Vektor

RNDr. Viera Vodičková

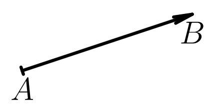
U: Najprv si vysvetlíme pojem ***orientovaná úsečka***. Ak na úsečke určíme, ktorý z jej krajných bodov je začiatočný a ktorý je koncový, nazývame ju orientovanou úsečkou.

Ž: *Ako ju teda odlíšime od obyčajnej úsečky?*

U: Označením. Orientovanú úsečku, ktorej začiatočný bod je A a koncový B, označujeme ako AB a nad to šípka.

orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$

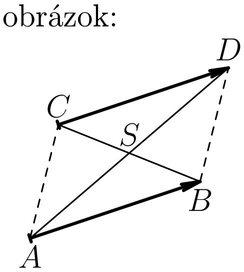
U: Znázornime ju ako obyčajnú úsečku, akurát pri koncovom bode, v našom prípade pri bode B, urobíme šípku:



Ž: *To som už videl niekde na fyzike... Čo sa stane, ak začiatočný aj koncový bod bude ten istý?*

U: To je špecialny prípad, vtedy hovoríme o ***nulovej orientovanej úsečke***.

U: Dve orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ nazývame ***ekvipolentné***, ak stred úsečky AD je totožný so stredom úsečky BC, všimni si obrázok:

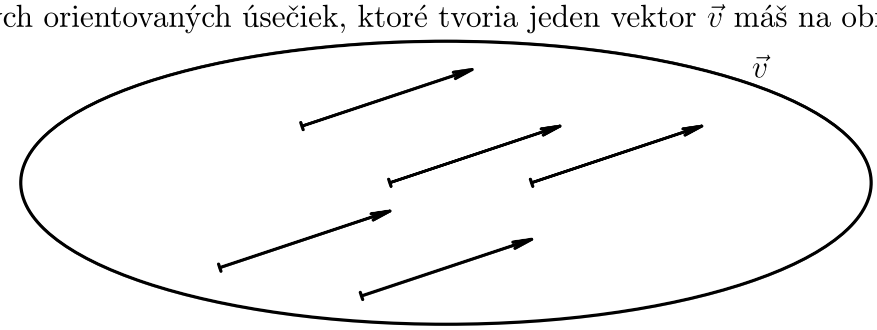


Ž: *To je dosť zložito povedané, ale...keď to pospájame, tak vznikne rovnobežník $ABDC$.*

U: Niekedy hovoríme, že úsečky sú ***súhlasne rovnobežné***, ležia na rovnobežných priamkach, majú rovnakú veľkosť a sú rovnako orientované.

Ž: *Z obrázku vidno, že tie úsečky sú akési* rovnaké - *rovnakým smerom šípka, rovnaká veľkosť..., len nakreslené na inom mieste.*

U: Správne, práve o to ide. To, že sú rovnaké, znamená, že tvoria jeden vektor. Množinu všetkých navzájom ekvipolentných orientovaných úsečiek nazývame ***vektor***. Niekoľko ekvipolentných orientovaných úsečiek, ktoré tvoria jeden vektor $\vec{v}$ máš na obrázku.



Množinu všetkých nulových orientovaných úsečiek nazývame ***nulový vektor***.
Vektor označujeme malým písmenom, nad ktorým umiestnime šípku. Nulový vektor označíme pomocou nuly, nad ktoru bude šípka. Všimni si označenie v rámčeku.

označenie vektora $\vec{v},\ \vec{u},\ \vec{a}$

nulový vektor $\vec{0}$

Ž: *Nie je orientovaná úsečka a vektor to isté? Načo to komplikovať, nestačil by jeden pojem?*

U: Vektor nemôžeme znázorniť, môžeme znázorniť len jednu konkrétnu orientovanú úsečku, ktorá je jedným z ***umiestnení daného vektora***. Preto môžeme písať takto $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, alebo vhodnejší zápis je takýto $\vec{v} = B - A$. Tým je zároveň vyjadrené, že bod B je koncový bod vektora $\vec{v}$ a bod A začiatočný.

orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je jedno z umiestnení vektora $\vec{v}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB},\ \vec{v} = B - A$

Ž: *Aha! Keď chcem nakresliť vektor, možem si vybrať zo širokej ponuky orientovaných úsečiek tú, ktorá sa mi bude najlepšie hodiť. S vektorom môžem hýbať, môžem ho rovnobežne posunúť tam, kam potrebujem.*

U: Práve to sa nám pri práci s nimi zíde.

U: Ak body A a B majú súradnice $A[a_1; a_2; a_3]$, $B[b_1; b_2; b_3]$, potom ***súradnice vektora*** $\vec{v} = B - A$ sú $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3) = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3)$.

Ž: *To sa bude ľahko pamätať! Ak máme vektor $B - A$, tak od príslušných súradníc bodu B odčítam príslušné súradnice bodu A a mám súradnice vektora $B - A$.*

U: ***Veľkosťou vektora*** nazývame veľkosť ktorejkoľvek orientovanej úsečky, ktorá je jeho umiestnením. Veľkosť vektora označujeme tak ako je uvedené v rámčeku a čítame veľkosť vektora $\vec{v}$.

