Sústava súradníc

RNDr. Viera Vodičková

U: Matematika sa spravidla delí na dve veľké skupiny: aritmetiku a geometriu. Aritmetika pracuje s číslami, zatiaľ čo geometria s tvarmi.

Ž: *Jasné, na aritmetike sa počíta, na geometrii rysuje.*

U: Historicky táto predstava pretrvala až do 17.storočia. Vznikla nová disciplína ***analytická geometria***.

Ž: *Tak predsa len to bude geometria?*

U: Nie tak ako si myslíš, nebudeme rysovať, len občas kresliť obrázky. Analytická geometria je akýmsi tlmočníkom medzi aritmetikou a geometriou. Geometrickým objektom priraďuje čísla a naopak aritmetické rovnice znázorňuje geometricky. Bodom budú zodpovedať usporiadané dvojice, resp. trojice čísel, priamkam lineárne rovnice.

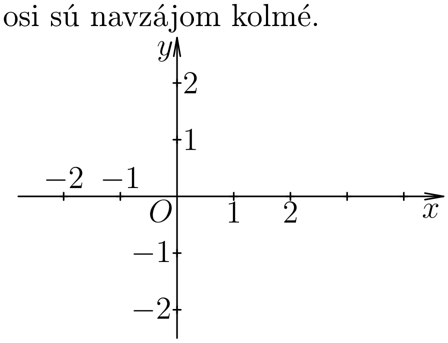
Ž: *Tak to si vôbec neviem predstaviť...*

U: Tak pozri, namiesto toho, aby sme našli nejaký neznámy bod rysovaním, úlohu preložíme do jazyka aritmetiky a riešime sústavy rovníc. Alebo napríklad pri hľadaní priesečnice dvoch rôznobežných rovín potrebujeme istú dávku priestorovej predstavivosti, v analytickej geometrii stačí namiesto toho vyriešiť sústavu rovníc. Ak sústava nemá riešenie, roviny sú rovnobežné, ak má sú rôznobežné.

Ž: *To už znie zaujímavo, no uvidíme.*

U: Analytická geometria hovorí o tom, že svet čísel a geometria sú podobné. Skúmaním a poznaním jedného sa dozvedáme o druhom.

U: Základom práce v analytickej geometrii je priradiť bodu súradnice, a to si vyžaduje pracovať s príslušnou súradnicovou sústavou. ***Súradnicová sústava*** v rovine pozostáva z dvoch navzájom kolmých priamok, ktoré nazývame osi, s rovnakou mierkou. Vodorovnú spravidla označujeme os x, zvislú os y. Sústava je potom ***ortonormálna*** - má rovnakú mierku na oboch osiach a osi sú navzájom kolmé.

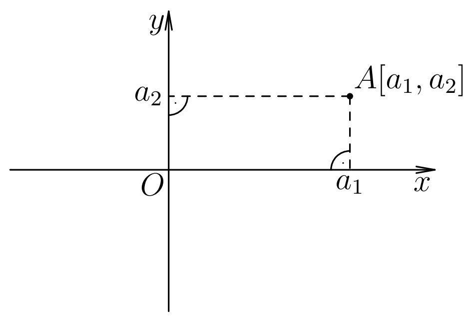


Ž: *Takýto obrázok používame aj pri grafoch funkcií a aj vo fyzike. Pojem „ortonormálna“ je ale krkolomný.*

U: Skladá sa z dvoch slov: „orto“ - čo znamená kolmý a „normálna“ - vo význame rovnakej mierky na oboch osiach. Sústava súradníc sa nazýva aj ***karteziánska***, podľa zakladateľa analytickej geometrie Reného Descartesa.

Ž: *To mi nedáva zmysel. Snáď by sa mala volať Descartovská a nie karteziánska.*

U: René Descartes sa vlastným menom volal Cartezius. V karteziánskej sústave súradníc priradíme každému bodu dve čísla. Napríklad bodu A čísla a_1 a a_2, ako usporiadanú dvojicu. Budú to ***súradnice bodu*** $A[a_1; a_2]$. Prvé číslo a_1 nazývame $x-$ová súradnica bodu, druhé číslo v usporiadanej dvojici a_2 $y-$ová súradnica. Daný bod v sústave súradníc zakreslíme nasledovne: Na osi x nájdeme hodnotu a_1 a cez tento bod zostrojíme rovnobežku s druhou osou y. Podobne na osi y nájdeme hodnotu a_2 a cez tento bod zostrojíme rovnobežku s osou x. Bod roviny, v ktorom sa pretli naše rovnobežky bude obrazom bodu A so súradnicami a_1, a_2.



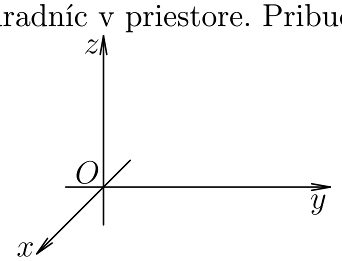
Všetky body, ktoré sa nachádzajú na osi x majú $y-$ovú súradnicu nulovú.

