Vektorový súčin

RNDr. Viera Vodičková

U: Poznáš už pojem skalárny súčin. Je to násobenie vektorov, ktorého výsledkom je číslo. Vektorový súčin bude tiež násobenie vektorov, ale také, že výsledkom bude opäť vektor. Najprv si ho definujeme.
Vektorovým súčinom dvoch nenulových lineárne nezávislých vektorov $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3), \vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ nazývame vektor $\vec{w}$, ktorý má tieto vlastnosti:

1. vektor $\vec{w}$ je kolmý na vektor $\vec{u}$ aj na vektor $\vec{v}$,
2. veľkosť vektora $\vec{w}$ vypočítame ako súčin veľkosti vektora $\vec{u}$, veľkosti vektora $\vec{v}$ a sínusu uhla φ, ktorý tieto vektory zvierajú,
3. vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ (v tomto poradí) tvoria pravotočivú sústavu (jej smer je určený pravidlom pravej ruky).

Vektorový súčin $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$

1. $(\vec{w} \perp \vec{u}) \wedge (\vec{w} \perp \vec{v})$
2. $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi$
3. vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ tvoria pravotočivú sústavu

U: Aby sme ho odlíšili od skalárneho súčinu, označujeme znak násobenia namiesto bodky krížikom.

Ž: *Uf! Je tu veľa vecí, asi by som to potreboval bližšie vysvetliť...*

U: Nič sa neboj, prejdeme si celú definíciu pomaličky a všetko si vysvetlíme.

Ž: *To budem celkom rád. Všimol som si, vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ majú tri súradnice. V rovine nemôžeme počítať vektorový súčin?*

U: Nie, v rovine to nepôjde. Zapamätaj si, že ***vektorový súčin definujeme len v priestore***.

Ž: *A to už prečo?*

U: Pozri sa hneď na prvú podmienku.

Ž: **Vektor $\vec{w}$ je kolmý na vektor $\vec{u}$ aj na vektor $\vec{v}$.** *Aha, v rovine nemá veľmi zmysel hľadať vektor, ktorý je kolmý na dva rôzne vektory. Buď taký neexistuje, alebo ak áno, tak tie dva vektory môžeme umiestniť na jednu priamku.*

U: Áno a vtedy to vyriešime pomocou skalárneho súčinu.
Ak máme v priestore dva lineárne nezávislé vektory, môžeme ich umiestniť do jednej roviny, to sa vždy dá. Vektor na ne kolmý, je potom kolmý aj na túto rovinu. Vektorový súčin nám umožní nájsť vektor kolmý na rovinu. Tak ako skalárny súčin nám umožňuje nájsť v rovine vektor kolmý na iný vektor, teda aj na priamku, na ktorej leží.

Ž: *Dobre, prvej podmienke už rozumiem, čo tá druhá?*

U: Povedali sme si, že vektor $\vec{w}$ je kolmý na obidva vektory, čiže aj na rovinu, v ktorej ležia. Čo myslíš koľko je takých vektorov?

Ž: *Jeden... dva! Jeden pôjde hore a druhý dole.*

U: V prípade, že si rovinu predstavíme vodorovne. Inak môžeme povedať, že sú opačne orientované. Ale naozaj len dva? Porozmýšľaj ešte!

Ž: *Keď nad tým tak uvažujem, neviem aký dlhý má byť. Môže mať predsa rôznu veľkosť a potom by ich bolo nekonečne veľa.*

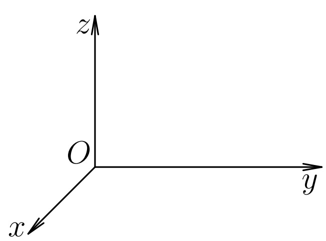
U: Práve to rieši druhá podmienka. Hovorí o tom, akú veľkosť má mať vektor $\vec{w}$. Veľkosť vektora $\vec{w}$ je definovaná, ako ***súčin veľkosti vektora $\vec{u}$, veľkosti vektora $\vec{v}$ a sínusu uhla φ, ktorý tieto vektory zvierajú***.

