Skalárny súčin

RNDr. Viera Vodičková

U: ***Skalárnym súčinom vektorov*** $\vec{u} = (u_1; u_2)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2)$ nazývame číslo $u_1v_1 + u_2v_2$.

Ž: *So skalárom som sa stretol už na fyzike. Označovali sme tak veličiny, ktoré nemali smer.*

U: To je v poriadku. Skalárny súčin vektorov je operácia s dvoma vektormi, ktorej výsledkom je ***číslo***, teda nie vektor. Označujeme ho ako $\vec{u}$ krát $\vec{v}$, krát píšeme ako bodku, teda $\vec{u} \cdot \vec{v}$. V priestore je situácia analogická, len pribudnú tretie súradnice, t. j. člen u_3v_3. V rámčeku máš zapísaný skalárny súčin v priestore.

Skalárny súčin vektorov $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

U: Vrátime sa ešte na chvíľu ku odchýlke dvoch vektorov.

Ž: *Pre odchýlku φ dvoch vektorov v rovine platí:*

$$\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

U: Už sme si povedali, že v menovateli vystupuje súčin veľkostí oboch vektorov. Čo však máme v čitateli?

Ž: *V čitateli je výraz $u_1v_1 + u_2v_2$ ... aha, však je to náš skalárny súčin!*

U: Presne tak. Preto môžeme písať:
Kosínus uhla φ sa rovná skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ lomeno súčin veľkostí oboch vektorov.

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}}$$

U: Ak tento vzťah trochu upravíme, to znamená vynásobíme rovnosť menovateľom zlomku, dostaneme ďalší vzťah na výpočet skalárneho súčinu. ***Skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sa rovná súčinu veľkostí oboch vektorov a kosínusu uhla, ktorý zvierajú.***

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\varphi}$$

U: Tento vzťah platí však len pre nenulové vektory.

Ž: *Pre nenulové?*

U: Samozrejme, pretože vo vzťahu pre odchýlku, z ktorého sme vychádzali, sme definovali odchýlku len pre nenulové vektory.

U: Už sme si ukázali, že odchýlkou vektorov môže byť nulový, ostrý, tupý aj pravý uhol. Skalárny súčin nám pomôže zistiť o aký uhol ide. Ako sa líši kosínus ostrého a tupého uhla?

Ž: *Kosínus ostrého a tupého uhla? Robili sme to nejako na jednotkovej kružnici. Pre ostrý uhol leží príslušný bod v prvom kvadrante a tam je kosínus uhla kladný. Pre tupý uhol leží v druhom kvadrante a tam je kosínus uhla záporný. No a kosínus pravého uhla je nula.*

U: Áno, čiže odchýlka vektorov závisí od toho, či je kosínus uhla kladný, záporný alebo nulový. Ešte raz sa pozrieme na vzťah, ktorý hovorí, že skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sa rovná súčinu veľkostí oboch vektorov a kosínusu uhla, ktorý zvierajú.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \varphi}$$

U: Nakoľko veľkosti vektorov sú kladné čísla, znamienko kosínusu uhla je totožné so znamienkom skalárneho súčinu. Skúsme si zhrnúť, čo sme povedali.

Ž: *Ak je skalárny súčin* **kladný**, *odchýlkou vektorov je* **ostrý uhol**,
ak je skalárny súčin **záporný**, *odchýlkou vektorov je* **tupý uhol**.

U: A čo je najpodstatnejšie, ak je skalárny súčin nulový, odchýlkou vektorov je pravý uhol, vektory sú na seba kolmé. To je dôležitý význam skalárneho súčinu.
Dva nenulové vektory sú na seba kolmé práve vtedy, ak ich skalárny súčin je rovný nule.

Ž: *Takže, ak chcem zistiť, či sú dva vektory na seba kolmé, stačí vypočítať ich skalárny súčin?*

U: Správne. A ak bude skalárny súčin dvoch nenulových vektorov nula, znamená to, že sú na seba kolmé.

U: Na záver si uvedieme niekoľko vlastností skalárneho súčinu. Máš ich prehľadne zapísané v tabuľke, prečítaj si ich!

