Smernicový tvar rovnice priamky

RNDr. Viera Vodičková

U: Medzi prevratné objavy analytickej geometrie patrí to, že s priamkou nenarábame ako s geometrickým objektom, ale popisujeme ju rovnicou.

Ž: *To už poznám. Viem napísať parametrické rovnice priamky i všeobecnú rovnicu priamky.*

U: Napriek tomu bola priamke priradená rovnica už dávno predtým, v inej oblasti matematiky. Pamätáš sa na funkcie?

Ž: *Funkcie? To bol taký predpis, vlastne priradenie, x sme priraďovali y.*

U: V podstate áno. K funkciám neodmysliteľne patria ich grafy.

Ž: *Á, to myslíte všetky tie rôzne čiary, ktoré sme znázorňovali - zakresľovali do sústavy súradníc. Niektoré z nich boli priamky.*

U: Práve tie nás budú zaujímať. Funkcie, ktorých grafom je priamka, nazývame lineárne. Boli dané predpisom:

$$f : y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \ a \neq 0.$$

Ž: *Pamätám sa na ne. Lineárne ako línia - čiara.*

U: Povedal si, že poznáš všeobecnú rovnicu priamky

$$ax + by + c = 0.$$

Táto priamka je grafom istej lineárnej funkcie. Vieš akej?

Ž: *Chcete túto všeobecnú rovnicu „prerobiť“ na predpis funkcie?*

U: Presne tak. Predpis funkcie získame tak, že z rovnice vyjadríme y.

Ž: *To by som zvládol aj ja. Členy ax a c prenesieme na druhú stranu:*

$$by = -ax - c.$$

Teraz stačí už len vydeliť a máme:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

U: Pozor! Mohol si to urobiť len za podmienky $b \neq 0$.

Ž: *Rovnica vyzerá dosť zložito.*

U: Aby vzniknutá rovnica pôsobila lepším dojmom, premenujeme si koeficienty. Koeficient pri x sa zvykne označovať ako k, a teda $k = -\frac{a}{b}$. Zvyšný koeficient sa označuje ako q, t. j. $q = -\frac{c}{b}$. Rovnica priamky bude mať potom tvar:

$$y = kx + q, \quad k, q \in \mathbb{R}.$$

Tento tvar rovnice nazývame ***smernicový tvar rovnice priamky***.
Vrátime sa ešte k podmienke $b \neq 0$. Pre ktoré priamky platí $b = 0$?

Ž: *No … to budú priamky, ktorých všeobecná rovnica je:*

$$ax + c = 0.$$

U: Výborne. V tejto rovnici y nevystupuje. Preto sa nedá ani vyjadriť. Všeobecnú rovnicu však môžeme v tomto prípade upraviť na tvar:

$$x = -\frac{c}{a}.$$

Nie je to smernicový tvar rovnice priamky, ale dáva nám predstavu o polohe priamky v sústave súradníc.

Ž: *Jasné! To je ako napr. $x = 4$. Sú to priamky rovnobežné s osou y.*

U: Áno. Takže: ***priamky rovnobežné s osou y nemajú smernicový tvar.***

Ž: *Rád by som vedel, prečo sa volá smernicový - taký zvláštny názov. Dá sa na niečo použiť? Veď je to len inak upravená všeobecná rovnica!*

U: Všetko sa dozvieš. Tak ako z parametrických rovníc vieme určiť smerový vektor, zo všeobecnej rovnice normálový vektor, tak aj smernicový tvar rovnice priamky má svoj význam. Pozrieme sa na význam koeficientov k a q. Majme priamku danú smernicovým tvarom $y = kx + q$. Nakoľko nie je rovnobežná s osou y, pretína ju v bode, ktorý označíme ako Q. Aké bude mať súradnice?

Ž: *Bod Q leží na osi y, preto má prvú súradnicu rovnú nule.*

U: Správne. Dosadíme za x - prvú súradnicu 0 do rovnice priamky a získame y - druhú súradnicu.