Ž: *Zrejme všetky body nachádzajúce sa na osi y majú $x-$ovú súradnicu nulovú.*

U: Áno. Priesečník osí nazývame začiatok sústavy súradníc a označujeme ho O.

Ž: *A keďže tento bod leží na oboch osiach bude mať nulové obe súradnice.*

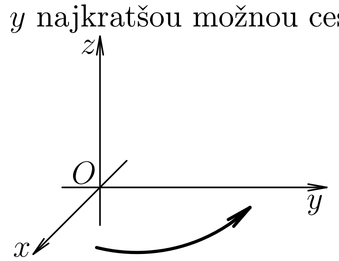
U: Podobne sa zavedie sústava súradníc v priestore. Pribudne tretia os, os z.



Sústava je opäť ortonormálna.

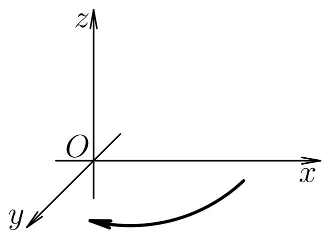
Ž: *Znamená to, že všetky tri osi sú navzájom kolmé. A aj mierka je na všetkých osiach rovnaká.*

U: Áno. Sústava súradníc sa naviac nazýva ***pravotočivá***, nakoľko ak chceme stotožniť kladnú časť osi x s kladnou časťou osi y najkratšou možnou cestou ideme do prava.



Ž: *To existuje aj ľavotočivá?*

U: Samozrejme, tu je obrázok:



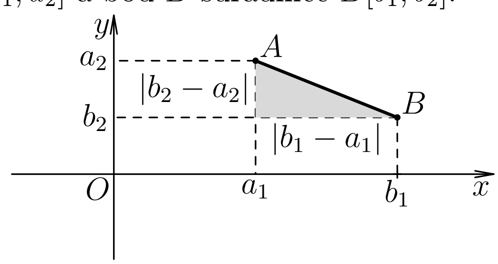
Každý bod zakreslený v sústave súradníc v priestore má tri súradnice ako usporiadanú trojicu čísel, napríklad $A[a_1; a_2; a_3]$. V príkladoch si potom konkrétne ukážeme, ako znázornime body v sústave súradníc v priestore. Tak si to zhrnieme.

Ž: *Bod A zakreslený v sústave súradníc v rovine má dve súradnice a_1, a_2; bod A zakreslený v sústave súradníc v priestore má tri súradnice a_1, a_2, a_3.*

súradnice bodu v rovine $A[a_1; a_2]$
súradnice bodu v priestore $A[a_1; a_2; a_3]$

Ž: *Naozaj, je to tak, ako ste hovorili na začiatku. Namiesto bodov máme čísla ...*

U: Bod už má súradnice, namiesto s bodom, môžeme pracovať s číslami, jeho súradnicami. Ako pomocou súradníc určíme vzdialenosť dvoch bodov? Pomôžeme si ešte obrázkom, nech bod A má súradnice $A[a_1; a_2]$ a bod B súradnice $B[b_1; b_2]$.



Vzdialenosť dvoch bodov v rovine potom vypočítame ako odmocninu zo súčtu druhej mocniny rozdielu prvých súradníc a druhej mocniny rozdielu druhých súradníc, čiže odmocnina z $b_1 - a_1$ to na druhú plus $b_2 - a_2$ a to na druhú.

Ž: *Áno, na obrázku pekne vidno pravouhlý trojuholník a toto je vlastne použitie Pytagorovej vety.*

U: V priestore je situácia podobná, stačí si zapamätať, že vo vzorci pribudnú tretie súradnice.

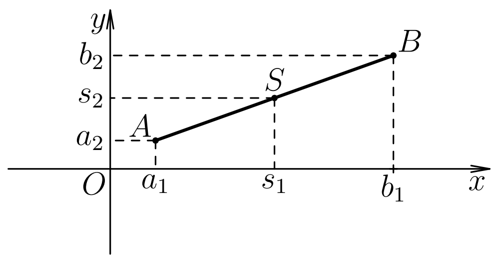
vzdialenosť dvoch bodov v rovine, $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

vzdialenosť dvoch bodov v priestore, $A[a_1; a_2; a_3]$, $B[b_1; b_2; b_3]$

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

U: Ak poznáme súradnice krajných bodov úsečky, vieme pomocou nich vypočítať aj ***súradnice stredu*** tejto úsečky. Na ľahšie pochopenie si pomôžeme obrázkom:



Označíme stred úsečky S a jeho súradnice $S[s_1; s_2]$.

