo všeobecnej rovnici?

Ž: *Tuším, že nejako súvisia s normálovým vektorom roviny.*

U: To tušíš správne. Normálový vektor roviny má súradnice $\vec{n} = (a; b; c)$. Normálový vektor je odvodený zo slova „normála“ ...

Ž: *... čo znamená kolmica. Normálový vektor je vektor kolmý na rovinu. A keď sa pozriem na zadanie, vidím, že ho máme daný. Dokonca je aj označený písmenom n.*

U: Výborne. Môžeme jeho súradnice dosadiť do všeobecnej rovnice roviny.

Ž: *Normálový vektor má súradnice $\vec{n} = (1; -2; -1)$. Preto platí: $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$. Všeobecná rovnica roviny vyzerá takto:*

$$x - 2y - z + d = 0.$$

Ostal nám koeficient d.

U: Nepoužili sme ešte zadaný bod A. Ak bod A patrí rovine, jeho súradnice musia vyhovovať všeobecnej rovnici roviny. Dosadíme ich preto do rovnice.

Ž: *Kam ich mám dosadiť?*

U: Do všeobecnej rovnice roviny, namiesto x, y, z. $[x; y; z]$ sú predsa súradnice ľubovoľného bodu roviny.

Ž: *Už rozumiem. Dosadím súradnice bodu $A[-3; 5; -7]$ do všeobecnej rovnice roviny*

$$x - 2y - z + d = 0.$$

Dostávam:

$$-3 - 2 \cdot 5 - (-7) + d = 0.$$

U: Odtiaľ už ľahko vypočítame koeficient d.

Ž: *Áno, spočítam členy na ľavej strane a vypočítam d*

$$\begin{aligned} -3 - 10 + 7 + d &= 0 \\ -6 + d &= 0 \\ d &= 6. \end{aligned}$$

U: Všeobecná rovnica roviny je

$$x - 2y - z + 6 = 0.$$

Úloha 1: *Určte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom* $M[2;-3;1]$ *a je kolmá na vektor* $\vec{n}=(1;3;-1)$.

Výsledok: $x+3y-z+8=0$

Príklad 5: *Je daná rovina $3x - y + 2z - 11 = 0$.*

(a) Určte súradnice normálového vektora tejto roviny.

(b) Rozhodnite, či bod $A[2; 1; 3]$ leží v danej rovine.

U: Začneme s otázkou: akou rovnicou je daná rovina?

Ž: *Rovina je daná rovnicou $3x - y + 2z - 11 = 0$. Inak neviem, čo by ste chceli vedieť.*

U: Analyticky by si mal vedieť rovinu vyjadriť dvoma spôsobmi: parametricky a všeobecnou rovnicou. Pýtam sa, ktorým spôsobom ju máme danú v tejto úlohe.

Ž: *Rozumiem. Je to asi všeobecná rovnica, parameter tam žiaden nevidím.*

U: Je to všeobecná rovnica, nie je v nej parameter. A navyše, parametrické rovnice by museli byť tri. Máme najprv určiť súradnice normálového vektora. Čo o ňom vieš?

Ž: *Normálový vektor je vektor kolmý na rovinu, od slova normála - kolmica.*

U: Správne. Súradnice normálového vektora sa vyskytujú vo všeobecnej rovnici roviny.

Ž: *Áno, už si spomínam. Súradnice normálového vektora, to budú čísla pri x, y a z.*

U: Presnejšie povedané, ak má rovina všeobecnú rovnicu

$$ax + by + cz + d = 0,$$

tak koeficienty a, b a c tvoria súradnice normálového vektora.

$$\vec{n} = (a; b; c).$$

Ž: *Stačí sa mi pozrieť na koeficienty pri x, pri y a pri z, t. j. aké sú tam čísla. Vyznačím si ich farebne:*

$$\boxed{3x - y + 2z - 11 = 0}$$

Ž: *Vidím, že súradnice normálového vektora sú:*

$$\vec{n} = (3; 1; 2).$$

U: Pozor! Koeficient pri y si zobral bez znamienka. Druhá súradnica vektora $\vec{n}$ je -1.

Ž: *Máte pravdu. Normálový vektor má súradnice:*

$$\vec{n} = (3; -1; 2).$$

U: Podotýkam, že je to jeden z normálových vektorov roviny. Rovina ich má predsa nekonečne veľa. Každý nenulový násobok tohto vektora $\vec{n}$ je tiež normálovým vektorom danej roviny.

U: Prvú úlohu sme zvládli. Ostáva nám určiť, či bod $A[2; 1; 3]$ leží v rovine $3x - y + 2z - 11 = 0$. Ak daný bod leží v rovine, jeho súradnice musia vyhovovať rovnici roviny.