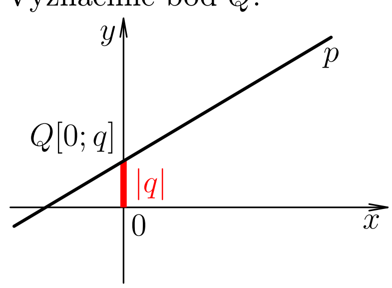
Ž: *Dobre.*

$$y = k \cdot 0 + q.$$

Z toho dostávam:

$$y = q.$$

U: Bod Q, priesečník priamky $y = kx + q$ a osi y má súradnice $Q[0; q]$. Zakreslíme si teraz priamku v sústave súradníc. Vyznačíme bod Q.



U: Z obrázka vidíme, že veľkosť úsečky $|OQ| = |q|$.

Ž: *Prečo ste použili absolútnu hodnotu?*

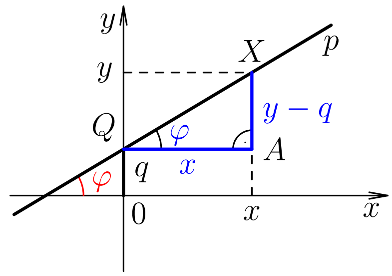
U: Druhá súradnica bodu Q môže byť aj záporná, ale veľkosť úsečky je nezáporné číslo. Hovoríme, že $|q|$ ***udáva veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi y.***

U: Skús vyjadriť koeficient k zo smernicového tvaru.

Ž: *To je jednoduché. Odčítam q a vydelím s x, samozrejme, ak nie je* 0.

$$k = \frac{y-q}{x}.$$

U: Dobre a teraz budeme pokračovať na našom obrázku. Na priamke si vyznačíme ľubovoľný bod $X[x;y]$. Zostrojíme si pomocný trojuholník QAX, sleduj obrázok.



U: Uhol XQA označíme ako φ. Trojuholník QAX je pravouhlý, preto môžeme vyjadriť uhol φ pomocou funkcie tangens.

Ž: *To by šlo. Tangens je protiľahlá odvesna k priľahlej. Pre náš prípad je to*

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{|XA|}{|QA|}.$$

U: Áno. Z obrázka je jasné, že $|XA| = y - q$ a $|QA| = x$. Preto

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y-q}{x}.$$

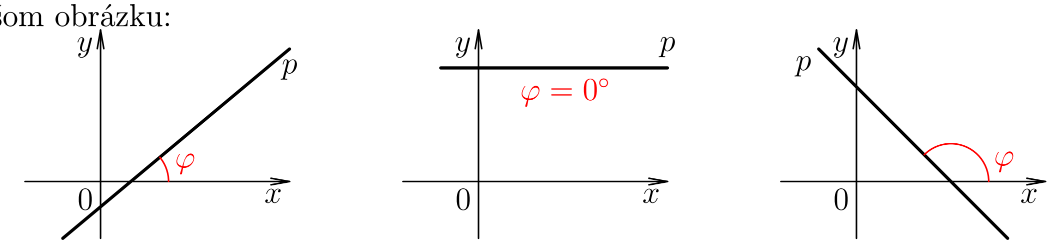
Ž: *Je to presne ten istý výraz ako keď som vyjadril koeficient k!*

U: Áno, platí teda:

$$k = \mathrm{tg}\varphi.$$

Ž: *Bolo to pekné. Ale čo je vlastne φ? Čím je tento uhol pre priamku významný?*

U: Pozrieme sa ešte raz na obrázok. Uhol φ je tiež uhol, ktorý zviera priamka a os x - je vyznačený červenou farbou. Tento uhol sa nazýva ***smerový uhol priamky***. ***Smerovým uhlom priamky p nazývame orientovaný uhol, ktorý zviera kladná časť osi x s priamkou p***. Platí $\varphi \in \langle 0°; 180°)$. Niekoľko priamok s ich smerovými uhlami máš na ďalšom obrázku:



U: ***Tangens smerového uhla nazývame smernicou priamky.***

Ž: *Koeficient k sa teda volá smernica a je to tangens smerového uhla.*

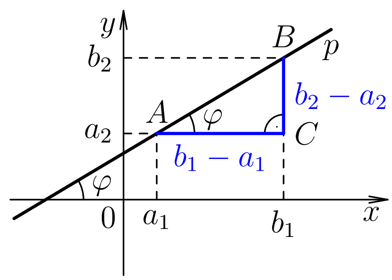
U: Priamky rovnobežné s osou y majú smerový uhol $\varphi = 90°$. Ale tg$90°$, ako vieš, nie je definovaný. Preto tieto priamky nemajú smernicu a ani smernicový tvar rovnice.