Vlastnosti skalárneho súčinu:

pre ľubovoľné vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ platí:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}), \quad k \in \mathbb{R}$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (\vec{u} = \vec{0}) \vee (\vec{v} = \vec{0}) \vee (\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{u} \perp \vec{v})$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

Ž: *To je veľa vecí naraz.*

U: Ani nie, pekne postupne si to prejdeme. Prvá vlastnosť ...

Ž: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, *to sa len vymení poradie vektorov.*

U: Správne, hovoríme, že pre skalárny súčin platí ***komutatívny zákon***, nezáleží na poradí vektorov.

Ž: *Druhá vlastnosť* $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}), \quad k \in \mathbb{R}$ *je niečo podobné, buď je k len pri jednom vektore alebo až nakoniec pri oboch.*

U: Asi rozumiem, čo si chcel povedať, tak to presnejšie zhrniem: Ak je jeden z vektorov násobený reálnym číslom k, tak výsledok je taký istý, ako keď číslom k vynásobíme skalárny súčin $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Ž: *Tretia vlastnosť*

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w},$$

hovorí, že s vektormi môžem pracovať ako s výrazmi, normálne ich roznásobím.

U: Správne, platí ***distributívny zákon***.

Ž: *Štvrtá vlastnosť*

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow(\vec{u}=\vec{0})\vee(\vec{v}=\vec{0})\vee(\vec{u}\neq\vec{0}\wedge\vec{v}\neq\vec{0}\wedge\vec{u}\perp\vec{v})$$

je akási komplikovaná.

U: Zhŕňa len to, čo sme si už povedali. Ak je skalárny súčin dvoch vektorov rovný nule, tak buď je jeden alebo druhý nulový, alebo sú vektory na seba kolmé.

Ž: *Ostala posledná piata vlastnosť* $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$*. To môžem skalárne násobiť aj vektor sám so sebou?*

U: Samozrejme. Prečo nie? Skúsme si rozpísať skalárny súčin $\vec{u}\cdot\vec{u}$ podľa definície. Nech má vektor $\vec{u}$ súradnice $\vec{u}=(u_1;u_2)$.

Ž: *Dobre. Podľa definície skalárny súčin dvoch vektorov vypočítam tak, že vynásobím ich prvé súradnice a k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc. Teda:*

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=u_1u_1+u_2u_2.$$

U: Daný výraz môžeme ďalej upraviť:

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=u_1u_1+u_2u_2=u_1^2+u_2^2.$$

A teraz sa pýtam, ako počítame veľkosť vektora?

Ž: *Veľkosť vektora vypočítame podľa vzorca:*

$$|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}.$$

Aha! Však to tam presne máme, až na tú odmocninu.

U: Stačí vzorec, ktorý si uviedol, umocniť na druhú a máme:

$$|\vec{u}|^2=u_1^2+u_2^2.$$

Porovnaním získavame piatu vlastnosť $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$.

Príklad 1: *Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ ak je dané:*

(a) $\vec{u} = (3; -4)$, $\vec{v} = (-2; -1)$;

(b) $\vec{u} = (4; -2; 0)$, $\vec{v} = (3; 2; 8)$;

(c) $|\vec{u}| = 7, |\vec{v}| = 6$ *a odchýlka vektorov je* $\varphi = 60^\circ$.

U: Začneme s úlohou (a).

Ž: *Skalárny súčin dvoch vektorov vypočítam tak, že vynásobím ich prvé súradnice a k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc, teda*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

U: Správne, pamätáš si to dobre.

Ž: *Vyzerá to veľmi ľahko, dosadím súradnice a mám to.*

U: Máš pravdu, vypočítať skalárny súčin je naozaj jednoduchá vec. A to je dobre, lebo ho často budeme potrebovať.

Ž: *Dobre, dosadím súradnice našich vektorov.*

$$\vec{u} = (3; -4), \quad \vec{v} = (-2; -1)$$

a počítam:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-1) = -6 + 4 = -2.$$

Skalárny súčin je (-2).

U: Všimni si, že jeho hodnota je záporná, čo znamená, že odchýlkou týchto vektorov bude tupý uhol.

Ž: *Pokračujeme úlohou (b).*
Všimol som si, že vektory majú tri súradnice. Sú to tieto $\vec{u} = (4; -2; 0)$, $\vec{v} = (3; 2; 8)$.