$|\vec{v}|$

Veľkosť vektora $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ vypočítame $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

$A[a_1; a_2; a_3], B[b_1; b_2; b_3]$

$\vec{v} = B - A$

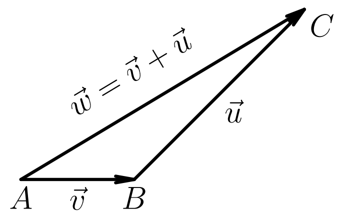
súradnice vektora $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3) = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3)$

veľkosť vektora $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Ž: *Ak si zvolím iné umiestnenie daného vektora, dostanem iné súradnice? Veľkosť zrejme bude tá istá...*

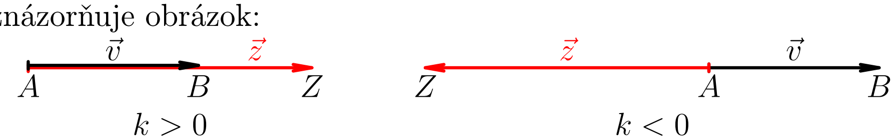
U: Nie, ak si zvolíme hociktoré umiestnenie, súradnice daného vektora budú vždy tie isté.

U: S vektormi môžeme robiť niektoré operácie. Môžeme ich sčítavať, odčítavať, násobiť reálnym číslom. Ak je daný vektor $\vec{v}$, ktorého jedným z umiestnení je orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$, a vektor $\vec{u}$, ktorého jedným z umiestnení je orientovaná úsečka $\overrightarrow{BC}$, potom ***súčtom vektorov*** $\vec{v}+\vec{u}$ nazývame vektor $\vec{w}$, ktorého jedným z umiestnení je orientovaná úsečka $\overrightarrow{AC}$. Celú situáciu ukazuje obrázok.



Ž: *Aj to sme robili na fyzike, sčítavali sme tak sily.*

U: Ak je daný nenulový vektor $\vec{v}$, ktorého jedným z umiestnení je orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ a číslo $k \in R$, tak ***k-násobkom vektora*** $\vec{v}$ nazývame vektor $\vec{z}$, ktorého jedným z umiestnení je orientovaná úsečka $\overrightarrow{AZ}$, pričom platí:
veľkosť orientovanej úsečky $|\overrightarrow{AZ}|$ sa rovná veľkosti orientovanej úsečky $|\overrightarrow{AB}|$ vynásobenej absolútnou hodnotou čísla k a navyše:
– ak je číslo k kladné, tak bod Z leží na polpriamke $\overrightarrow{AB}$,
– ak je číslo k záporné, tak bod Z leží na opačnej polpriamke k polpriamke $\overrightarrow{AB}$,
– ak je číslo $k=0$, tak vektor $\vec{z}$ je rovný nulovému vektoru.
Situáciu znázorňuje obrázok:



$$\vec{v}=\overrightarrow{AB}, \quad \vec{z}=\overrightarrow{AZ}$$

$$\vec{z}=k\vec{v}, \quad k \in \mathbb{R}, \text{pričom platí}$$

(1) $|\overrightarrow{AZ}| = |k|.|\overrightarrow{AB}|$

(2) ak $k>0$, tak bod Z leží na polpriamke $\overrightarrow{AB}$,
ak $k<0$, tak bod Z leží na opačnej polpriamke k polpriamke $\overrightarrow{AB}$,
ak $k=0$, tak $\vec{z}=\vec{0}$.

U: Ak $k=-1$, tak vektor $(-1)\cdot\vec{v}=-\vec{v}$ nazývame ***opačný vektor*** k vektoru $\vec{v}$.
Všetky operácie môžeme vyjadriť aj cez súradnice:

$$\vec{v}=(v_1;v_2;v_3), \vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$$

$$\vec{w}=\vec{v}+\vec{u};\ \vec{w}=(v_1+u_1;v_2+u_2;v_3+u_3)$$

$$\vec{z}=k\vec{v};\ \vec{z}=(kv_1;kv_2;kv_3),\ k\in R$$

Príklad 1: *Vektor $\vec{u}$ je určený orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, pričom $A[1;3]$, $B[4;1]$.*

a) Vypočítajte súradnice vektora $\vec{u}$.

b) Vypočítajte súradnice bodu X tak, aby orientovaná úsečka $\overrightarrow{CX}$, $C[-3;2]$ tiež určovala vektor $\vec{u}$.

c) Vypočítajte veľkosť vektora $\vec{u}$.

Ž: *Toľko veľa úloh!*

U: Poďme pekne postupne, najprv si predstavme vektor.

Ž: *Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, teda bod A je začiatočný a bod B koncový.*

U: Spomeňme si, že to môžeme zapísať aj takto $\vec{u} = B - A$, kde $\vec{u} = (u_1; u_2)$.

Ž: *Podľa toho si to ľahko zapamätám, teda už môžem počítať súradnice:*

$$u_1 = b_1 - a_1 = 4 - 1 = 3$$

$$u_2 = b_2 - a_2 = 1 - 3 = -2.$$

U: Zapíšme výsledné súradnice vektora $\vec{u}$.

Ž: *Vektor má súradnice $\vec{u} = (3; -2)$.*

Ž: *Úloha b) mi nič nehovorí.*

U: Zapíšme si opäť vektor ako rozdiel krajných bodov orientovanej úsečky.