Ž: *Ale stále ostávajú dva vektory, ako som hovoril dole a hore.*

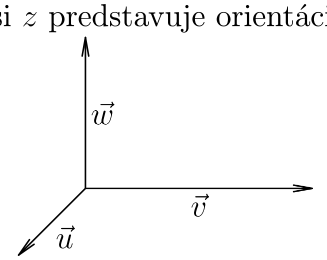
U: Na to slúži tretia podmienka. Keď prijmem tvoju terminológiu, tretia podmienka určí, či pôjde vektor $\vec{w}$ hore alebo dole. Hovorí, že ***vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ (v tomto poradí) tvoria pravotočivú sústavu***.

Ž: *A tým sa určí, či je hore alebo dole??*

U: Spomeň si ako sme zavádzali súradnicovú sústavu v priestore. Boli tam dve možnosti. Sústava mohla byť pravotočivá alebo ľavotočivá. My sme sa dohodli, že budeme používať pravotočivú.



U: Tak to bude aj s našimi vektormi. Ak máme vektorový súčin $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$, tak si namiesto osi x predstavíme vektor $\vec{u}$ – prvý vektor v súčine a namiesto osi y vektor $\vec{v}$ – druhý vektor v súčine. Potom kladná časť osi z predstavuje orientáciu vektora $\vec{w}$.



Ž: *Teraz je to jasnejšie, ale ešte sa tam niečo píše o pravidle pravej ruky.*

U: Na určenie smeru vektora $\vec{w}$ sa môže použiť aj pravidlo pravej ruky. Aplikované na náš prípad vyzerá takto: Vektory si najprv umiestnime tak, že budú mať spoločný začiatok.

Ž: *To nebude problém. Teraz si pripravím pravú ruku.*

U: Položíme si palec pravej ruky na prvý vektor v súčine, na vektor $\vec{u}$, a ukazovák tej istej ruky na druhý vektor, vektor $\vec{v}$.

Ž: *Moment. Ja si to hneď aj vyskúšam. Palec pravej ruky na vektor $\vec{u}$ a ukazovák na vektor $\vec{v}$. Dobre, mám. Čo ďalej?*

U: Stačí zdvihnúť prostredník a ten predstavuje výsledný vektor $\vec{w}$.

Ž: *Prostredník, to je ďalší prst v poradí. Zdvihnúť... ak si nechcem vykĺbiť prsty, tak sa dá len jedným smerom, smerom do dlane.*

U: Správne. Necháme ho vystretý kolmo na dlaň. Ostatné dva prsty necháme zovreté do dlane, aby nám nezavadzali.

Ž: *Rozumiem. Je to celkom pekná pomôcka, teraz, keď už viem, ako ju použiť.*

U: Vo vektorovom súčine je dôležité poradie vektorov. Ak zameníme poradie, výsledný vektor bude mať opačnú orientáciu. Ak vektorový súčin vektorov $\vec{u}$ krát $\vec{v}$ označíme ako vektor $\vec{w}$, potom platí, že vektorový súčin vektorov $\vec{v}$ krát $\vec{u}$ je vektor $-\vec{w}$, opačný vektor k vektoru $\vec{w}$. Pre vektorový súčin neplatí komutatívny zákon.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \times \vec{u} = -\vec{w}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

Ž: *Pozerám si ešte raz definíciu vektorového súčinu, nerozumiem ešte, prečo vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ musia byť nenulové a lineárne nezávislé.*

U: Vektorový súčin pracuje s kolmými vektormi. Ktorý vektor bude kolmý na nulový vektor?

Ž: *To je pravda, o takom niečom sa nedá ani uvažovať.*

U: Správne. Teraz druhé obmedzenie. Zoberme si dva lineárne závislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Ž: *Lineárne závislé...to ich môžem umiestniť na jednu priamku.*

U: Presne tak. Hľadajme podľa definície vektor $\vec{w}$, ktorý je kolmý na $\vec{u}$ aj na vektor $\vec{v}$. Koľko je takých vektorov?

Ž: *No opäť niekoľko "hore" a niekoľko "dole".*

U: Nezabúdaj, že si v priestore. Takýchto kolmých vektorov je nekonečne veľa a nedajú sa všetky umiestniť na jednu priamku.