U: Áno, sú zadané v priestore. Skalárny súčin vypočítame tak isto, len pribudne tretí člen: súčin tretích súradníc $u_3 v_3$. Teda

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Ž: *Môžem rovno dosadiť:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 8 = 12 - 4 + 0 = 8.$$

U: Výborne. Ostáva nám úloha (c).

Ž: *Tá je trochu iná. Nemám súradnice vektorov.*

U: To sa niekedy stane, že nebudeš poznať súradnice vektorov. Ale poznáme ich veľkosti a veľkosť uhla, ktorý zvierajú.

Ž: *To budeme musieť použiť iný vzorec.*

U: Áno máš pravdu. Je to ten vzorec, ktorý vychádza zo vzťahu pre výpočet odchýlky vektorov. Skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sa rovná súčinu veľkostí oboch vektorov a kosínusu uhla, ktorý zvierajú.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \varphi}$$

Ž: *To je tiež ľahké, iba dosadím čísla, akurát musím vypočítať hodnotu* $\cos \varphi$*. Kosínus 60 stupňov je, tuším,* $\frac{\sqrt{3}}{2}$*. Takže*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 21 \cdot \sqrt{3}.$$

Úloha 1: *Vypočítajte skalárny súčin vektorov* $\vec{u}$ *a* $\vec{v}$ *ak je dané:*

(a) $\vec{u} = (1; 3; -4)$, $\vec{v} = (4; -2; -1)$;

(b) $\vec{u} = (6; 8)$, $\vec{v} = (-4; 3)$;

(c) $|\vec{u}| = 4, |\vec{v}| = 3\sqrt{2}$ *a odchýlka vektorov je* $\varphi = 45°$.

Výsledok:

(a) 2

(b) 0; vektory sú kolmé

(c) 12

Príklad 2: *Je daný vektor $\vec{a} = (1; 3)$. Nájdite aspoň jeden vektor, ktorý je na vektor $\vec{a}$ kolmý.*

U: Zopakujme si, že na určenie kolmosti dvoch vektorov nám výborne poslúži ich skalárny súčin. Skalárny súčin dvoch kolmých vektorov sa rovná nule.

Ž: *Budem teda hľadať vektor, ktorého skalárny súčin s našim vektorom $\vec{a}$ bude nula?*

U: Presne tak.

Ž: *Tak si nejaký vymyslím, vypočítam skalárny súčin a uvidíme...*

U: To by bola dlhá cesta, ktovie kedy by ti to vyšlo. Pôjdeme na to ináč. Označíme si hľadaný vektor napríklad $\vec{b}$ a jeho súradnice $b_1; b_2$.

$$\boxed{\vec{b} = (b_1; b_2)}$$

U: Skalárny súčin vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ musí byť nula. Zapíšme si to.

Ž: *Skalárny súčin*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Dosadím súradnice vektora $\vec{a}$ a dostávam:

$$b_1 + 3b_2 = 0.$$

U: Máme jednu rovnicu s dvoma neznámymi. Koľko má riešení?

Ž: *Keďže neznámych je viac ako rovníc, tak nekonečne veľa, jednu neznámu si zvolím a druhú dopočítam.*

U: Výborne, vedel by si teda nájsť nejaké riešenie, nejaký kolmý vektor?

Ž: *Tak napríklad $b_1 = 1$, potom $1+3b_2 = 0$. Z čoho dostávame $b_2 = -\frac{1}{3}$ Vektor $\vec{b}$ má súradnice $\vec{b} = (1; -\frac{1}{3})$.*

$$\boxed{\begin{aligned} & b_1 + 3b_2 = 0 \\ b_1 = 1, \quad & 1 + 3b_2 = 0 \\ & b_2 = -\frac{1}{3} \\ & \vec{b} = (1; -\frac{1}{3}) \end{aligned}}$$

U: Výborne. Čo myslíš, koľko existuje kolmých vektorov na vektor $\vec{a}$?