Ž: *Z obrázka vidno, že aj súradnica s_1 leží presne v strede medzi súradnicami a_1 a b_1.*

U: Správne To znamená, že

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Tento vzorec sa ľahko zapamätá, pretože to je vlastne aritmetický priemer súradníc krajných bodov. Analogicky to platí pre druhú súradnicu a v priestore tiež pre tretiu súradnicu. Všetko je zhrnuté v rámčeku.

súradnice stredu úsečky AB v rovine, $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$

$$S[\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}]$$

súradnice stredu úsečky v priestore, $A[a_1; a_2; a_3]$, $B[b_1; b_2; b_3]$

$$S[\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}; \frac{a_3 + b_3}{2}]$$

Ž: *Stále neviem načo mi bude dobré poznať súradnice práve stredu úsečky.*

U: Nezabúdaj, že ide o geometriu. Zostrojenie stredu úsečky patrí medzi základné konštrukcie. Často ho potrebujeme, napr. ťažnica trojuholníka vychádza zo stredu strany, alebo uhlopriečky v rovnobežníku sa pretínajú vo svojich stredoch.

Príklad 1: *Sú dané body $K[-7;6]$, $L[3;-6]$.*

(a) Vypočítajte dĺžku úsečky KL.

(b) Vypočítajte súradnice bodu S, ktorý je stredom úsečky KL.

(c) Vypočítajte súradnice bodu M tak, aby bod L bol stredom úsečky KM.

Ž: *Dĺžku úsečky vypočítame podľa vzorca*

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

U: Aspoň by sme ho mohli prepísať na našu úsečku, volá sa predsa KL.

Ž: *Dobre, takže takto:*

$$|KL| = \sqrt{(\ell_1 - k_1)^2 + (\ell_2 - k_2)^2}.$$

Len dúfam, že si budem tento vzorec vždy pamätať, ináč som v háji.

U: Keď sa naň poriadne pozrieš, zistíš, že nie je taký zložitý. Je to vlastne len použitie Pytagorovej vety, a tú si snáď pamätáš. Naviac budeme ho veľmi často používať, takže časom sa ti uloží v pamäti.

Ž: *Dosadíme súradnice a vypočítame výsledok*

$$|KL| = \sqrt{(3+7)^2 + (-6-6)^2} = \sqrt{100+144} = \sqrt{244} = \sqrt{4 \cdot 61} = 2\sqrt{61}.$$

U: Dĺžka úsečky KL je $2\sqrt{61}$.

Ž: *Vypočítať súradnice stredu úsečky bude tiež jednoduché, aj tu máme vzorec. Napíšem ho teraz už rovno pre naše body:*

$$s_1 = \frac{k_1 + \ell_1}{2}, \quad s_2 = \frac{k_2 + \ell_2}{2}.$$

Dosadíme :

$$s_1 = \frac{-7+3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$
$$s_2 = \frac{6-6}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

U: Bod S má súradnice $S[-2;0]$. Súradnice stredu sa niekedy dajú vypočítať aj spamäti, rýchlejšie. Tieto súradnice sú aritmetickým priemerom súradníc krajných bodov, z geometrického hľadiska to znamená, že ak si súradnice predstavíme na číselnej osi, súradnica stredu úsečky je v strede medzi súradnicami krajných bodov. Napríklad x-ové súradnice krajných bodov sú -7 a 3. Ktoré číslo leží na číselnej osi v strede medzi číslami -7 a 3 ?

Ž: *Medzi číslom -7 a číslom 3 je 10 jednotiek, polovica je 5, čiže k číslu -7 pripočítam 5 a dostanem -2. Naozaj vyšlo to a je to také jednoduché!*

U: Ešte lepšie to vidno na druhej súradnici.

Ž: *Jasné, medzi -6 a 6 je v strede 0.*

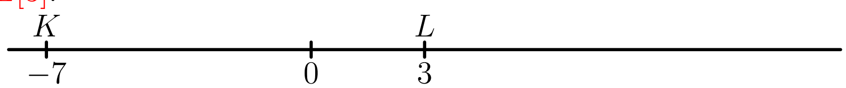
U: Teraz poďme na poslednú úlohu.

Ž: *Tu je situácia obrátená, máme stred a potrebujeme krajný bod. Môžeme použiť opäť vzorec. Ale nie aj tu nejaký zlepšovák, stačí sa len pozrieť a máme to?*

U: O súradniciach platí predsa stále to isté, skúsme si prvé súradnice načrtnúť na číselnú os.

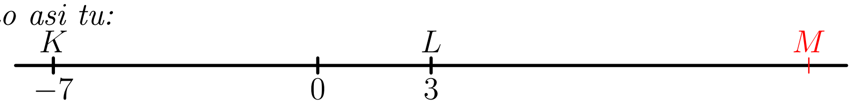
Ž: *Nerozumiem, ako si ich mám načrtnúť.*

U: Predstavme si na chvíľu, že naše body majú len jednu súradnicu, sú na priamke - číselnej osi, $K[-7], L[3]$.



U: Zakresli bod M tak, aby bod L bol stredom úsečky KM.

Ž: *Zakreslím ho asi tu:*



U: Akú bude mať súradnicu, pri akom čísle bude?

Ž: *Od čísla -7 k číslu 3 je 10 jednotiek, tak ešte pridám 10 na druhú stranu,* $3 + 10 = 13$ *. Bude mať súradnicu 13.*

U: Výborne, to bude prvá súradnica. Skúsme teraz druhú už bez obrázka.