Ž: *Naozaj, na danú priamku v priestore existuje nekonečne veľa kolmíc.*

U: Na základe týchto dôvodov sa zvykne dodefinovať vektorový súčin tak, že ak je aspoň jeden z vektorov nulový, vektorový súčin je rovný nulovému vektoru. A tak isto, ak sú dva vektory lineárne závislé, ich vektorový súčin je rovný nulovému vektoru.

$$\text{ak } \vec{u} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0},$$

$$\text{ak sú } \ \vec{u},\ \vec{v} \text{ lineárne závislé} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

U: Pri práci s vektormi sú veľmi užitočné ich súradnice.

Ž: *Súhlasím, väčšinou vektory nekreslíme, počítame len s ich súradnicami.*

U: Výsledkom vektorového násobenia vektorov je opäť vektor, preto je dobré poznať jeho súradnice. Oboznámime sa teraz s tým ako ich vypočítame.
Máme daný vektor $\vec{u}$ so súradnicami $(u_1; u_2; u_3)$ a vektor $\vec{v}$ so súradnicami $(v_1; v_2; v_3)$. Vektorový súčin $\vec{u}$ krát vektor $\vec{v}$ označíme ako vektor $\vec{w}$, so súradnicami $(w_1; w_2; w_3)$. Potom platí:
Prvá súradnica vektora $\vec{w}$ sa rovná $u_2v_3 - u_3v_2$.
Druhá súradnica vektora $\vec{w}$ sa rovná $u_3v_1 - u_1v_3$.
Tretia súradnica vektora $\vec{w}$ sa rovná $u_1v_2 - u_2v_1$.

súradnice vektorového súčinu $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$

$$w_1 = u_2v_3 - u_3v_2$$

$$w_2 = u_3v_1 - u_1v_3$$

$$w_3 = u_1v_2 - u_2v_1$$

Ž: *To je strašné! Nedá sa to zjednodušiť? Veď kto si to má zapamätať!*

U: Zjednodušiť sa to bohužiaľ nedá. Všimni si však, že na výpočet prvej súradnice w_1 sú použité len druhé a tretie súradnice vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Takisto na výpočet druhej súradnice w_2 sú použité len prvé a tretie súradnice vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Podobne je to aj s treťou súradnicou w_3.
Môžem ti ponúknuť metódu na zapamätanie si výpočtu týchto súradníc.

Ž: *To by som bol veľmi rád.*

U: Zapíšeme si súradnice vektora $\vec{u}$ a vektora $\vec{v}$ pekne do zákrytov pod seba.

Ž: *Má to vyzerať ako na obrázku?*

$$\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$

U: Áno. Pridáme ešte do každého riadku prvú a druhú súradnicu príslušného vektora. Získali sme tak akúsi tabuľku s dvoma riadkami a piatimi stĺpcami, tak ako to vidíš na obrázku:

$$\begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array}$$

U: Idem počítať prvú súradnicu vektora $\vec{w}$, čiže w_1.

Ž: *Zapamätal som si, že na výpočet prvej súradnice w_1 sú použité len druhé a tretie súradnice vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.*

U: Správne. Preto vynecháme prvý stĺpec tabuľky, alebo ho zakryjeme. (My ho vyznačíme červenou farbou.) Na výpočet súradnice použijeme druhý a tretí stĺpec. Vyznačíme si ich. (Použili sme modrý štvorec.)

u_1	u_2	u_3	u_1	u_2
v_1	v_2	v_3	v_1	v_2

U: Vo vyznačenom modrom štvorci počítame po uhlopriečkach. Najprv súčin čísel na uhlopriečke z ľavého horného rohu dole do pravého rohu (hovorí sa jej aj hlavná uhlopriečka) a od tohto súčinu odčítame súčin čísel na druhej uhlopriečke z pravého horného rohu dole do ľavého rohu (tej sa zase hovorí vedľajšia uhlopriečka). Skrátene možno povedať: súčin čísel na hlavnej uhlopriečke mínus súčin čísel na vedľajšej. (Ak si náhodou už počul o determinantoch, presne tak sa počíta determinant druhého stupňa.) A to je prvá súradnica w_1, čiže máme $w_1 = u_2v_3 - u_3v_2$.

u_1	u_2	u_3	u_1	u_2
v_1	v_2	v_3	v_1	v_2

Ž: *Stále to vyzerá dosť zložito, ale snáď si to natrénujem.*

U: To pevne verím. Druhá súradnica sa počíta tak isto. Akurát v tabuľke teraz zakryjeme druhý stĺpec (vyznačíme ho červenou) - ten, v ktorom sú druhé súradnice.