Ž: $\vec{u} = X - C$.

U: Teraz už poznáme súranice vektora $\vec{u}$.

Ž: *Aha, tak ich môžeme dosadiť:*

$$u_1 = x_1 - c_1$$

$$3 = x_1 - (-3).$$

Z toho máme

$$x_1 = 0.$$

Podobne druhá súradnica

$$-2 = x_2 - 2.$$

Čiže

$$x_2 = 0.$$

Bod X má súradnice $X[0;0]$.

U: Výborne, a aký bod nám to vlastne vyšiel?

Ž: *Súradnice má $[0;0]$ …to bude začiatok sústavy súradníc.*

U: Tak poďme na poslednú úlohu.

Ž: *Veľkosť vektora vypočítame podľa vzorca*

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Pre náš prípad môžeme písať:

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

U: Veľkosť vektora $\vec{u}$ je $\sqrt{13}$.

Úloha 1: *Vektor $\vec{u}$ je určený orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, pričom $A[3; -4]$, $B[2; 5]$. Vypočítajte súradnice vektora $\vec{u}$.*

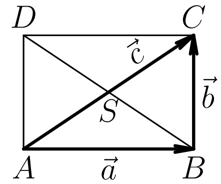
Výsledok: $\vec{u} = (-1; 9)$

Úloha 2: *Je daný vektor $\vec{u} = (2; 1)$ a bod $A[0; 5]$. Určte bod B tak, aby $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.*

Výsledok: $B[2; 6]$

Príklad 2: *Daný je obdĺžnik $ABCD$ so stredom S. Dané sú vektory $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Pomocou týchto vektorov vyjadrite vektory $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{SC}$, $\vec{e} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{f} = \overrightarrow{DS}$.*

Ž: *Nakreslím si obrázok a vyznačím na ňom dané vektory.*



Ž: *Vyznačil som vlastne len prvý hľadaný vektor $\vec{c}$, lebo obrázok začínal byť neprehľadný. Ale ako vznikne vektor $\vec{c}$ z vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$? Ako mám na to ísť, niet čím začať.*

U: Čo znamená, že vznikne z vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$?

Ž: *Nejako ich poskladáme a máme dostať výsledný vektor $\vec{c}$.*

U: To poskladanie presnejšie znamená, že urobíme s vektormi nejaké operácie, vynásobíme ich reálnym číslom, sčítame, odčítame. Ak na obrázku nevidíme ako by to mohlo byť, lebo nemáme dostatok skúseností, tak začneme skúšať rôzne operácie.

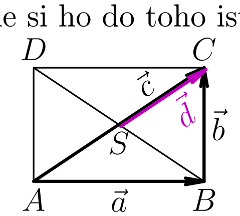
Ž: *Možností je veľmi veľa, to mám vyskúšať všetky?*

U: Všetky by sa ti aj tak nepodarili, je ich totiž nekonečne veľa. Ale maj trochu trpezlivosti a skús to.

Ž: *Máte pravdu, vyskúšal som ich sčítať a hneď to vyšlo. Platí: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.*

U: No vidíš, a keby si sa na začiatku poriadne pozrel, všimol by si si, že vektor $\vec{b}$ začína v koncovom bode vektora $\vec{a}$ a že spojnica začiatočného bodu vektora $\vec{a}$ a koncového bodu vektora $\vec{b}$ je orientovaná úsečka $\overrightarrow{AC}$, čo nie je nič iné ako náš hľadaný vektor $\vec{c}$.

U: Zoberme teraz vektor $\vec{d}$, zakreslime si ho do toho istého obrázku.



U: Nesúvisí s niektorým vektorom na obrázku?

Ž: *Vektory $\vec{c}$ a $\vec{d}$ sú celkom podobné, akurát $\vec{d}$ je o polovicu kratší.*

U: Skúsme zapísať vzťah medzi týmito dvoma vektormi.

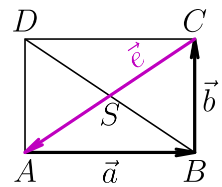
Ž: $\vec{c} = 2.\vec{d}$

U: Hodil by sa nám skôr vzťah, ktorý by vyjadroval $\vec{d}$ pomocou $\vec{c}$. Teda $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{c}$.

Ž: *A keďže vektor $\vec{c}$ už máme vyjadrený, môžeme písať: $\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.*

U: Výborne. Pokračujme s ďalším vektorom.

Ž: *Nakreslím si nový obrázok, vyznačím na ňom len vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ a ešte vektor $\vec{e}$.*



Ž: *Opäť sú nejaké podobné, teraz sa nám zmenila orientácia, vektor $\vec{e}$ ide opačne ako vektor $\vec{c}$.*

U: Aký je teda vzťah medzi vektormi $\vec{e}$ a $\vec{c}$?

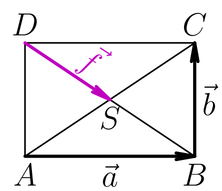
Ž: $\vec{e} = -\vec{c}$

U: Znamená to, že sú to dva navzájom opačné vektory.