Ž: *To boli tie priamky, ktoré mali vo všeobecnej rovnici $b = 0$.*

U: Na záver ešte jeden spôsob výpočtu smernice. Nie vždy poznáme smerový uhol priamky.

Ž: *Priamka je väčšinou daná dvoma rôznymi bodmi.*

U: Dobre, majme danú priamku dvoma rôznymi bodmi $A[a_1; a_2]$ a $B[b_1; b_2]$. Ako pomocou nich určiť smernicu priamky AB? Pomôžeme si obrázkom. Vyznačíme si do sústavy súradníc priamku a na nej dva body A a B.



U: Vyznačíme aj smerový uhol priamky. Z bodov A a B môžeme vytvoriť pomocný trojuholník ACB.

Ž: *Aha, už to vidím. Bude to podobné ako pred chvíľkou. Uhol φ sa nachádza aj v tomto trojuholníku, pri vrchole A.*

U: Môžeme vyjadriť tgφ.

Ž:
$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

U: Nakoľko $|BC| = b_2 - a_2$ a $|AC| = b_1 - a_1$, dostávame vzťah na výpočet smernice priamky:

$$k = \mathrm{tg}\varphi = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}.$$

U: Záverečné zhrnutie si pozri v tabuľke.

Smernicový tvar rovnice priamky: $y = kx + q, \quad k, q \in \mathbb{R}$
k- smernica priamky
$k = \mathrm{tg}\varphi$, φ - smerový uhol priamky
$\lvert q\rvert$ - veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi y

Príklad 1: *Daná je priamka $2x - 3y - 4 = 0$. Napíšte smernicový tvar rovnice tejto priamky, určte smernicu a veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi y.*

Ž: *Nakoľko tam parameter nevidím, priamka je daná všeobecnou rovnicou.*

U: To je pravda. Nezabúdaj však, že existuje ešte smernicový tvar rovnice priamky a ani v ňom parameter nevystupuje.

Ž: *Ako rozlíšim všeobecnú rovnicu od smernicového tvaru?*

U: Tak sa na to pozri. Uvediem to bez podmienok,
všeobecná rovnica: $ax + by + c = 0$,
smernicový tvar $y = kx + q$.

Ž: *Všeobecná rovnica má všetky členy na ľavej strane a na pravej len nulu. Smernicový tvar začína y sa rovná...*

U: Podstatu si vystihol. Smernicový tvar je len inak upravená všeobecná rovnica. Inak upravená znamená v tomto prípade, že z rovnice je vyjadrená premená y. Smernicový tvar vyzerá ako predpis funkcie. Pretože priamka nie je nič iné ako graf lineárnej funkcie.

Ž: *Dobre. Ako som už povedal, priamku máme danú všeobecnou rovnicou*

$$2x - 3y - 4 = 0.$$

Ak som to správne pochopil, smernicový tvar dostanem, ak z tejto rovnice vyjadrím y.

U: Presne tak.

Ž: *Prehodím $2x$ a (-4) na druhú stranu:*

$$-3y = -2x + 4.$$

Teraz vydelím s (-3):

$$y = -\frac{-2x + 4}{3}.$$

U: Hádam si to trochu upravíme. Navrhujem rozdeliť zlomok na dva, aby sme osamostatnili člen s x. Aj tých znamienok mínus je tam akosi priveľa.

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}.$$

To je smernicový tvar rovnice priamky.

Ž: *A teraz z neho zistíme smernicu a veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi y.*

U: Zopakujme si význam koeficientov v smernicovom tvare rovnice priamky $y = kx + q$, $k, q \in \mathbb{R}$. k je smernica priamky, $|q|$ udáva veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi y.

Ž: *My máme rovnicu*

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}.$$

Porovnaním vidím, že $k = \frac{2}{3}$, lebo je to číslo, ktoré stojí pri x. Zvyšok je q, teda $q = -\frac{4}{3}$.