Ž: *To sa ľahko pamätá - počítam* **druhú** *súradnicu, zakryjem* **druhý** *stĺpec.*

U: Za týmto stĺpcom si opäť vyznačím modrý štvorec 2×2 a v ňom počítam úplne rovnako: od súčinu čísel na hlavnej uhlopriečke odčítame súčin čísel na vedľajšej uhlopriečke. Máme: $w_2 = u_3v_1 - u_1v_3$.

u_1	u_2	u_3	u_1	u_2
v_1	v_2	v_3	v_1	v_2

Ž: *Uf! To už vyzerá trochu lepšie. Predpokladám, že s treťou súradnicou to bude také isté.*

U: Samozrejme. Len sa posunieme o jeden stĺpec v tabuľke doprava.

Ž: *Skúsim to teraz sám. Na červeno si zamaľujem tretí stĺpec, idem predsa počítať tretiu súradnicu. Následne si vpravo vyznačím modrý štvorec. Počítam u_1v_2, to je hlavná uhlopriečka, mínus u_2v_1, to je vedľajšia uhlopriečka. Máme:* $w_3 = u_1v_2 - u_2v_1$.

u_1	u_2	u_3	u_1	u_2
v_1	v_2	v_3	v_1	v_2

U: Výborne. Ide ti to naozaj skvele.

Príklad 1: *Určte vektorový súčin vektorov* $\vec{a}$ *a* $\vec{b}$*, ak platí:* $\vec{a} = (3; 4; 0)$, $\vec{b} = (-3; 1; 4)$.

U: V prvom rade si treba uvedomiť, že výsledkom vektorového súčinu bude vektor. Určiť ho, znamená určiť jeho súradnice.

Ž: *To bude jednoduché. Zopakujem si vzorce na výpočet súradníc, mám ich tu v rámčeku:*

súradnice vektorového súčinu $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$

$$w_1 = u_2v_3 - u_3v_2$$

$$w_2 = u_3v_1 - u_1v_3$$

$$w_3 = u_1v_2 - u_2v_1$$

Ž: *Dosadím a mám to.*

U: A budeš si tieto vzorce vždy pamätať? Alebo budú na ťaháku?
Oveľa istejšie bude naučiť sa vypočítať súradnice vektorového súčinu iným spôsobom.

Ž: *Už si spomínam. Zapíšem si súradnice vektorov do zákrytov pod seba, prvý riadok budú súradnice vektora* $\vec{u}$*, teda* 3*;* 4 *a* 0*, pridám ešte raz prvú a druhú súradnicu. Pripíšem* 3 *a* 4*. V druhom riadku urobím to isté s vektorom* $\vec{v}$*, budú to čísla* -3*;* 1 *a* 4 *a ešte* -3 *a* 1*.*

$$\begin{array}{rrrrr} 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}$$

U: Výborne. Ideme počítať prvú súradnicu vektorového súčinu. Prvá súradnica - zakryjeme prvý stĺpec tabuľky. (My ho máme vyznačený červenou farbou.) Na výpočet súradnice použijeme druhý a tretí stĺpec. Vyznačíme si ich.(Použili sme modrú farbu.)

$$\begin{array}{r|rr|rr} 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}$$

U: Vo vyznačenom modrom štvorci počítame po uhlopriečkach. Najprv súčin čísel na hlavnej uhlopriečke, t.j $4 \cdot 4$. Od tohto súčinu odpočítame súčin čísel na vedľajšej uhlopriečke, t.j $0 \cdot 1$.

$$\begin{array}{r|rr|rr} 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}$$

U: Teda máme

$$4 \cdot 4 - 0 \cdot 1 = 16.$$

Prvá súradnica výsledného vektora bude ***16***.