Ž: *Znamená to, že dosadím súradnice bodu A do rovnice roviny, ... ale kam?*

U: Súradnice ľubovoľného bodu roviny sú predsa $[x; y; z]$.

Ž: *Áno, samozrejme. Dosadím súradnice bodu $A[2; 1; 3]$ do rovnice roviny*

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 3 - 11 &= 0, \\ 6 - 1 + 6 - 11 &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

U: Dostali sme rovnosť. Znamená to, že bod A patrí rovine.

Ž: *A čo keby rovnosť neplatila? Napríklad by sme dostali $3 = 0$?*

U: V tom prípade by súradnice daného bodu nevyhovovali rovnici roviny. Preto by tento bod nepatril rovine.

Úloha 1: *Je daná rovina $2x - y + 4z - 1 = 0$.*

(a) Určte súradnice normálového vektora roviny .

(b) Rozhodnite, či bod $A[1; 0; -3]$ leží v danej rovine.

Výsledok:

(a) $\vec{n} = (2; -1; 4)$

(b) Bod A neleží v danej rovine.

Príklad 6: *Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá je určená parametricky:*
$x = 1 - t + 3s,\ y = 7 + 2t - s,\ z = -3 - t + s,\ t, s \in \mathbb{R}.$

U: Táto úloha sa dá riešiť rôznymi spôsobmi. Ukážeme si dva z nich.

Ž: *Budem rád, ak prídem aspoň na jeden.*

U: No tak. Rovina je daná parametricky. Čo to znamená?

Ž: *Máme tri rovnice a vystupujú tam parametre.*

U: Správne. Vystupujú parametre aj vo všeobecnej rovnici?

Ž: *Nie.*

U: To znamená, že našou úlohou bude odstrániť ich z rovnice.

Ž: *No, to by som asi dokázal. Najprv si z jednej rovnice vyjadrím jeden parameter a dosadím ho do zvyšných dvoch rovníc.*

U: S tým súhlasím.

Ž: *Vybral som si prvú rovnicu*

$$x = 1 - t + 3s.$$

Vyjadrím si z nej parameter t:

$$t = 1 + 3s - x.$$

U: Výborne. Toto vyjadrenie dosadíme do zvyšných rovníc.

Ž: *Dostávame už len dve rovnice s jedným parametrom s:*

$$\begin{aligned} y &= 7 + 2(1 + 3s - x) - s \\ z &= -3 - (1 + 3s - x) + s. \end{aligned}$$

U: Navrhujem rovnice ešte trochu upraviť.

Ž: *Dobre. Upravím pravé strany. Odstránim zátvorky a sčítam, čo sa dá. Dostaneme tieto rovnice:*

$$\begin{aligned} y &= 9 - 2x + 5s \\ z &= -4 + x - 2s. \end{aligned}$$

U: Parameter s odstránime použitím sčítacej metódy.

Ž: *Rozumiem. Prvú rovnicu vynásobím dvoma a druhú piatimi. Potom ich sčítam. Dostanem rovnicu*

$$2y + 5z = 18 - 20 - 4x + 5x.$$

Upravím ju a máme rovinu vyjadrenú všeobecnou rovnicou

$$x - 2y - 5z - 2 = 0.$$

Celý postup je aj v rámčeku.

$$\begin{array}{rcl} y &=& 9 - 2x + 5s \quad / \cdot 2 \\ z &=& -4 + x - 2s \quad / \cdot 5 \\ \hline 2y + 5z &=& 18 - 20 - 4x + 5x \end{array}$$

$$x - 2y - 5z - 2 = 0$$

U: Výborne.

Ž: *Spomínali ste, že úlohu môžeme riešiť aj iným spôsobom.*

U: Áno. Budeme teraz pracovať s vektormi. Z parametrických rovníc roviny by sme mali vedieť vyčítať súradnice smerových vektorov roviny.

Ž: *To nebude problém. Súradnice prvého smerového vektora sú čísla pri parametri t a druhého pri parametri s. To znamená, že smerové vektory majú súradnice:*

$$\vec{u} = (-1; 2; -1), \quad \vec{v} = (3; -1; 1).$$

U: Vo všeobecnej rovnici roviny vystupujú súradnice normálového vektora roviny. Ako súvisí normálový vektor so smerovými?

Ž: *Tuším, že normálový vektor je vektorovým súčinom smerových vektorov.*

U: Správne. Normálový vektor roviny je kolmý na každý vektor v rovine, teda aj na tieto dva smerové vektory. A samozrejme vieme, že vektorom kolmým na dva vektory môže byť ich vektorový súčin. Určme súradnice vektorového súčinu smerových vektorov.