Ž: *Dohodli sme sa, že modrá rovnica má nekonečne veľa riešení, tak aj tých vektorov bude nekonečne veľa.*

U: Dobre, vedel by si nájsť nejaké ďalšie riešenie, nejaký ďalší vektor, ktorý je tiež kolmý na náš vektor $\vec{a}$? Označme ho napríklad $\vec{c}$.

Ž: *Postup bude taký istý. Zvolím si teraz napríklad $c_1 = 3$, potom dosadím do rovnice $c_1 + 3c_2 = 0$ a dostávam $3 + 3c_2 = 0$. Z čoho máme $c_2 = -1$. Vektor $\vec{c}$ má súradnice $\vec{c} = (3; -1)$.*

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 0 \\ c_1 = 3, \qquad 3 + 3c_2 &= 0 \\ c_2 &= -1 \\ \vec{c} &= (3; -1) \end{aligned}$$

U: Výborne. Pozrime sa teraz na obidva vektory, ktoré sme našli. Vektor $\vec{b} = (1; -\frac{1}{3})$ a vektor $\vec{c} = (3; -1)$.
Nie je medzi nimi nejaký súvis?

Ž: *Že som na to neprišiel skôr, ak vynásobíme vektor $\vec{b}$ troma, dostaneme vektor $\vec{c}$.*

U: Správne. Vektor $\vec{c}$ je trojnásobok vektora $\vec{b}$. A keby sme hľadali ďalšie riešenia, zistili by sme, že všetky vektory, ktoré sú kolmé na vektor $\vec{a}$, sú násobkom vektora $\vec{b}$. Je to celkom logické, stačí si uvedomiť, že všetky vektory, kolmé na vektor $\vec{a}$ môžeme umiestniť na jednu priamku. Ak si spomenieme na pojem lineárna závislosť, môžeme povedať, že každé dva z týchto vektorov sú lineárne závislé.

Ž: *Teraz by som už ľahko našiel ďalší vektor. Vynásobím vektor $\vec{b}$ desiatimi a dostanem vektor so súradnicami $(10; -\frac{10}{3})$. Podľa toho, čo ste povedali, je určite kolmý na náš vektor $\vec{a}$.*

U: Poďme sa o tom presvedčiť. Overme či je vektor $\vec{a}$ so súradnicami $(1; 3)$ kolmý na vektor so súradnicami $(10; -\frac{10}{3})$.

Ž: *Dobre, vypočítam ich skalárny súčin, vynásobím ich prvé súradnice, t. j. 1 krát 10 a k tomu pripočítam súčin druhých súradníc, t. j. 3 krát $-\frac{10}{3}$. Dostávam 10 mínus 10, čo je nula. Skalárny súčin je nula, vektory sú kolmé.*

$$(1; 3) \cdot \left(10; -\frac{10}{3}\right) = 1 \cdot 10 + \left(-\frac{10}{3}\right) = 10 - 10 = 0$$

U: Výborne. A nakoniec ešte jeden postreh, ktorý nám umožní urýchliť niektoré výpočty. Všimnime si teraz dva kolmé vektory, s ktorými sme už pracovali, vektor $\vec{a} = (1; 3)$ a vektor $\vec{c} = (3; -1)$.
Čo sa dá vidieť teraz?

Ž: *Majú nejako podobné súradnice, len znamienka sú iné.*

U: Áno, môžeme povedať, že majú vymenené súradnice a jedna, konkrétne druhá, má zmenené znamienko. Ak rýchlo potrebujeme na daný vektor nájsť kolmý vektor, nemusíme robiť celý tento postup, stačí nám vymeniť jeho súradnice a v jednej zmeniť znamienko.

Ž: *To vyzerá rozumne a ľahko. Zišiel by sa mi však nejaký príklad.*

U: Tak napríklad vektor $\vec{u}$ má súradnice $(52; -61)$. Vektor ktorý je naň kolmý, bude mať súradnice napríklad $(61; 52)$. Všimni si, že ak sa dá, znamienko mínus sa radšej odstráni, veď ho ani ty určite nemáš veľmi v láske. Pripomínam však, že tento postup funguje len v rovine.

Úloha 1: *Určte súradnicu* a_2 *vektora* $\vec{a}$ *tak, aby vektory* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *boli kolmé, ak* $\vec{a} = (3; a_2)$, $\vec{b} = (-5; 6)$.