Ž: *Druhú skúsim sám.*

Druhá súradnica, zakryjeme druhý stĺpec (vyznačíme ho červenou). Za týmto stĺpcom si opäť vyznačím modrý štvorec 2×2 a v ňom počítam úplne rovnako: od súčinu čísel na hlavnej uhlopriečke, t. j. $0 \cdot (-3)$ odčítame súčin čísel na druhej vedľajšej uhlopriečke, t. j. $3 \cdot 4$. Máme:

$$0 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = -12.$$

$$\begin{array}{rrrrr} 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}$$

U: Druhá súradnica výsledného vektora je teda -12. Ide ti to naozaj výborne.

Ž: *Nie je to také ťažké, ako to vyzeralo.*

U: Časom sa ti to úplne zautomatizuje.

U: Ostáva nám tretia súradnica.

Ž: *Na červeno si zamaľujem tretí stĺpec. Následne si vpravo vyznačím modrý štvorec. Počítam $3 \cdot 1$, to je hlavná uhlopriečka, mínus $4 \cdot (-3)$, to je vedľajšia uhlopriečka. Máme:*

$$3 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) = 3 + 12 = 15.$$

Tretia súradnica je 15.

$$\begin{array}{rrrrr} 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}$$

U: Výborne.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (16; -12; 15).$$

Išlo ti to pekne, takže v ďalších výpočtoch už nebudeme maľovať stĺpce na červeno a vyrábať modré štvorce. Pokúsime sa iba si ich predstaviť a počítať spamäti.

Úloha 1: *Určte vektorový súčin vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$, ak platí: $\vec{a} = (-2; -3; 2)$, $\vec{b} = (3; 4; -2)$.*

Výsledok: $\vec{a} \times \vec{b} = (-2; 2; 1)$

Príklad 2: *Sú dané body $A[4;1;5]$, $B[5;0;2]$ a $C[3;-3;6]$. Určte vektorový súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$, ak platí $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$.*

Ž: *Najprv si určím súradnice vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.*

U: Veľmi správne, inak by sme nemali s čím pracovať.

Ž: *Vektor $\vec{u}$ sa rovná $B - A$, preto bude mať súradnice $5-4$, čo je 1, $0-1$, čo je -1 a $2-5$, čo je -3.*

$$\boxed{\vec{u} = B - A = (1;-1;-3)}$$

Ž: *Pokračujem s vektorom $\vec{v}$. Vektor $\vec{v}$ sa rovná $C - A$, preto bude mať súradnice $3-4$, čo je -1, $-3-1$, čo je -4 a $6-5$, čo je 1.*

$$\boxed{\vec{v} = C - A = (-1;-4;1)}$$

U: Výborne. Určíme vektorový súčin oboch vektorov, teda určíme súradnice vektora $\vec{u} \times \vec{v}$. Použijeme na to zápis súradníc, s ktorým sme sa už naučili pracovať.

Ž: *Dobre, zapíšem si súradnice vektorov do zákrytov pod seba, prvý riadok budú súradnice vektora $\vec{u}$, teda 1; -1 a 3, pridám ešte raz prvú a druhú súradnicu. Pripíšem 1 a -1. V druhom riadku urobím to isté s vektorom $\vec{v}$, budú to čísla -1; -4 a 1 a ešte -1 a -4.*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 & -1 & -4 \end{array}$$

U: Predpokladám, že už máš trochu natrénovaný výpočet súradníc vektorového súčinu. Preto to teraz urýchlime. Nebudeme už maľovať stĺpec na červeno a následne vyznačovať modrý štvorec, skúsime si to len predstaviť. Ideme počítať prvú súradnicu vektorového súčinu. Prvá súradnica - zakryjeme prvý stĺpec tabuľky, t. j. čísla 1 a -1. (Predstavíme si, že je zakrytý, alebo si môžeme pomocť rukou.) Za týmto stĺpcom si všimneme štvorec 2×2, sú v ňom čísla -1, -3 a -4, 1. Počítame po uhlopriečkach. Najprv súčin čísel na hlavnej uhlopriečke, t. j. $-1 \cdot 1$. Od tohto súčinu odčítame súčin čísel na vedľajšej uhlopriečke, t. j. $-3 \cdot -(4)$. Teda máme

$$-1 \cdot 1 - (-3) \cdot (-4) = -1 - 12 = -13.$$

Prvá súradnica výsledného vektora bude -13.
Ďalšie skús už sám.