Ž: *Od -6 k 6 je 12 jednotiek, tak pridám 12 na druhú stranu a mám* $6 + 12 = 18$**.** *Bod M bude mať súradnice* $M[13; 18]$.

Úloha 1: *Sú dané body* $A[3; 4]$, $B[5; 2]$. *Vypočítajte dĺžku úsečky* AB.

Výsledok: $|AB| = 2\sqrt{2}$

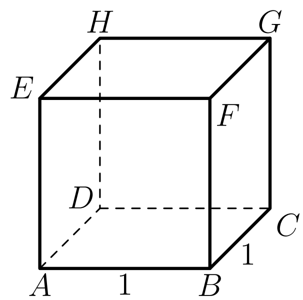
Úloha 2: *Daná je úsečka* AB *so stredom v bode* S, *pričom* $A[-3; 0; 2]$ *a* $S[7; 1; 0]$. *Určte súradnice bodu* B.

Výsledok: $B[17; 0; 0]$

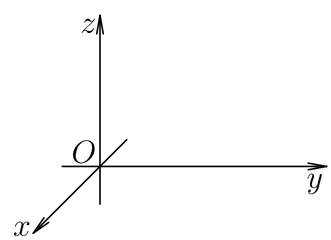
Príklad 2: *Vo voľnom rovnobežnom premietaní zakreslite karteziánsku sústavu súradníc. Potom v nej zakreslite body* $A[0;0;5]$, $B[0;-2;0]$, $C[1;0;0]$, $D[3;2;0]$, $E[2;3;4]$.

Ž: *Nerozumiem celkom pojmu voľné rovnobežné premietanie.*

U: Voľné rovnobežné premietanie je spôsob zakresľovania trojrozmerných objektov do roviny, ktorú tvorí napríklad náš zošit. Určite si spomínaš na zakreslenie trojrozmerného telesa kocky do roviny zošita.

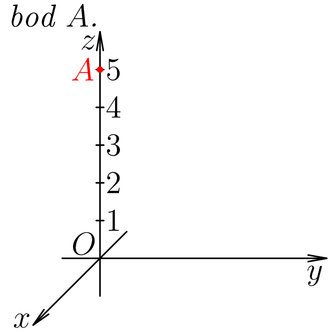


Podobne zakreslíme sústavu súradníc v priestore, ktorá pozostáva z troch navzájom kolmých osí.

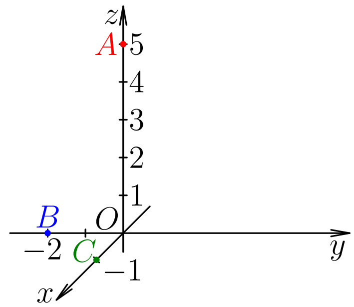


U: Os x je kolmá na priemetňu (t.j. zošit), preto je znázornená napríklad pod 45° uhlom a všetky dieliky tam majú napríklad polovičnú veľkosť, podobne ako bočná hrana kocky BC.

Ž: *Body A, B, C sa zakreslia ľahko, vždy majú iba jednu súradnicu nenulovú a tak budú ležať na niektorej osi. Bod A má tretiu súradnicu rovnú 5, ostatné sú nulové, preto si vyznačím na osi z 5 dielikov a tam bude bod A.*

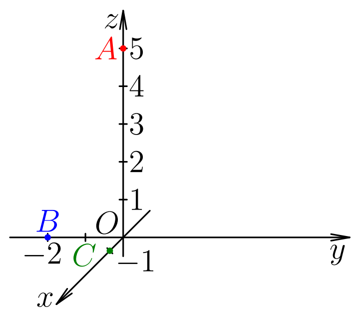


Ž: *Podobne to spravíme aj s bodmi B, C.*



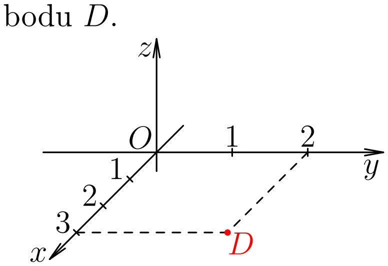
U: Šikovne si znázornil bod B, potreboval si zápornú časť y-ovej osi. Ale pri znázorňovaní bodu C si zabudol, že na osi x sú dieliky polovičnej veľkosti.

Ž: *Tak to opravíme:*



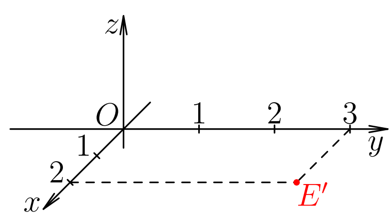
Ž: *Ako ale znázornime ostatné body?*

U: Bod D má nulovú tretiu súradnicu, preto leží v rovine xy, ktorú určujú osi x a y. Znázornime ho úplne prirodzene. Na osi x si nájdeme 3 dieliky, na osi y 2 dieliky a pomocou rovnobežiek nájdeme obraz bodu D.