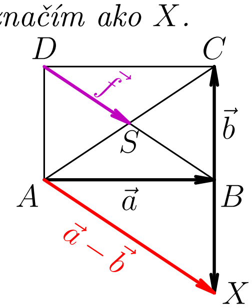
Ž: *Môžeme písať:* $\vec{e} = -\vec{c} = -(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$.

U: Ostáva posledný vektor.

Ž: *Opäť si nakreslím nový obrázok:*



Ž: *Tento vektor je už úplne iný, vôbec sa nepodobá na predchádzajúce. Idem teda niečo vyskúšať, a dúfam, že tiež tak rýchlo narazím na výsledok. Po sčítaní sa asi najviac hodí odčítanie. Skúsim zakresliť* $\vec{a} - \vec{b}$.
Z vektora $\vec{b}$ si najprv vyrobím opačný, bude to napríklad orientovaná úsečka $\overrightarrow{CB}$. Potom si ho presuniem tak, aby jeho začiatočný bod bol umiestnený v koncovom bode prvého vektora, t. j. v bode B, a nakoniec spojím začiatočný bod prvého vektora s koncovým bodom druhého vektora, pomocný bod označím ako X.



U: Výborne. Poriadne sa pozri na vektory $\vec{f}$ a $\vec{a} - \vec{b}$.

Ž: *Vidím, že teraz sa už zase podobajú, mal som šťastie. Je to ten istý vektor, len o polovicu kratší. Môžeme písať:* $\vec{f} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

U: Nakoľko platí distributívny zákon, daný vzťah môžeme zapísať aj takto $\vec{f} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Úloha 1: *Daný je kváder $ABCDEFGH$. Dané sú vektory $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ a $\vec{c} = \overrightarrow{BF}$. Pomocou týchto vektorov vyjadrite vektory $\vec{d} = \overrightarrow{BD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{BH}$, $\vec{f} = \overrightarrow{BK}$, pričom bod K je stred hrany AE.*

Výsledok: $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{f} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Príklad 3: *Je daný vektor $\vec{a} = (\frac{1}{2}; a_2)$. Určte jeho druhú súradnicu tak, aby veľkosť vektora $\vec{a}$ bola 1.*

Ž: *To vyzerá ľahko. Použijeme vzorec na výpočet veľkosti vektora.*

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

U: Výborne. Dosaďme to, čo poznáme a zostavme rovnicu.

Ž: *Poznáme prvú súradnicu $a_1 = \frac{1}{2}$ a veľkosť vektora $|\vec{a}| = 1$. Dosadíme:*

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a_2^2}.$$

U: Vyriešme rovnicu.

Ž: *Rovnicu umocníme na druhú.*

$$1 = \frac{1}{4} + a_2^2.$$

Po odčítaní $\frac{1}{4}$ z oboch strán dostávame

$$a_2^2 = \frac{3}{4},$$

odmocníme a máme

$$a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

U: Je to v poriadku, na nič si nezabudol?

Ž: *Myslím, že som na nič nezabudol, máme riešenie $a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.*

U: Tak sa na to ešte raz pozrieme.

$$a_2^2 = \frac{3}{4}.$$

Koľko čísel po umocnení na druhú nám dá $\frac{3}{4}$?

Ž: *Ah, to je kvadratická rovnica, zabudol som na absolútnu hodnotu. Správne to bude takto:*

$$|a_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a teda

$$a_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

U: Teraz je to už správne. Riešením úlohy sú dva vektory $\vec{a_1} = (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ a $\vec{a_2} = (\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Úloha 1: *Určte číslo y tak, aby veľkosť vektora $\vec{z} = (6; y)$ bola 10.*

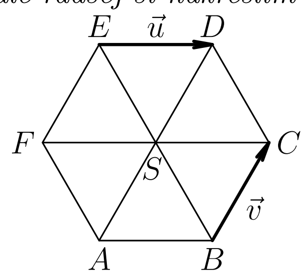
Výsledok: $y_1 = 8$, $y_2 = -8$

Príklad 4: *Daný je pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ so stredom v bode S. Dané sú dva vektory $\vec{u} = \overrightarrow{ED}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Pomocou bodov A, B, C, D, E, F, S vyjadrite vektory*

a) $-2\vec{u}$,

b) $\vec{u} + \vec{v}$.

Ž: *Predstavivosť mám síce dobrú, ale radšej si nakreslím obrázok:*



U: Teraz si doňho zakreslíme naše vektory.

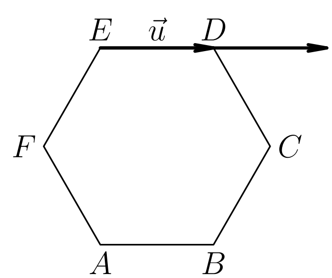
Ž: *Vektor $\vec{u}$ má začiatok v bode E a koniec v bode D, tak tu nakreslím šípku. Podobne s druhým vektorom.*

U: Skôr než sa pustíme do úlohy, taká malá otázka, dal by sa na našom obrázku umiestniť vektor $\vec{u}$ aj inde?
Spomeň si, čo je to vektor.