Ž: *Druhá súradnica, predstavím si zakrytý druhý stĺpec. Ja si ho asi radšej zakryjem rukou. Za týmto stĺpcom si opať predstavím štvorec 2×2 a v ňom počítam : od súčinu čísel na uhlopriečke, t. j. $-3 \cdot (-1)$, odčítame súčin čísel na druhej uhlopriečke, t. j. $1 \cdot 1$. Máme:*

$$-3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 3 - 1 = 2.$$

U: Správne.

Ž: *Pokračujem s treťou súradnicou. Zakryjem si tretí stĺpec. Následne počítam* $1 \cdot (-4)$*, to je hlavná uhlopriečka, mínus* $-1 \cdot (-1)$*, to je vedľajšia uhlopriečka. Máme:*

$$1 \cdot (-4) - 1 \cdot (-1) = -4 + 1 = -3.$$

Tretia súradnica je **-3**.

U: Pozor! ***Vynechal si jedno znamienko mínus.*** Správne to má byť takto:

$$1 \cdot (-4) - (-1) \cdot (-1) = -4 - 1 = -5.$$

Ž: *Och, áno. Tretia súradnica výsledného vektora je* **-5**.

U: Musíš si dávať pozor na takéto zdanlivo jednoduché počty, aj malá chyba môže spôsobiť úplne iný výsledok.
Vektorovým súčinom vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je vektor so súradnicami -13, 2 a -5.

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = (13; 2; -5)}$$

Úloha 1: *Sú dané body* $K[3; -1; 2]$*,* $L[1; 3; 2]$ *a* $M[5; 1; 5]$*. Určte vektorový súčin vektorov* $\vec{v}$ *a* $\vec{u}$*, ak platí* $\vec{u} = L - K$ *a* $\vec{v} = M - K$*.*

Výsledok: $\vec{u} \times \vec{v} = (-12; -6; 12)$

Príklad 3: *Určte veľkosť vektorového súčinu vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$, ak platí: $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 8$ a* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 24$

Ž: *Mám vypočítať veľkosť vektora, to budeme potrebovať jeho súradnice.*

U: Je pravda, že veľkosť vektora sa dá vypočítať z jeho súradníc. V našom príklade to ale nebudeme môcť použiť. Nemáme predsa súradnice vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Ž: *Hm, na to som nepomyslel.*

U: Tento príklad ťa preskúša z definície vektorového súčinu.

Ž: *To bola taká dlhá definícia a mala niekoľko podmienok. Prvá hovorila o tom, že vektorový súčin je kolmý na vektory $\vec{u}$ aj $\vec{v}$. Druhá hovorila o tom, akú má mať veľkosť...*

U: Práve tú potrebujeme. Veľkosť vektorového súčinu vypočítame ako súčin veľkosti vektora $\vec{u}$, veľkosti vektora $\vec{v}$ a sínusu uhla φ, ktorý tieto vektory zvierajú.

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \varphi}$$

Ž: *To bude potom ľahké. Veľkosť vektora $\vec{u}$ aj vektora $\vec{v}$ máme danú, ale nevieme, aký uhol zvierajú.*

U: Ešte máme danú hodnotu skalárneho súčinu týchto vektorov.

Ž: *Ich skalárny súčin je 24, z toho by som tak vedel len to, že zvierajú ostrý uhol, nakoľko 24 je kladné číslo.*

U: Preskúšam ťa aj zo skalárneho súčinu. Skalárny súčin možno vypočítať pomocou súradníc oboch vektorov, ale tie nemáme. Okrem toho skalárny súčin sa rovná súčinu veľkostí oboch vektorov a kosínusu uhla φ, ktorý zvierajú.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \varphi}$$

U: Nakoľko poznáme skalárny súčin aj veľkosti oboch vektorov, môžeme z tohto vzťahu vypočítať hodnotu uhla φ.

Ž: *Dám sa do toho. Dosadím známe hodnoty a dostávam rovnicu:*

$$24 = 5 \cdot 8 \cdot \cos \varphi.$$

5 krát 8 je 40, čiže 40 vydelím celú rovnicu a dostávam:

$$\cos \varphi = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}.$$

Zoberiem kalkulačku a vyčíslim hodnotu uhla φ.