Ž: *Počítam vektorový súčin vektorov $\vec{u} = (-1; 2; -1)$ a $\vec{v} = (3; -1; 1)$. Zapíšem si súradnice vektorov pod seba a pridáme ešte raz prvú a druhú súradnicu.*

$$\begin{array}{rrrrr} -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{array}$$

A počítam. Prvá súradnica: $2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = 2 - 1 = 1$.
Druhá súradnica: $(-1) \cdot 3 - (-1) \cdot 1 = -3 + 1 = -2$.
A napokon tretia súradnica: $-1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = 1 - 6 = -5$.
Normálový vektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ má súradnice $\vec{n} = (1; -2; -5)$.

U: Výborne. Súradnice normálového vektora dosadíme do všeobecnej rovnice roviny a dostávame:

$$x - 2y - 5z + d = 0.$$

Ž: *Ostáva nám vypočítať d.*

U: Potrebujeme súradnice jedného bodu roviny. Z parametrických rovníc ich určite vyčítaš.

Ž: *Ale áno. Sú to čísla stojace hneď za rovná sa. Tak napríklad bod $A[1; 7; -3]$.*

U: Bod A je bodom roviny, jeho súradnice musia vyhovovať všeobecnej rovnici. Preto dosadíme súradnice bodu A a dopočítame d.

Ž: *Dosadím súradnice bodu A do všeobecnej rovnice namiesto x, y, z:*

$$1 - 2 \cdot 7 - 5 \cdot (-3) + d = 0.$$

Vypočítam d:

$$\begin{aligned} 1 - 14 + 15 + d &= 0 \\ 2 + d &= 0 \\ d &= -2. \end{aligned}$$

U: Všeobecná rovnica roviny je:

$$x - 2y - 5z - 2 = 0.$$

Ž: *Myslím, že ten prvý spôsob sa mi páčil viac. Iba som odstraňoval parameter. Nemusel som počítať ešte aj vektorový súčin!*

U: Výber spôsobu je, samozrejme, na tebe.

Úloha 1: *Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá je určená parametricky:*
$x = 1 - 2t - 2s,\ y = 2 + 3t - 2s,\ z = 1 - t + 4s,\ t, s \in \mathbb{R}.$

Výsledok: $x + y + z - 4 = 0$

Príklad 7: *Vyjadrite všeobecnou rovnicou rovinu súmernosti bodov $A[2; -5; 3]$, $B[3; -2; 1]$.*

Ž: *Potreboval by som si najprv ujasniť, čo je to rovina súmernosti bodov.*

U: Iste poznáš osovú súmernosť ako zhodné zobrazenie v rovine.

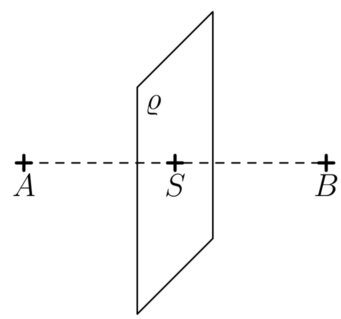
Ž: *To áno.*

U: Obdobou osovej súmernosti v priestore je rovinová súmernosť podľa roviny ϱ. Je to zhodné zobrazenie, ktoré bodu A, nepatriacemu rovine, priraďuje bod B, pričom platí:

(a) úsečka AB je kolmá na rovinu ϱ,

(b) stred úsečky AB patrí rovine ϱ.

Pozri si obrázok.



Ž: *Funguje to ako zrkadlo. Podmienky sú podobné osovej súmernosti v rovine.*

U: Máme rovinu ϱ vyjadriť všeobecnou rovnicou.

Ž: *Na napísanie všeobecnej rovnice potrebujeme poznať normálový vektor a súradnice jedného bodu roviny.*

U: Správne. Pozrime sa na obrázok, či tam nenájdeme normálový vektor roviny.

Ž: *Normálový vektor je vektor kolmý na rovinu. Úsečka AB je predsa na rovinu ϱ kolmá! Vektor $B - A$ by mohol byť normálovým vektorom roviny.*

U: Výborne. Určme jeho súradnice.

Ž: *Vektor $\vec{n} = B - A$, preto jeho súradnice budú:*

$$\vec{n} = B - A = (3-2; -2-(-5); 1-3) = (1; 3; -2).$$

U: To by sme mali. Potrebujeme ešte súradnice jedného bodu, ktorý patrí rovine.