Ž: *Vektor môžem posunúť do inej orientovanej úsečky tak, aby boli súhlasne rovnobežné,… už to vidím, bude to orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$.*

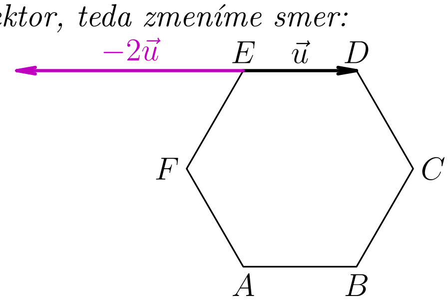
U: Výborne. Ale napríklad aj $\overrightarrow{FS}$ alebo $\overrightarrow{SC}$.
Tak poďme na riešenie.

Ž: *Máme nájsť vektor $-2\vec{u}$, takže najprv vektor vynásobíme dvoma, to znamená, že sa nám dvakrát predĺži.*



U: Výborne. A čo urobíme so znamienkom mínus?

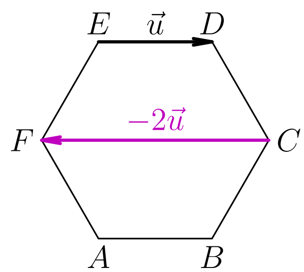
Ž: *Mínus znamená opačný vektor, teda zmeníme smer:*



U: Už by sme to mali, ale teraz treba vektor umiestniť tak, aby jeho krajné body boli niektoré z vrcholov šesťuholníka alebo jeho stred.

Ž: *To je už ľahké, stačí sa len pozrieť, je to orientovaná úsečka $\overrightarrow{CF}$. Platí:*

$$-2\vec{u} = \overrightarrow{CF}.$$



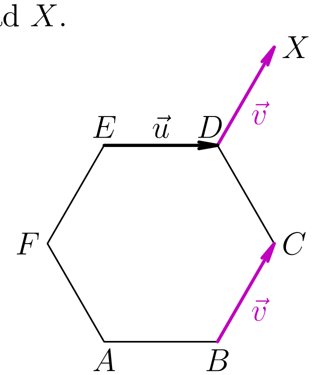
U: Pokračujeme úlohou b).

Ž: *Opäť si to nakreslíme. Ale ako ich sčítať, keď je každý niekde inde?*

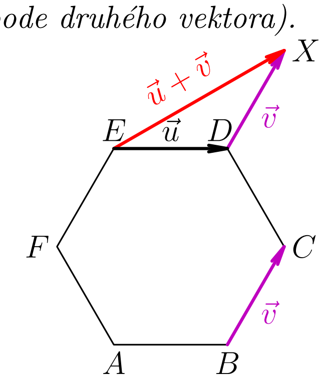
U: Zabudol si, že vektory môžeme vhodne umiestniť?

Ž: *Dobre, premiestnime vektor $\vec{v}$ tak, aby začínal v tom bode, kde končí vektor $\vec{u}$, teda v bode D.*

U: Koncový bod nazvime napríklad X.



Ž: *Súčtom vektorov bude vektor, ktorý začína v bode E (v začiatočnom bode prvého vektora) a končí v bode X (koncovom bode druhého vektora).*

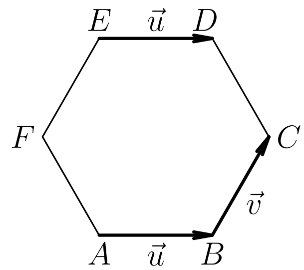


U: Platí:

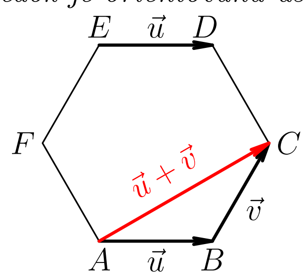
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{EX}.$$

Ž: *Len teraz neviem ako ho umiestnim do šesťuholníka. Je to len náčrt.*

U: Aj v náčrte sa dá zdôvodniť, čo je rovnobežné, ale ak to nevidíš, ukážem ti, že úloha sa dala riešiť aj ináč. Vektor $\vec{v}$ nechajme na mieste, premiestnime vektor $\vec{u}$, a to do orientovanej úsečky $\overrightarrow{AB}$.



Ž: *To je pekné, teraz sčítam a výsledok je orientovaná úsečka* $\overrightarrow{AC}$.



Ž: *Máme:*

$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}.$$

U: Keď porovnáš obrázky, vidíš, že orientované úsečky $\overrightarrow{EX}$ a $\overrightarrow{AC}$ sú umiestnením toho istého vektora.

Príklad 5: *Určte súradnice a veľkosť vektora $2\vec{u} - \vec{v}$, ak $\vec{u} = (2; -1)$ a $\vec{v} = (-3; 2)$*

Ž: *Poďme postupne. 2 krát $\vec{u}$ znamená, že vektor násobíme dvoma, teda aj každú jeho súradnicu. Preto $2\vec{u} = (4; -2)$.*

U: To je správne.

Ž: *Teraz potrebujeme $-\vec{v}$, súradnice budú mať opačné znamienka:*

$$-\vec{v} = (3; -2).$$

U: Aj to je správne.