U: Počkaj, to nebude potrebné. Uvedomíme si, že nepotrebujeme hodnotu uhla φ, ale sínus tohto uhla. Ten sa dá vyjadriť aj bez kalkulačky a dokonca presne. Známy ja predsa vzťah medzi hodnotou sínusu a kosínusu toho istého uhla:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1.$$

Ž: *Na takýto postup si spomínam z goniometrie. Namiesto* $\cos\varphi$ *dosadím hodnotu* $\frac{3}{5}$ *:*

$$\sin^2\varphi + (\tfrac{3}{5})^2 = 1.$$

$\frac{3}{5}$ *umocním na druhú, čo je* $\frac{9}{25}$ *a odpočítam. Dostávam, že* $\sin^2\varphi = \frac{16}{25}$*. Z toho po odmocnení máme* $\sin\varphi = \frac{4}{5}$*.*

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2\varphi + (\tfrac{3}{5})^2 &= 1 \\ \sin^2\varphi &= 1 - \frac{9}{25} \\ \sin^2\varphi &= \frac{16}{25} \\ \sin\varphi &= \frac{4}{5} \end{aligned}}$$

U: Správne. Máme hodnotu sínusu uhla φ. Na výpočet veľkosti vektorového súčinu stačí len dosadiť do vzorca.

Ž: *Dosadím a mám:*

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi = 5 \cdot 8 \cdot \frac{4}{5} = 32.$$

U: Výborne, veľkosť vektorového súčinu vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je 32.

Príklad 4: *Určte aspoň jeden vektor, ktorý je kolmý na vektory* $\vec{a} = (6; 0; 12)$ *a* $\vec{b} = (2; 3; -6)$.

U: Táto úloha sa dá vyriešiť aj použitím skalárneho súčinu. Teraz ju vyriešime inak, využijeme vektorový súčin.

Ž: *Výsledkom vektorového súčinu je vektor, ktorý je kolmý na oba vektory. Takže ak vypočítam vektorový súčin vektorov* $\vec{a}$ *a* $\vec{b}$*, získam vektor, ktorý bude kolmý na vektor* $\vec{a}$ *aj na vektor* $\vec{b}$.

U: Veľmi správne. To je hlavný význam vektorového súčinu.

Ž: *Ale, pokiaľ dobre uvažujem, takých vektorov, ktoré sú kolmé na dané vektory* $\vec{a}$ *a* $\vec{b}$ *je nekonečne veľa. Vektorový súčin je len jeden.*

U: Áno, to je pravda. Práve preto bolo v definícii vektorového súčinu toľko podmienok, aby sme jednoznačne určili vektorový súčin. Určením vektorového súčinu získame jeden vektor, ktorý je kolmý na vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Všetky ostatné kolmé vektory však budú jeho násobkom, pretože ich vieme umiestniť na jednu priamku.

Ž: *Teraz mám v tom jasno, pustím sa do práce. Určím vektorový súčin vektorov* $\vec{a}$ *a* $\vec{b}$*. Zapíšem si ich súradnice do zákrytov pod seba, prvý riadok budú súradnice vektora* $\vec{a}$*, teda* 6; 0 *a* 12*, pridám ešte raz prvú a druhú súradnicu. Pripíšem* 6 *a* 0*. V druhom riadku urobím to isté s vektorom* $\vec{b}$*, budú to čísla* 2; 3 *a* -6 *a ešte* 2 *a* 3.

$$\begin{array}{ccccc} 6 & 0 & 12 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 2 & 3 \end{array}$$

Ž: *A teraz počítam. Prvá súradnica výsledného vektora je:*

$$0 \cdot (-6) - 12 \cdot 3 = 0 - 36 = -36.$$

Druhá súradnica:

$$12 \cdot 2 - 6 \cdot (-6) = 24 + 36 = 60.$$

A nakoniec tretia súradnica:

$$6 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = 18 - 0 = 18.$$

Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ *bude mať súradnice* $(-36; 60; 18)$.

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (-36; 60; 18)}$$

U: Správne. Keby sme chceli zapísať všetky vektory, ktoré sú na vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ kolmé, stačí zapísať všetky reálne nenulové násobky tohto vektora. Sú to všetky vektory tvaru

$$t(-36; 60; 18), \quad t \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Úloha 1: *Určte aspoň jeden vektor, ktorý je kolmý na vektory* $\vec{a} = (1; 5; -2)$ *a* $\vec{b} = (4; -3; -1)$.