U: Smernica priamky je $\frac{2}{3}$.

Ž: *Veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi y je $-\frac{4}{3}$.*

U: Pozor! Veľkosť úseku nemôže byť záporné číslo! Práve preto hovoríme, že $|q|$, nie q nám udáva veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi y.

Ž: *OK. Veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi y je $\frac{4}{3}$.*

Úloha 1: *Daná je priamka $x + 6y + 2 = 0$. Napíšte smernicový tvar rovnice tejto priamky, určte jej smernicu a veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi y.*

Výsledok: $y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$, $k = -\frac{1}{6}$, $|q| = \frac{1}{3}$.

Príklad 2: *Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A[0;2]$ a s kladnou časťou osi x zviera uhol veľkosti $60°$.*

Ž: *Na napísanie všeobecnej rovnice priamky $ax + by + c = 0$ potrebujem poznať normálový vektor a aspoň jeden bod priamky. Bod by tu bol, ale ako pomocou uhla zistím normálový vektor?*

U: Poznáme viacero tvarov rovnice priamky. Možno sa nám podarí napísať nejaký iný tvar a potom ho upraviť na všeobecnú rovnicu.

Ž: *Existuje ešte parametrické vyjadrenie, ale to by som potreboval smerový vektor.*

U: Poznáme ešte smernicový tvar rovnice priamky.

Ž: *Smernicový tvar rovnice priamky vyzerá takto:*

$$y = kx + q \quad k, q \in \mathbb{R},$$

kde k je smernica priamky a $|q|$ je veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi y.

U: Dobre. Smernica priamky $k = \mathrm{tg}\varphi$. Uhol φ je smerový uhol priamky.

Ž: *Aha! Smerový uhol to je presne ten uhol, ktorý zviera priamka s kladnou časťou osi x. V našom prípade $\varphi = 60°$. Z toho vyplýva, že*

$$k = \mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}60° = \sqrt{3}.$$

U: Výborne. Koeficient k už poznáme. $k = \sqrt{3}$. Smernicový tvar rovnice priamky bude:

$$y = \sqrt{3}x + q.$$

Ž: *Ostáva nám už len q.*

U: Je to len jedna neznáma a my predsa poznáme súradnice bodu $A[0;2]$, ktorý patrí priamke. Súradnice musia vyhovovať rovnici priamky.

Ž: *Dosadím ich do rovnice, za x nulu a za y číslo 2:*

$$2 = \sqrt{3} \cdot 0 + q.$$

Z toho je jasné, že $q = 2$.

U: Stačilo si všimnúť, že bod $A[0;2]$ má prvú súradnicu rovnú 0, leží na osi y. Je to priesečník priamky a osi y. Jeho druhá súradnica, t. j. 2, udáva veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi y, čiže $q = 2$.

Ž: *Smernicový tvar rovnice priamky:*

$$y = \sqrt{3}x + 2.$$

U: Upravíme smernicový tvar na všeobecnú rovnicu.

Ž: *To asi znamená, že prehodím všetky členy na ľavú stranu:*

$$y - \sqrt{3}x - 2 = 0.$$

Napíšem členy v správnom poradí, a dostanem všeobecnú rovnicu priamky:

$$-\sqrt{3}x + y - 2 = 0.$$

Úloha 1: *Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom* $A[0; -3]$ *a s kladnou časťou osi* x *zviera uhol veľkosti* $135°$.

Výsledok: $x + y + 3 = 0$

Príklad 3: *Napíšte smernicový tvar rovnice priamky, ktorá prechádza bodmi $A[-4;-3]$ a $B[1;4{,}5]$.*

U: Smernicový tvar rovnice priamky má takúto podobu:

$$y = kx + q, \quad k, q \in \mathbb{R},$$

kde k je smernica priamky a $|q|$ je veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi y.