Ž: *Teraz už môžeme sčítavať:*

$$2\vec{u} - \vec{v} = (4 + 3; -2 - 2) = (7; -4).$$

U: Výborne. Ale nedalo sa to aj jednoduchšie a hlavne rýchlejšie?
Výsledné súradnice kopírujú operácie s vektormi. Dvakrát súradnica vektora $\vec{u}$ mínus súradnica vektora $\vec{v}$:

$$2\vec{u} - \vec{v} = (2.2 + 3;\ 2.(-1) - 2) = (7; -4).$$

Ž: *Áno, je to naozaj rýchlejšie. A vôbec počítať súradnice výsledného vektora je oveľa ľahšie ako ho hľadať na obrázku.*

U: Presne tak, o to ide v celej vektorovej algebre a v analytickej geometrii. Niekedy je obrázok zahmlený alebo nepresný, ale pri číslach si netreba nič predstavovať. To je výhoda prístupu analytickej geometrie.

U: Teraz ostáva už len vypočítať veľkosť výsledného vektora.

Ž: *Ak poznáme jeho súradnice, tak je to maličkosť, stačí dosadiť do vzorca:*

$$|2\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{7^2 + (-4)^2}$$

$$|2\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}.$$

U: Veľkosť výsledného vektora je $\sqrt{65}$.

Ž: *Mám ešte jeden spôsob riešenia, môžno bude kratší.*

U: Nech sa páči, počúvam.

Ž: *Najprv si vypočítame veľkosti oboch vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.*

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Ž: *A teraz veľkosť nášho vektora vypočítame takto:*

$$|2\vec{u} - \vec{v}| = 2\sqrt{5} - \sqrt{13}.$$

U: Ako to, že sme dostali rôzne výsledky?

Ž: *To netuším.*

U: Operácie s vektormi nemôžeme preniesť na ich veľkosti. Vidno to už na sčítaní dvoch vektorv. Výsledný vektor (uhlopriečka rovnobežníka) predsa nemá takú veľkosť ako súčet dvoch strán. Zapamätaj si preto, že operácie môžeme robiť so súradnicami, ale nie s veľkosťami vektorov.

Úloha 1: *Sú dané vektory* $\vec{u} = (-3; 2)$ $\vec{v} = (2; 0)$. *Určte súradnice vektorov* $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{u}$.

Výsledok: $\vec{u} + \vec{v} = (-1; 2)$, $\vec{u} - \vec{v} = (-5; 2)$, $\vec{v} - \vec{u} = (5; -2)$

Príklad 6: *Dané sú body* $K[3; 2; -4]$, $L[3; 6; -5]$, $M[-4; -1; 0]$. *Vypočítajte súradnice bodu* N, *ak platí* $L - K = \vec{u}$, $M - N = -2\vec{u}$.

Ž: *Začnem asi s vektorom* $\vec{u}$, *ten je jasný, môžem vypočítať jeho súradnice.*

$$\vec{u} = L - K = (3 - 3; 6 - 2; -5 + 4) = (0; 4; -1).$$

Teraz už neviem, čo ďalej.

U: Spomeň si, už sme riešili úlohu, kde bolo treba nájsť súradnice koncového bodu umiestnenia vektora.

Ž: *No áno, ale tam sme poznali súradnice vektora.*

U: Neboj sa, aj tu ich budeme poznať. Je to predsa vektor $-2\vec{u}$. Ak poznáme súradnice vektora $\vec{u}$, vieme určiť aj súradnice vektora $-2\vec{u}$.

Ž: *Celkom som na to zabudol. Súradnice vektora* $-2\vec{u}$ *určíme ľahko, stačí súradnice vektora* $\vec{u}$ *vynásobiť číslom* (-2)*:*

$$-2\vec{u} = (-2; -8; 2).$$

U: Odkiaľ sa vzala (-2) ako prvá súradnica? Skontroluj si to ešte raz.

Ž: *Prvá súradnica je* 0 *krát* -2, *to je* -2, *och, vlastne to je nula, taká hlúpa chyba! Takže opravujem, súradnice vektora sú*

$$-2\vec{u} = (0; -8; 2).$$

U: Umiestnením tohto vektora má byť orientovaná úsečka $\overrightarrow{NM}$.

Ž: *Ja som si myslel, že* $\overrightarrow{MN}$.

U: Pozor, nedaj sa pomýliť, umiestnenie daného vektora môžeme zapísať dvoma spôsobmi:

$$-2\vec{u} = \overrightarrow{NM} = M - N.$$

Druhý zápis vyjadruje koncový bod mínus začiatočný, kopíruje vlastne výpočet súradníc.

Ž: *Áno, a preto môžem súradnice nášho vektora zapísať aj takto*

$$-2\vec{u} = (m_1 - n_1;\ m_2 - n_2;\ m_3 - n_3),$$

čo po dosadení známych súradníc bodu M *dáva:*

$$-2\vec{u} = (-4 - n_1;\ -1 - n_2;\ 0 - n_3).$$

U: Teraz porovnajme oba zápisy súradníc, príslušné súradnice dáme do rovnosti.

Ž: *Prvá súradnica:* $-4 - n_1 = 0 \ \Rightarrow\ n_1 = -4$,
druhá súradnica: $-1 - n_2 = -8 \ \Rightarrow\ n_2 = 7$,
tretia súradnica: $0 - n_3 = 2 \ \Rightarrow\ n_3 = -2$.
Súradnice bodu N *sú* $N[-4; 7; -2]$.