Výsledok: $\vec{w} = (-11; -7; -23)$

Príklad 5: *Dané sú vektory $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2; 3)$, $\vec{c} = (2; -1; 1)$. Určte súradnice vektora $\vec{x}$, ktorý je kolmý na vektor $\vec{a}$ aj $\vec{b}$ a súčasne platí $\vec{x} \cdot \vec{c} = -6$.*

U: Táto úloha sa dá riešiť aj použitím skalárneho súčinu. Použitím vektorového súčinu je to však rýchlejšie.

Ž: *Asi viem ako. Jeden z vektorov, ktoré sú kolmé na vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je práve ich vektorový súčin, označme ho napríklad ako vektor $\vec{w}$, $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b}$.*

U: Výborne, určíme jeho súradnice.

Ž: *Zapíšem si ich súradnice do zákrytov pod seba, prvý riadok budú súradnice vektora $\vec{a}$, teda 2; 3 a -1, pridám ešte raz prvú a druhú súradnicu. Pripíšem 2 a 3. V druhom riadku urobím to isté s vektorom $\vec{b}$, budú to čísla 1; -2 a 3 a ešte 1 a -2.*

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \end{array}$$

Ž: *A teraz počítam. Prvá súradnica výsledného vektora je:*

$$3 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2) = 9 - 2 = 7.$$

Druhá súradnica:

$$-1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -1 - 6 = -7.$$

A nakoniec tretia súradnica:

$$2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = -4 - 3 = -7.$$

Vektor $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b}$ má súradnice $(7; -7; -7)$.

U: Určením vektorového súčinu sme získali jeden vektor, ktorý je kolmý na vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Všetky ostatné kolmé vektory však budú jeho nenulovým násobkom, pretože ich vieme umiestniť na jednu priamku. Možeme písať, že vektor $\vec{x}$ sa rovná k-násobku vektora $\vec{w}$, pričom k je ľubovoľné reálne číslo, rôzne od nuly.

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{x} = k \cdot \vec{w}; \quad k \in \mathbb{R} - \{0\} \\ \vec{x} = (7k; -7k; -7k) \end{gathered}}$$

U: Z toho nekonečného množstva vektorov musíme vybrať ten, pre ktorý platí $\vec{x} \cdot \vec{c} = -6$.

Ž: *To znamená, že skalárny súčin vektorov $\vec{x}$ a $\vec{c}$ je -6.*

U: Zapíšeme si to pomocou súradníc.

Ž: *Dobre. Skalárny súčin vektorov $\vec{x}$ a $\vec{c}$ sa rovná $7k$ krát 2 plus $(-7k)$ krát (-1) plus $(-7k)$ krát 1 a to sa má rovnať (-6). Ľavú stranu si upravíme, máme tam $14k + 7k - 7k$, čo je $14k$. Dostávame $14k$ sa rovná (-6), z čoho k sa rovná $-\frac{3}{7}$.*

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{c} &= -6 \\ 7k \cdot 2 + (-7k) \cdot (-1) + (-7k) \cdot 1 &= -6 \\ 14k + 7k - 7k &= -6 \\ 14k &= -6 \\ k &= -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

U: Vektor $\vec{x}$ získame tak, že súradnice vektora $\vec{w}$ vynásobíme číslom $-\frac{3}{7}$.

Ž: *Vektor $\vec{x}$ má súradnice*

$$\vec{x} = (-3; 3; 3).$$

Úloha 1: *Dané sú vektory $\vec{a} = (3; -1; 0)$, $\vec{b} = (9; -3; 2)$. Určte súradnice vektora $\vec{x}$, ktorý je kolmý na vektor $\vec{a}$ aj $\vec{b}$ a súčasne platí $|\vec{x}| = 1$.*

Výsledok: $\vec{x_1} = (\frac{\sqrt{10}}{10}; \frac{3\sqrt{10}}{10}; 0)$, $\vec{x_2} = (-\frac{\sqrt{10}}{10}; -\frac{3\sqrt{10}}{10}; 0)$