Ž: *Potrebujeme smernicu. Zdá sa mi, že bol na to nejaký vzorec ako vypočítať smernicu priamky pomocou jej dvoch bodov.*

U: To máš pravdu. Existuje taký vzorec. Ak body A a B majú súradnice $A[a_1;a_2]$ a $B[b_1;b_2]$, tak pre smernicu k priamky AB platí:

$$k = \mathrm{tg}\varphi = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}.$$

Ž: *Tak potom je to jednoduché. Dosadím súradnice bodov A a B a vypočítam smernicu:*

$$k = \frac{4{,}5 - (-3)}{1 - (-4)} = \frac{7{,}5}{5} = 1{,}5.$$

Rovnica priamky bude:

$$y = 1,5x + q.$$

U: Ostáva nám vypočítať koeficient q. To by malo byť tiež ľahké, nakoľko poznáme súradnice aspoň jedného bodu priamky.

Ž: *Dosadím napríklad súradnice bodu $A[-4;-3]$ do rovnice priamky:*

$$-3 = 1{,}5 \cdot (-4) + q.$$

Dostávam:

$$q = 3.$$

Rovnica priamky bude:

$$y = 1,5x + 3.$$

U: Správne.

U: Ponúknem ti ešte iný spôsob riešenia tejto úlohy. Vzorec na výpočet smernice si nemusíš vždy pamätať. (Ty si si ho vlastne ani nepamätal.) Určite však vieš, že smernicový tvar rovnice priamky je:

$$y = kx + q.$$

Poznáme dva body priamky, teda ich súradnice musia tejto rovnici vyhovovať. Dosadíme ich postupne obidva.

Ž: *Dobre. Najprv dosadím bod* $A[-4;-3]$ *a dostávam rovnicu:*

$$-3 = k \cdot (-4) + q.$$

Potom bod $B[1; 4{,}5]$*:*

$$4{,}5 = k \cdot 1 + q.$$

U: Zostavili sme sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi k a q.

$$-3 = -4k + q$$

$$4{,}5 = k + q$$

Ž: *Vyriešim ju. Použijem sčítaciu metódu. Prvú rovnicu vynásobím* (-1) *a obidve rovnice sčítam.*

$$3 + 4{,}5 = 4k + k$$

$$7{,}5 = 5k$$

Z toho máme $k = 1,5$*. Dosadím* $k = 1{,}5$ *do druhej rovnice:*

$$4{,}5 = 1{,}5 + q.$$

A máme: $q = 3$*.*

U: Rovnica má tvar:

$$y = 1{,}5x + 3.$$

Výsledok je ten istý.

Úloha 1: *Napíšte smernicový tvar rovnice priamky, ktorá prechádza bodmi* $K[-3;7]$ *a* $L[-2;1]$*.*

Výsledok: $y = -6x - 11$

Príklad 4: *Vypočítajte veľkosť uhla, ktorý zviera priamka určená rovnicou* $x-\sqrt{3}y+4\sqrt{3}=0$ *s kladnou časťou* x*.*

Ž: *Vidím, že priamka je daná všeobecnou rovnicou. To mi však nepomôže, lebo nás bude zaujímať uhol, ktorý zviera priamka s kladnou časťou osi* x*.*

U: Tento uhol má aj názov, nazýva sa smerový uhol priamky.

Ž: *Smerový uhol? To bude súvisieť so smernicovým tvarom rovnice priamky.*

U: Presne tak. Smernica priamky k sa rovná tangensu smerového uhla φ.

$$k = \mathrm{tg}\varphi.$$

Ž: *Mojou prvou úlohou bude prepísať všeobecnú rovnicu*

$$x-\sqrt{3}y+4\sqrt{3}=0.$$

na smernicový tvar.

U: Pripomeniem, že smernicový tvar rovnice priamky je:

$$y = kx + q.$$

Ž: *Aha. Potrebujem z rovnice vyjadriť* y*. Presuniem členy* x *a* $4\sqrt{3}$ *na pravú stranu:*

$$-\sqrt{3}y = -x - 4\sqrt{3}.$$

Nejako je tam veľa mínusov…

U: Prenásobme preto rovnicu číslom (-1).

Ž: *Dobre.*

$$\sqrt{3}y = x + 4\sqrt{3}.$$

Vydelím celú rovnicu odmocninou z troch.

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 4.$$

U: To je smernicový tvar rovnice priamky. Čomu sa rovná smernica k?

Ž: k *- to je koeficient pri* x*:*

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

U: Výborne. Smernica sa rovná tangensu smerového uhla.