Príklad 7: *V karteziánskej sústave súradníc sú dané body $A[-1;1]$, $B[2;2]$ a $C[1;5]$. Nech umiestnením vektora $\vec{a}$ je orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$, vektora $\vec{b}$ orientovaná úsečka $\overrightarrow{AC}$. Zostrojte umiestnenie $\overrightarrow{AV}$ vektora $\vec{v}$, ak*

a) $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$,

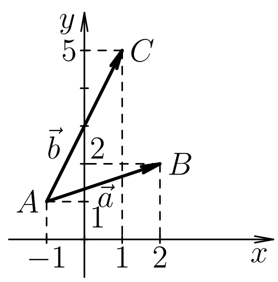
b) $\vec{v} = 2\vec{a}$,

c) $\vec{v} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Ž: *Tak tu budeme predsa rysovať.*

U: Áno, ale len preto, aby si získal predstavu, čo sa deje, ak vektory sčítavame, odčítavame, násobíme. Inak je v analytickej geometrii najdôležitejšia práca so súradnicami.

Ž: *Kreslím - rysujem obrázok:*



Ž: *Najprv vyznačím body A, B, C, pekne podľa ich súradníc. Teraz spojím A s B a pri B urobím šípku, dostanem tak vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Podobne spojím A s C a pri C urobím šípku, to je vektor $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.*

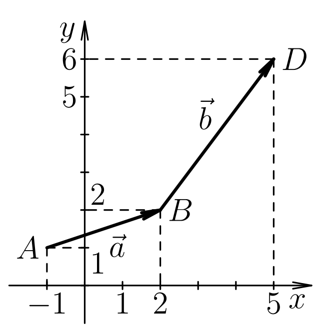
U: Prvou úlohou je zostrojiť súčet vektorov $\vec{a} + \vec{b}$. Ako zostrojíme výsledný vektor?

Ž: *Vektory by sme mali mať umiestnené tak, že začiatočný bod druhého vektora bude totožný s kocovým bodom prvého vektora. Potom spojím začiatočný bod prvého vektora s koncovým bodom druhého vektora a mám súčet.*

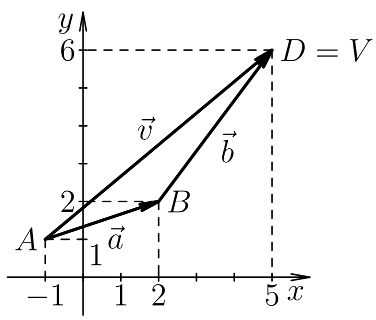
U: Čo to znamená pre našu situáciu?

Ž: *Druhý vektor budeme musieť premiestniť.*

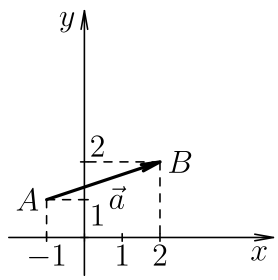
U: Áno, vektor $\vec{b}$ umiestnime tak, aby jeho začiatok bol v bode B. Koncový bod označíme napríklad D.



Ž: *A teraz už len spojím, výsledný vektor je $\overrightarrow{AD}$, vlastne bod D predstavuje hľadaný bod V, $\vec{v} = \overrightarrow{AV}$.*



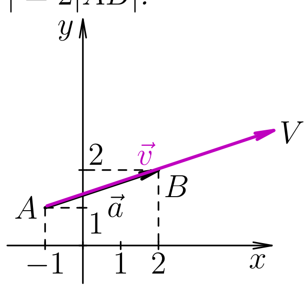
U: Výborne, druhou úlohou je zostrojiť vektor $\vec{v} = 2\vec{a}$. Narysujeme druhý obrázok a vzhľadom na zadanie, nám stačí narysovať len vektor $\vec{a}$.



Ž: *Mám zostrojiť dvakrát vektor $\vec{a}$, čiže veľkosť sa dvakrát zväčší.*

U: Áno, a naviac výsledný vektor bude ležať na tej istej priamke ako pôvodný vektor $\vec{v}$, otázkou je na ktorú stranu bude orientovaný.

Ž: *Keďže násobok je 2, čo je kladné číslo, orientácia sa nezmení. Koncový bod V bude ležať na polpriamke AB, pričom $|AV| = 2|AB|$.*



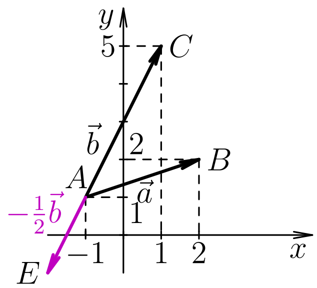
Ž: *Ostala nám tretia úloha, ako vidím zo zadania, najťažšia.*

U: Ak si zvládol prvé dve, zvládneš aj túto. Spája poznatky z oboch dohromady. Pekne si to rozkúskujme. Pri vektore $\vec{b}$ je koeficient $-\frac{1}{2}$. Ako zostrojíme vektor $-\frac{1}{2}\vec{b}$?

Ž: *Podobne ako v predchádzajúcom prípade, veľkosť výsledného vektora bude polovica pôvodného, a keďže číslo je záporné, bude koncový bod…*

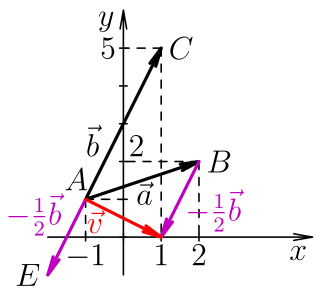
U: Označme ho napríklad E.