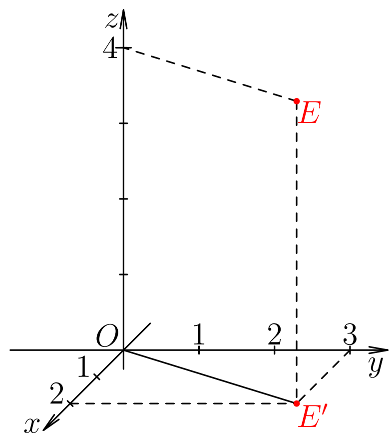


U: Pri bode E budeme postupovať podobne. Najprv si nájdeme pomocný bod, označíme ho E' so súradnicami $E'[2;3;0]$.

Ž: *Má také isté súradnice ako bod E, len tretia je nulová. Ten už zakresliť viem, bude v rovine xy.*



U: Je to kolmý priemet bodu E do roviny xy. Teraz nám stačí „zdvihnúť“ ho v smere osi z o príslušný počet jednotiek.



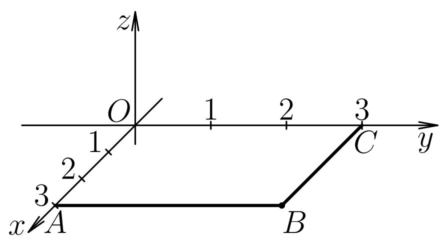
U: Môžeme si všimnúť, že ak spojíme obraz bodu E s číslom 4 na osi z, je táto úsečka rovnobežná s úsečkou OE', kde O je začiatok súradnicovej sústavy.

Príklad 3: *Daná je kocka $ABCDEFGH$ tak, že $A[3;0;0]$, $B[3;3;0]$, $C[0;3;0]$. Určte súradnice ostatných vrcholov kocky.*

Ž: *Je to kocka v trojrozmernej sústave súradníc. Pomohol by mi obrázok?*

U: Áno, dokonca by z neho malo byť všetko jasné. Zakreslime si dané body v sústave súradníc.

Ž: *Bod A leží na osi x, bod B v rovine xy a bod C na osi y. To viem, lebo sa stačí pozrieť na súradnice.*

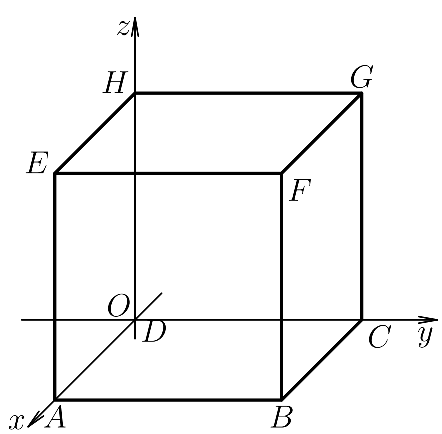


U: Skúsme teraz do obrázka dokresliť kocku. Samozrejme predpokladáme, že kocka je označená obvykle, $ABCD$ je dolná podstava a $EFGH$ je horná podstava.

Ž: *No dolná podstava kocky sa tu už pekne ukazuje, asi bude bod D v začiatku sústavy súradníc, čo znamená, že má súradnice $D[0;0;0]$.*

U: Výborne a teraz dokreslime hornú podstavu.

Ž: *Kreslím obrázok:*



U: Opäť výborne. Začnime od bodu H, ten bude asi najľahší.

Ž: *Asi áno, lebo leží na osi z, čiže bude mať len súradnicu z.*

U: Presnejšie povedané, ostatné budú nulové. Aká bude táto súradnica?

Ž: *To neviem.*

U: Ale veď je to jednoduché. Aká je vzdialenosť medzi bodmi H a D ?

Ž: *Je to dĺžka hrany kocky.*

U: A to je koľko?

Ž: *To opäť neviem.*

U: Hrana kocky je napríklad aj úsečka DC, pozri sa na obrázok a povedz koľko to je.

Ž: *Jasné, to sú 3 dieliky. Teda aj bod H bude o 3 dieliky vyššie ako bod D, čiže súradnice sú* $H[0; 0; 3]$

U: Všimnime si teraz bod G. Nachádza sa v rovine yz. Čo to znamená?

Ž: *Nebude mať x-ovú súradnicu, teda bude ju mať nulovú.*

U: Navyše y-ovú súradnicu má takú istú ako bod C a z-ovú ako bod H.

Ž: *Potom už vieme všetko, súradnice sú:* $G[0; 3; 3]$.

U: Bod E pôjde podobne, skús to teraz sám.

Ž: *Bod E leží v rovine xz, to znamená nulová bude y-ová súradnica. x-ová bude ako pri bode A, z-ová ako pri bode H. Zhrnieme to a vieme, že bod E má súradnice* $E[3; 0; 3]$.

U: Ostáva bod F.

Ž: *Ten asi neleží v žiadnej peknej rovine, je vytiahnutý von.*

U: Pozrime sa s ktorými bodmi má rovnaké súradnice.