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}} = \mathrm{tg}\varphi.$$

Ž: *Zoberiem kalkulačku a viem, že*

$$\varphi = 30^\circ.$$

U: No, takéto uhly by sme mali vedieť aj bez kalkulačky ... Uhol, ktorý zviera priamka určená rovnicou $x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} = 0$ s kladnou časťou osi x má veľkosť $30°$.

Úloha 1: *Vypočítajte veľkosť uhla, ktorý zviera priamka určená rovnicou $x + y + 3 = 0$ s kladnou časťou x.*

Výsledok: $135°$

Príklad 5: *Napíšte všeobecnú rovnicu priamky a, ktorá prechádza bodom $A[-1;6]$ a je rovnobežná s priamkou $b: \ y = 3x + 5$.*

U: V akom tvare máme danú rovnicu priamky?

Ž: *Parameter tam nie je … Vyjadrenie začína y rovná sa, ako pri funkciách. Priamka je daná smernicovým tvarom.*

U: Dobre. Povedzme si niečo o tomto tvare a o koeficientoch, ktoré sa tam vyskytujú.

Ž: *Smernicový tvar je:*

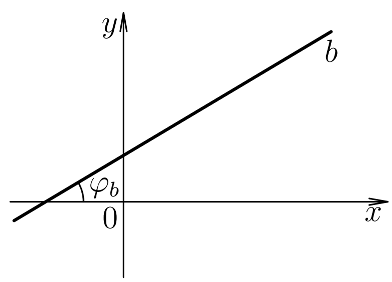
$$y = kx + q, \quad k, q \in \mathbb{R},$$

kde k je smernica priamky a $|q|$ je veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi y.

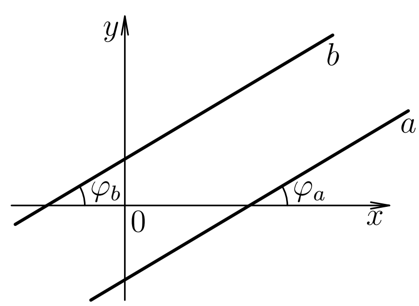
U: Výborne. Som rád, že to tak pekne vieš. Ešte dodám, že $k = \operatorname{tg}\varphi$, kde φ je smerový uhol priamky.

Ž: *To je ten uhol, ktorý priamka zviera s kladnou časťou osi x.*

U: Pozrieme sa ako budú súvisieť smernicové tvary ***rovnobežných*** priamok. Zakreslime si do sústavy súradníc jednu ľubovoľnú priamku b (nemusí to byť presne tá naša). Vyznačíme si φ_b - smerový uhol priamky b.



U: Prikreslíme teraz priamku a, ktorá bude s priamkou b rovnobežná. Opäť vyznačíme smerový uhol φ_a.



Ž: *Z obrázku sa zdá akoby smerové uhly priamok a a b boli rovnaké.*

U: Aj sú. Vedel by si to aj niečím zdôvodniť?

Ž: *Sú tam predsa rovnobežky preťaté priečkou – osou x. Uhly φ_a a φ_b sú súhlasné, a preto majú rovnakú veľkosť.*

U: Výborne. Rovnobežné priamky majú rovnaké smerové uhly. Nakoľko $k = \operatorname{tg}\varphi$, zapamätaj si, že ***rovnobežné priamky majú rovnaké smernice***.

Ž: *Smernicový tvar priamky a by som už skoro vedel napísať. Začínať bude tak ako pri priamke $b: \ y = 3x + 5$, len posledné číslo, t. j. q bude iné.*

$$a: \ y = 3x + q.$$

U: Áno. Stačí dopočítať neznámy koeficient q. To nebude ťažké, pretože poznáme bod $A[-1; 6]$, ktorý patrí priamke a.