Ž: *Ja neviem... body A a B to nebudú...*

U: Spomeň si, bod B je obrazom bodu A v rovinovej súmernosti. To znamená, že úsečka AB je kolmá na rovinu ϱ - to sme už využili. Okrem toho stred úsečky AB...

Ž: *Stred úsečky AB, bod S, musí patriť rovine ϱ! Súradnice stredu úsečky ľahko určím. Sú to predsa aritmetické priemery súradníc krajných bodov,*

$$S = \frac{A+B}{2}.$$

Takže stred úsečky AB, bod S, bude mať súradnice

$$s_1 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2},$$

$$s_2 = \frac{-5-2}{2} = -\frac{7}{2},$$

$$s_3 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

Čiže $S[\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}; 2]$.

U: Dobre. Zhrnieme to. Máme normálový vektor $\vec{n} = (1; 3; -2)$ a bod roviny $S[\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}; 2]$. Všeobecná rovnica rovina je

$$ax + by + cz + d = 0,$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pričom aspoň jedno z čísel a, b, c je rôzne od nuly.

Ž: *Namiesto a, b, c môžeme dosadiť súradnice normálového vektora, dostávame:*

$$x + 3y - 2z + d = 0.$$

U: Na vypočítanie koeficientu d použijeme bod $S[\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}; 2]$.

Ž: *Dosadím jeho súradnice do všeobecnej rovnice a vypočítam d:*

$$\frac{5}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) - 2 \cdot 2 + d = 0$$

$$\frac{5}{2} - \frac{21}{2} - 4 + d = 0$$

$$d = 12.$$

U: Rovina súmernosti bodov A a B má rovnicu

$$x + 3y - 2z + 12 = 0.$$

Úloha 1: *Určte súradnice bodu N, ktorý je s bodom $M[1; 0; 2]$ súmerný podľa roviny $\varrho:\ x - 2y - z + 13 = 0$.*

Výsledok: $N[-3; 8; 6]$

Príklad 8: *Zistite, či body $A[-4;5;-1]$, $B[-7;-1;-7]$ ležia v tom istom polpriestore určenom hraničnou rovinou $3x+2y-5z-7=0$.*

Ž: *Polpriestor je časť priestoru ohraničená rovinou. Rovina ohraničuje dva polpriestory. My máme zistiť, či body A a B budú na tej istej strane roviny.*

U: Celkom si to vystihol. Ako môžeme analyticky vyjadriť polpriestor?

Ž: *Súvisí to nejako s rovinou. Rovina má všeobecnú rovnicu, polpriestor nerovnicu.*

U: Polpriestor, určený hraničnou rovinou s rovnicou $3x+2y-5z-7=0$, môžeme vyjadriť nasledovne:

$$3x+2y-5z-7 \geqq 0.$$

Ž: *A ten druhý polpriestor ako*

$$3x+2y-5z-7 \leqq 0.$$

U: Áno. To, v ktorom polpriestore bude daný bod ležať, závisí od toho, aká bude hodnota ľavej strany všeobecnej rovnice roviny, ak za x, y, z dosadíme súradnice daného bodu.

Ž: *Tie body, pre ktoré bude kladná, budú ležať v jednom polpriestore a tie body, pre ktoré bude záporná, budú ležať v druhom polpriestore. Stačí dosadiť súradnice bodov A a B do ľavej strany všeobecnej rovnice a hneď budeme vedieť, ako to je.*

U: Máš pravdu. Tak do práce.

Ž: *Zoberiem si bod $A[-4;5;-1]$ a dosadím jeho súradnice do ľavej strany všeobecnej rovnice roviny:*

$$3x+2y-5z-7 = 3\cdot(-4)+2\cdot 5-5\cdot(-1)-7 = -12+10+5-7 = -4.$$

U: Môžeme povedať, že bod A leží v „***zápornom***" polpriestore.

Ž: *Teraz to zopakujem s bodom $B[-7;-1;-7]$. Dosadím jeho súradnice do ľavej strany všeobecnej rovnice roviny:*

$$3x+2y-5z-7 = 3\cdot(-7)+2\cdot(-1)-5\cdot(-7)-7 = -21-2+35-7 = 5.$$

*Takže bod B bude ležať v „**kladnom**" polpriestore.*

U: Správne. Body A a B neležia v jednom polpriestore ohraničenom rovinou $3x+2y-5z-7=0$.

Úloha 1: *Zistite, či body $A[-4;5;-1]$, $B[-7;-1;-7]$ ležia v tom istom polpriestore určenom hraničnou rovinou $2x-3y+z+17=0$.*

Výsledok: Ležia v jednom polpriestore.