Ž: *Je hore nad bodom B, čiže mal by mať také ako on, akurát, že bude vyššie.*

U: Správne. Prvé dve súradnice budú zhodné s bodom B, z-ová sa bude líšiť o 3 dieliky.

Ž: *Teraz už vieme aj súradnice bodu F:* $F[3; 3; 3]$.

Príklad 4: *Daný je trojuholník ABC pričom $A[1; 2; 3]$, $B[0; -5; 2]$, $C[2; 3; 1]$. Vypočítajte jeho obvod.*

Ž: *Obvod trojuholníka je súčet dĺžok všetkých jeho strán.*

U: A my potrebujeme práve tieto dĺžky vypočítať.

Ž: *Je to až neuveriteľné, čo všetko sa dá zo súradníc vypočítať!*

U: Počítame postupne veľkosť každej úsečky.

Ž: *Veľkosť úsečiek vypočítame podľa vzorca:*

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Stačí len dosadiť súradnice:

$$|AB| = \sqrt{(0-1)^2 + (-5-2)^2 + (2-3)^2}$$
$$|AB| = \sqrt{1^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{51}.$$

U: Podobne ostané úsečky.

Ž: $|BC| = \sqrt{2^2 + 8^2 + 1^2} = \sqrt{69}$
$|AC| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

U: Aký bude mať trojuholník obvod?

Ž:

$$o = |AB| + |BC| + |AC| = \sqrt{51} + \sqrt{69} + \sqrt{6}.$$

U: Výborne. Zamyslel si sa však nad tým, či je to vôbec trojuholník?

Ž: *Prečo by nemal byť?*

U: Ak si zvolím tri body v priestore, nemusia vždy tvoriť trojuholník. Ak by ležali na jednej priamke, trojuholník neexistuje. My však máme vypočítané dĺžky jeho strán. Stačí len overiť trojuholníkovú nerovnosť.

Ž: *Na to som mohol prísť aj sám. Stačí overiť, či súčet dvoch najmenších strán je väčší ako strana tretia. V našom prípade* $\sqrt{6} + \sqrt{51} > \sqrt{69}$. *Trojuholník existuje a my sme nepočítali zbytočne.*

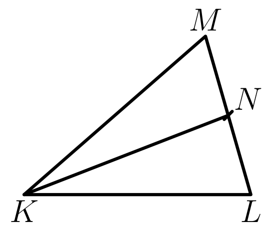
Úloha 1: *Daný je trojuholník ABC pričom $A[2; -1; -2]$, $B[2; -4; -5]$, $C[-1; -4; -2]$. Vypočítajte jeho obvod.*

Výsledok: $o = 9\sqrt{2}$

Príklad 5: *Daný je trojuholník KLM, pričom* $K[5;5]$, $L[3;2]$, $M[1;2]$. *Vypočítajte dĺžku ťažnice na stranu* ML.

Ž: *Asi si nakreslím obrázok.*

U: Dobre, ale nemusíme sa zdržiavať zakresľovaním trojuholníka do sústavy súradníc, postačí nám aj obyčajný náčrt.



U: Zakreslime aj ťažnicu.

Ž: *Ťažnica…hm, zabudol som, čo to je, ešte tak ťažisko.*

U: Ťažnica je úsečka, ktorej krajnými bodmi sú vrchol trojuholníka a stred protiľahlej strany.

Ž: *Naša ťažnica bude úsečka, ktorá spája vrchol* K *a stred strany* ML.

U: Označme ho N. Aby sme mohli vypočítať dĺžku ťažnice, potrebujeme poznať súradnice jej krajných bodov.

Ž: *Súradnice bodu* K *poznáme, ostáva nám určiť bod* N. *Je to stred úsečky* ML, *teda jeho súradnice sú aritmetickým priemerom súradníc krajných bodov* M, L.

$$n_1 = \frac{\ell_1 + m_1}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$n_2 = \frac{\ell_2 + m_2}{2} = \frac{2+2}{2} = 2.$$

U: Teda bod N má súradnice $N[2;2]$.

Ž: *Môžeme počítať dĺžku ťažnice. Vypočítame ju podľa vzorca pre veľkosť úsečky.*

$$|KN| = \sqrt{(n_1 - k_1)^2 + (n_2 - k_2)^2}$$

$$|KN| = \sqrt{(2-5)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}.$$

Ž: *Dĺžka ťažnice je* $\sqrt{18}$

U: Je to síce správne, ale výsledok sa dá zapísať aj krajšie, skúsme to čiastočne odmocniť.

Ž: *18=9.2, to znamená, že dĺžka ťažnice je* $3\sqrt{2}$.

Úloha 1: *Vypočítajte dĺžky ťažníc v trojuholníku PQR, ak* $P[1;4;-1]$, $Q[-5;0;-1]$ *a* $R[-3;-2;-1]$.