Ž: *Súradnice bodu A musia vyhovovať rovnici priamky, dosadím ich:*

$$6 = 3 \cdot (-1) + q$$

a vypočítam q:

$$q = 9.$$

U: Smernicový tvar rovnice priamky a je:

$$y = 3x + 9.$$

Ž: *Smernicový tvar prepíšem na všeobecnú rovnicu. Všetky členy presuniem na ľavú stranu a na pravej budem mať nulu. Všeobecná rovnica priamky a bude táto:*

$$-3x + y - 9 = 0.$$

U: Alebo aj:

$$3x - y + 9 = 0.$$

Úloha 1: *Napíšte všeobecnú rovnicu priamky a, ktorá prechádza bodom $A[2; -8]$ a je rovnobežná s priamkou $b: \; y = x - 3$.*

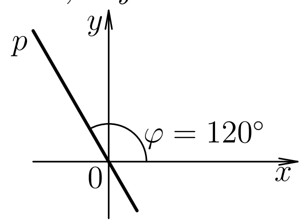
Výsledok: $y = x - 10$

Príklad 6: *Smerový uhol priamky má veľkosť* $120°$. *Priamka prechádza začiatkom sústavy súradníc. Určte jej parametrické vyjadrenie.*

Ž: *Mohol by som si nakresliť obrázok?*

U: Samozrejme, kresli vždy, keď to potrebuješ, na to sa nemusíš pýtať.

Ž: *Dobre. Načrtnem si sústavu súradníc, zakreslím priamku, ktorá prechádza začiatkom, teda bodom* $O[0;0]$. *Priamku natočím tak, aby s kladnou časťou osi* x *zvierala uhol* $120°$.



U: Navrhujem napísať rovnicu priamky najprv v smernicovom tvare $y = kx + q$.

Ž: *Smernica* $k = \mathrm{tg}\varphi$, *kde* φ *je smerový uhol, teda pre našu priamku* $120°$. *Preto:*

$$k = \mathrm{tg}120° = -\sqrt{3}.$$

U: Výborne. Ak sa pozrieme na obrázok, vidíme aj aký je veľký úsek, ktorý priamka vytína na osi y.

Ž: *Priamka nevytína žiadny úsek...*

U: Správne. Preto

$$q = 0.$$

Ž: *Smernicový tvar rovnice priamky je:*

$$y = -\sqrt{3}x$$

U: Ostáva nám iba prepísať ho na parametrické vyjadrenie.

Ž: *To je jednoduché, všetko dám na ľavú stranu:*

$$\sqrt{3}x + y = 0.$$

U: Pozor! To je všeobecná rovnica, nie parametrické vyjadrenie. Potrebujeme zaviesť parameter t. Nech napríklad $x = t$.

Ž: *Potom platí:*

$$y = -\sqrt{3}t.$$

A už máme parametrické vyjadrenie:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= -\sqrt{3}t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Úloha 1: *Smerový uhol priamky má veľkosť* 45°. *Priamka prechádza bodom* $P[0;-5]$. *Určte jej parametrické vyjadrenie.*

Výsledok: Napr.

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= -5 + t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Príklad 7: *Nech priamky* $p: \ y = k_1x + q_1$ *a* $r: \ y = k_2x + q_2$ *sú navzájom kolmé. Potom pre ich smernice* k_1, k_2 *platí* $k_1 \cdot k_2 = -1$. *Dokážte.*

Ž: *Tieto príklady nemám veľmi rád. Sú veľmi všeobecné, žiadne konkrétne čísla. A k tomu ešte dôkaz!*

U: Nesnaž sa veci hneď na začiatku vidieť čierne. V matematike sú dôkazy veľmi dôležité. Matematika ako deduktívna veda musí narábať so všeobecnými vyjadreniami. Uvidíš, že to spolu hravo zvládneme.

Ž: *Dobre, ale ako mám čosi dokázať o smerniciach priamok, keď ani neviem aké sú?*

U: Vieš však, čo je to smernica.

Ž: *Smernica* k *je tangens smerového uhla.*

U: Označme si smerové uhly priamok ako φ_1 a φ_2. Potom platí:

$$k_1 = \mathrm{tg}\varphi_1 \quad \text{a} \quad k_2 = \mathrm{tg}\varphi_2.$$

Ž: *Aha. Namiesto s* k*-áčkami budeme pracovať s tangensmi. Zdá sa, že budem musieť vyhrabať vedomosti o goniometrických funkciách.*