Ž: *Bude bod E ležať na opačnej polpriamke k polpriamke AC.*



U: Ostáva nám ich sčítať.

Ž: *Vektor* $-\frac{1}{2}\vec{b}$ *musíme umiestniť tak, aby začiatočný bod bol bod* B*, koncový bod nazvem* V*, a potom* $\overrightarrow{AV} = \vec{v} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.



Príklad 8: *Zistite, či body $A[1;1;1]$, $B[1;1;2]$, $C[3;1;2]$, $D[3;1;1]$ môžu byť vrcholmi rovnobežníka.*

Ž: *Keby tie body boli aspoň v rovine, tak si to nakreslím a mám to! Ale v priestore??*

U: Skúsme, či pri tom nemôžeme využiť naše vektory.

Ž: *Vektory? Žiadne tam predsa nie sú.*

U: Zopakujme si, že vektor je množina orientovaných úsečiek a orientované úsečky sú dané dvoma bodmi.

Ž: *Máme štyri body, môžeme z nich vytvoriť niekoľko orientovaných úsečiek.*

U: Koľko presne?

Ž: *Všetky možné dvojice zo štyroch bodov, to je* 6.

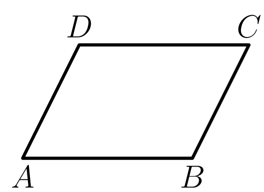
U: To je počet úsečiek. Ale koľko bude orientovaných úsečiek?

Ž: *Dvakrát viac, lebo orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je iná ako orientovaná úsečka $\overrightarrow{BA}$, teda* 12.

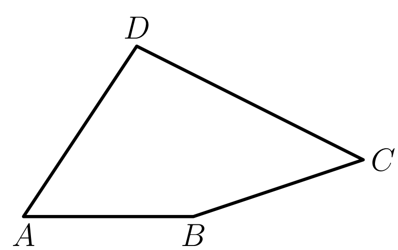
U: Pre úplnosť musím dodať, že sú tam ešte 4 ďalšie a to nulové orientované úsečky $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$, $\overrightarrow{DD}$, teda je ich spolu 16.

U: Skús nakresliť obrázok tak, aby body A,B,C,D tvorili rovnobežník a tak, aby ho netvorili.

Ž: *Tu máme rovnobežník:*



Ž: *A tu iný štvoruholník:*



U: Na oboch obrázkoch máme, ako sme sa dohodli, 16 orientovaných úsečiek. Koľko vektorov však budú predstavovať?

Ž: *Začínam tomu rozumieť. V rovnobežníku bude vektorov menej, lebo niektoré orientované úsečky budú predstavovať ten istý vektor. Sú to tie, ktoré ležia na rovnobežných stranách.*

U: Tak si to zhrňme. Ak to bude rovnobežník, tak napríklad $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{DC}$ budú umiestnením toho istého vektora.

Ž: *Ako to však zistím? Keby som si to predsa len mohol nakresliť...*

U: Práve na to máme súradnicovú sústavu. Určme súradnice oboch vektorov.

Ž:

$$\vec{u} = B - A = (1-1;\ 1-1;\ 2-1) = (0;0;1)$$
$$\vec{v} = C - D = (3-3;\ 1-1;\ 2-1) = (0;0;1).$$

Je to to isté.

U: To znamená, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{DC}$ sú umiestnením toho istého vektora, a teda dané body tvoria rovnobežník.

Ž: *To je všetko? Netreba overiť, či majú rovnakú veľkosť?*

U: Je to predsa ten istý vektor, ako by mohli mať rôzne veľkosti?

Ž: *A čo druhé dve rovnobežné strany, tie netreba overiť?*

U: Ako skušku, to môžeme urobiť, ale nie je to potrebné. Ak máme dané dve rovnobežné rovnako veľké úsečky, ich krajné body tvoria vždy rovnobežník.
Úlohu sme vyriešili, ale vráťme sa pre zaujímavosť k obrázku rovnobežníka, je tam 16 orientovaných úsečiek. Ale koľko je tam vektorov?

Ž: *Už viem, že $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{DC}$ sú rovnakým vektorom...*

U: Presnejšie povedané sú umiestnením toho istého vektora.

Ž: *Podobne to bude aj s opačne orientovanými úsečkami $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{CD}$. Tie budú tvoriť tiež jeden vektor, ktorý je opačne orientovaný ako ten predošlý.*

U: To máme zatial dva vektory.

Ž: *Áno, a na druhých dvoch rovnobežných stranách budú ďalšie dva. Uhlopriečky predstavujú stále iný vektor, to sú ďalšie štyri. No a ostali tie štyri nulové.*

U: Ale všetky nulové orientované úsečky predstavujú jeden nulový vektor.

Ž: *Takže ich bude* 9.

Úloha 1: *Sú dané body $A[-5;3;6]$, $B[3;1;-2]$, $C[1;-11;-2]$, $D[-7;-9;6]$. Dokážte, že obrazec $ABCD$ je rovnobežník.*