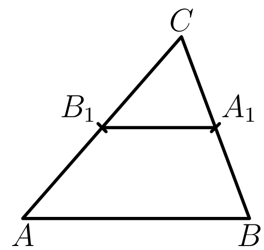
Výsledok: $|PP_1| = 5\sqrt{2}$, $|QQ_1| = \sqrt{17}$, $|RR_1| = \sqrt{17}$

Príklad 6: *Body* $A[0;0]$, $B[6;8]$, $C[12;4]$ *sú vrcholmi trojuholníka* ABC. *Vypočítajte dĺžku strednej priečky tohto trojuholníka rovnobežnej so stranou* AB.

Ž: *Potreboval by som si zopakovať, čo je to stredná priečka trojuholníka.*

U: Stredná priečka trojuholníka je úsečka, ktorá spája stredy dvoch strán trojuholníka. Má pekné vlastnosti, je rovnobežná s treťou stranou a má polovičnú veľkosť ako táto tretia strana.

Ž: *Spája stredy strán, takže budem asi potrebovať súradnice stredov strán trojuholníka. Lenže ktorých, aby bola rovnobežná s* AB. *Asi si nakreslím obrázok.*



U: Stredy strán označme A_1, B_1.

Ž: A_1 *je stred* BC, *teda jeho súradnice sú aritmetickým priemerom príslušných súradníc bodov* B *a* C. *Preto bod* A_1 *má súradnice*

$$A_1[\frac{6+12}{2};\frac{8+4}{2}],$$

čo znamená, že bod A_1 *má súradnice* $A_1[9;6]$

Ž: *Podobne, bod* B_1 *je stred úsečky* AC. *Jeho súradnice sú potom*

$$B_1[\frac{12+0}{2};\frac{4+0}{2}],$$

teda $B_1[6;2]$.

U: Teraz môžeme počítať dĺžku strednej priečky.

Ž:

$$|A_1B_1| = \sqrt{(6-9)^2+(2-6)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Dĺžka strednej priečky je 5.

U: Výborne. Úloha sa však dala vyriešiť aj ináč. Ukážeme si teraz iný spôsob. Ak si na začiatku pozorne počúval, vieš, že stredná priečka má polovičnú veľkosť ako strana s ktoru je rovnobežná. Stačí preto vypočítať veľkosť strany AB a výsledok vydeliť dvoma.

Ž: *Tak to skúsme:*

$$|AB| = \sqrt{(6-0)^2+(8-0)^2} = \sqrt{6^2+(8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$$

U: Stredná priečka má polovičnú veľkosť, čiže 5.

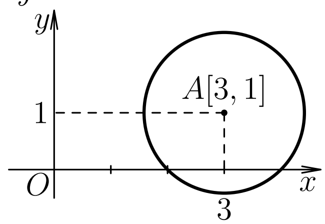
Ž: *Výsledok je rovnaký, ale menej sme počítali, nemuseli sme počítať súradnice stredov strán.*

Úloha 1: *Body* $A[1; 2; -3]$, $B[-3; 3; -2]$, $C[-1; 1; -1]$ *sú vrcholmi trojuholníka* ABC. *Vypočítajte dĺžku strednej priečky tohto trojuholníka rovnobežnej so stranou* BC.

Výsledok: $1,5$

Príklad 7: *Na osi x nájdite bod B, ktorý má od bodu $A[3;1]$ vzdialenosť $\sqrt{2}$.*

Ž: *Môžeme si to zakresliť do sústavy súradníc:*



U: A teraz zoberieme rysovacie pomôcky a úlohu narysujeme? Pri práci so súradnicami nemusíme vždy všetko kresliť, stačí narábať s číslami. Ale keď už máme obrázok, môžeme ho využiť, koľko riešení bude mať úloha?

Ž: *Narysoval by som kružnicu so stredom v bode A a s polomerom $\sqrt{2}$ a tam, kde sa pretne s osou x bude riešenie. Vyzerá to tak, že by mohli byť dve.*

U: Áno vyzerá to tak, nakoľko $\sqrt{2}$ je viac ako 1. Teraz budeme počítať. Máme nájsť bod na osi x tak, si ho nejako označme a tiež aj jeho súradnice.

Ž: *Bude to bod B so súradnicami $B[b_1;b_2]$*

U: Nevieme niečo bližšie o jeho súradniciach? Leží predsa na osi x.

Ž: *Všetky body na osi x majú y-ovú súradnicu nulovú, takže $B[b_1;0]$*

U: Keď už vieme, že neznáma bude len jedna súradnica, navrhujem pre zjednodušenie označiť ju namiesto b_1 iba b. Takže bod B má súradnice $B[b;0]$ Vyjadrime teraz vzdialenosť bodov A a B.

Ž: *Vzdialenosť bodov vypočítame podľa vzorca*

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Po dosadení známych súradníc dostávame:

$$|AB| = \sqrt{(b-3)^2 + (0-1)^2}.$$

U: Správne. A táto veľkosť sa má rovnať $\sqrt{2}$. Zostavme rovnicu a vyriešme ju.

Ž: *Rovnica bude vyzerať takto:*

$$\sqrt{(b-3)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Zátvorku môžeme umocniť a čo sa dá sčítať:

$$\sqrt{b^2 - 6b + 10} = \sqrt{2}.$$

U: Obe strany rovnice umocníme na druhú.