U: Tie sa vždy hodia. Vzťah

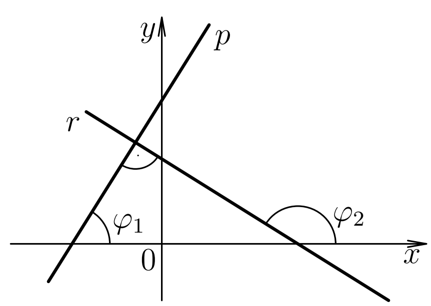
$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

je potom ekvivalentný vzťahu

$$\mathrm{tg}\varphi_1 \cdot \mathrm{tg}\varphi_2 = -1.$$

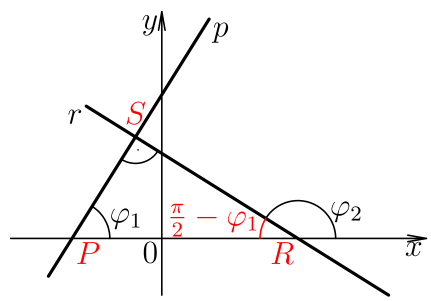
Potrebujeme zistiť vzťah medzi smerovými uhlami oboch priamok. Navrhujem zakresliť obe priamky do sústavy súradníc.

Ž: *Priamky budú úplne ľubovoľne nakreslené? Dobre, načrtnem si sústavu súradníc v rovine, v nej ľubovoľnú priamku* p, *a ľubovoľnú priamku* r *na ňu kolmú. Ďalej vyznačím smerové uhly oboch priamok.*



U: Výborne, smerový uhol je uhol, ktorý zviera priamka a kladná časť osi x. Na obrázku nám vznikol pravouhlý trojuholník, označíme ho ako PRS. Vedel by si vyjadriť veľkosť vnútorného uhla pri vrchole R?

Ž: *Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je* 180°. *Jeden uhol, pri vrchole* S *je pravý, t. j.* 90°. *Druhý uhol je* φ_1. *To znamená, že vnútorný uhol pri vrchole* R *má veľkosť* $90^\circ - \varphi_1$.



U: Výborne. Na obrázku pekne vidno, že vnútorný uhol pri vrchole R, t. j. $90^\circ - \varphi_1$, a smerový uhol priamky r, t.j φ_2, sú susedné uhly.

Ž: *To majú dokopy* 180°.

U: Áno. Platí:

$$(90^\circ - \varphi_1) + \varphi_2 = 180^\circ.$$

Vyjadrime vzťah medzi smerovými uhlami.

Ž: *Trošku to upravím :*

$$-\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ$$

a mám

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ.$$

U: Dostávame sa ku goniometrickým funkciám. Potrebujeme vyjadriť

$$\mathrm{tg}\varphi_2 = \mathrm{tg}(\varphi_1 + 90^\circ).$$

Ž: *Viem len, že*

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

U: To sa nám hodí.

$$\mathrm{tg}\varphi_2 = \frac{\sin(\varphi_1 + 90^\circ)}{\cos(\varphi_1 + 90^\circ)}.$$

Spomeňme si na súčtové vzorce, podľa ktorých platí:

$$\sin(\varphi + 90^\circ) = \cos\varphi$$

$$\cos(\varphi + 90^\circ) = -\sin\varphi.$$

Ž: *Dobre, pokúsim sa to aplikovať na náš vzťah:*

$$\mathrm{tg}\varphi_2 = \frac{\sin(\varphi_1 + 90^\circ)}{\cos(\varphi_1 + 90^\circ)} = \frac{\cos\varphi_1}{-\sin\varphi_1}.$$

U: Podiel sínusu a kosínusu toho istého argumentu sa rovná prevrátenej hodnote funkcie tangens:

$$\mathrm{tg}\varphi_2 = -\frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1} = -\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi_1}.$$

Čiže

$$\mathrm{tg}\varphi_2 = -\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi_1}.$$

Teraz môžeme vyjadriť súčin $k_1 \cdot k_2$.

Ž: *Skúsim to.*

$$k_1 \cdot k_2 = \mathrm{tg}\varphi_1 \cdot \mathrm{tg}\varphi_2 = \mathrm{tg}\varphi_1 \cdot (-\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi_1}) = -1$$

Dokázali sme to!

U: Áno, súčin smerníc dvoch navzájom kolmých priamok je rovný (-1).