Ž: *Dobre. Umocníme a máme*

$$b^2 - 6b + 10 = 2.$$

Upravíme:

$$b^2 - 6b + 8 = 0.$$

U: Dostali sme kvadratickú rovnicu, ktorá bude mať, podľa očakávania dva korene, nájdime ich.

Ž: *Rovnica je pekná, skúsim ľavú stranu rozložiť na súčin.*

$$(b-4)\cdot(b-2)=0.$$

Korene sú dva a to $b_1 = 4$ *alebo* $b_2 = 2$

U: Výborne. Aké súradnice majú hľadané body?

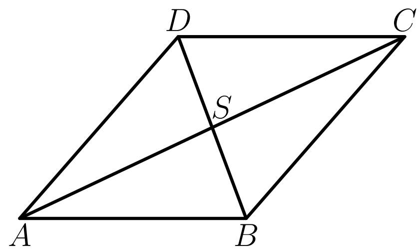
Ž: $B_1[4;0]$ *a* $B_2[2;0]$.

Úloha 1: *Na osi* y *nájdite bod* B, *ktorý má od bodu* $A[3;1;4]$ *vzdialenosť* 5.

Výsledok: $B[0;1;0]$

Príklad 8: *Súradnice dvoch susedných vrcholov rovnobežníka $ABCD$ sú $A[-\frac{9}{2}; 7]$, $B[2; 6]$. Priesečník uhlopriečok tohto rovnobežníka je $S[3; \frac{3}{2}]$. Určte súradnice ostatných vrcholov rovnobežníka.*

Ž: *Načrtneme si obrázok.*



U: Akú vlastnosť má priesečník uhlopriečok rovnobežníka?

Ž: *Je to bod, kde sa pretnú uhlopriečky a učili sme sa, že v rovnobežníku sa uhlopriečky rozpoľujú.*

U: Čo to znamená?

Ž: *Bod S ich delí na dve rovnaké polovice.*

U: Môžeme povedať, že bod S je stredom úsečiek AC a BD.

Ž: *Áno, ale neviem načo mi to bude, lebo súradnice bodov C a D nepoznám.*

U: Ale poznáme súradnice bodu S. Teraz máme situáciu obrátenú, poznáme súradnice jedného krajného bodu úsečky a súradnice jej stredu. Potrebujeme druhý krajný bod. Tak napríklad S je stred úsečky AC, preto platí

$$s_1 = \frac{a_1 + c_1}{2}.$$

Neznáma je c_1, vyjadrime si ju.

Ž: *Dobre, vyjadrujem:*

$$2s_1 = a_1 + c_1$$

$$c_1 = 2s_1 - a_1.$$

U: Výborne, teraz už len dosadíme.

Ž: $c_1 = 2 \cdot 3 - (-\frac{9}{2}) = \frac{21}{2}$ *Teraz pôjdeme na druhú súradnicu.*

U: Nakoľko sme to odvodili všeobecne, nie je potrebné to opäť odvádzať, bude to to isté , akurát zameníme prvé súradnice za druhé.

Ž: *To je dobrý nápad, aspoň si ušetrím písanie.*

$$c_2 = 2s_2 - a_2$$

$$c_2 = 2 \cdot \frac{3}{2} - 7 = -4.$$

U: Bod C má súradnice $C[\frac{21}{2}; -4]$.

U: Ostáva nám bod D.

Ž: *Myslím, že to bude to isté, len si pomôžem súradnicami bodu B.*

U: Skúsme to vypočítať bez vzorcov, len cez geometrickú predstavu.

Ž: *Dobre, skúsim to. Najprv prvé súradnice. Prvá súradnica bodu B je 2, bodu S je 3. Od 2 k 3 je jeden dielik, tak aj jeden dielik pridám na druhú stranu, k súradnici bodu S, dostávam prvú súradnicu 4. Teraz to isté s druhými súradnicami. Druhá súradnica bodu B je 6, bodu S je $\frac{3}{2}$. Tu budú asi problémy, zlomky sa mi veľmi nepáčia.*

U: Len sa neboj, zlomky nemôžu byť takým strašiakom. Koľko dielikov bude od 6 k $\frac{3}{2}$?

Ž: *Tri polovice to je $1,5$, takže k 6 to bude štyri a pol dielika. Toľko pridám na druhú stranu, za $\frac{3}{2}$, to bude $\frac{3}{2} - 4,5 = -3$ Druhá súradnica bude -3.*

U: Bod D má súradnice $D[4; -3]$.

Ž: *Vzorce sú niekedy istejšie, ak by tam boli horšie zlomky, možno by som to nezvládol.*

Úloha 1: *Dané sú body $A[3; -20; 0]$, $B[3; -4; 0]$ a $C[3; 1; 5\sqrt{3}]$. Určte súradnice bodu D tak, aby štvoruholník $ABCD$ bol rovnobežník.*

Výsledok: $D[3; -15; 5\sqrt{3}]$