Výsledok: $a_2 = \frac{3}{2}$

Príklad 3: *Je daný vektor $\vec{a} = (3;4)$. Určte všetky vektory $\vec{b}$, ktoré sú na vektor $\vec{a}$ kolmé a majú veľkosť 15.*

U: Tak najprv, koľko bude takých vektorov?

Ž: *Viem, že na daný vektor nájdem nekonečne veľa kolmých vektorov, ale asi nebudú mať všetky veľkosť 15. Snáď len jeden?*

U: Uvidíme, predpokladajme, že existuje jeden taký vektor $\vec{b}$ so súradnicami $(b_1;b_2)$. Poďme si rozobrať úlohu.
Vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ sú na seba kolmé. Čo to znamená?

Ž: *Ich skalárny súčin je roný nule. Skalárny súčin dvoch vektorov vypočítam tak, že vynásobím ich prvé súradnice a k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc. Pre náš prípad to znamená, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ a to sa rovná nule. Po dosadení známych súradníc vektora $\vec{a}$ máme $3b_1 + 4b_2 = 0$.*

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = 0 \\ 3b_1 + 4b_2 = 0\end{gathered}}$$

U: Výborne. So zadania ešte vieme, že veľkosť vektora $\vec{b}$ je 15. Aj to využijeme. Ako počítame veľkosť vektora?

Ž: *Veľkosť vektora je odmocnina zo súčtu druhých mocnín jeho súradníc. Pre vektor $\vec{b}$ to znamená:*

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = 15.$$

Po umocnení na druhú z toho dostávame rovnicu:

$$b_1^2 + b_2^2 = 225.$$

U: Ak si to zhrnieme, dostali sme sústavu rovníc. Prvá je lineárna a druhá kvadratická.

$$\boxed{\begin{aligned}3b_1 + 4b_2 &= 0 \\ b_1^2 + b_2^2 &= 225\end{aligned}}$$

U: Takúto sústavu spravidla riešime tak, že z lineárnej rovnice (v našom prípade z prvej) si vyjadríme jednu neznámu a dosadíme do druhej rovnice.

Ž: *Tak idem na to. Z prvej rovnice si vyjadrím b_1 a to tak, že odpočítam $4b_2$ a vydelím troma:*

$$\boxed{\begin{aligned}3b_1 + 4b_2 &= 0 \\ 3b_1 &= -4b_2 \\ b_1 &= -\frac{4}{3}b_2\end{aligned}}$$

Ž: *Čiže máme $b_1 = -\frac{4}{3}b_2$.*

U: Teraz dosadíme toto vyjadrenie do druhej rovnice a dostávame:

$$\left(-\frac{4}{3}b_2\right)^2 + b_2^2 = 225.$$

Ž: *Zátvorku umocníme na druhú, takže máme:*

$$\frac{16}{9}b_2^2 + b_2^2 = 225.$$

Odstránime zlomky, celú rovnicu vynasobíme deviatimi:

$$16b_2^2 + 9b_2^2 = 9 \cdot 225.$$

Na ľavej strane spočítame $16b_2^2$ *a* $9b_2^2$ *a dostaneme* $25b_2^2$. *Rovnicu vydelíme číslom* 25, *čím dostávame* $b_2^2 = 81$.

U: Rovnicu odmocníme a nezabudneme, že vzniknú dve riešenia, kladné a záporné.

Ž: *Správne, preto si to dám do absolútnej hodnoty:* $|b_2| = 9$. *Dostávam dve riešenia* $b_2 = 9$ *a* $b_2 = -9$.

$$\boxed{\begin{aligned}
\left(-\frac{4}{3}b_2\right)^2 + b_2^2 &= 225 \\
\frac{16}{9}b_2^2 + b_2^2 &= 225 \\
16b_2^2 + 9b_2^2 &= 9 \cdot 225 \\
25b_2^2 &= 9 \cdot 225 \\
b_2^2 &= 9 \cdot 9 \\
b_2^2 &= 81 \\
|b_2| &= 9 \\
b_2 &= \pm 9
\end{aligned}}$$

U: Výborne, ostáva nám dopočítať prvú súradnicu. Vrátime sa preto k modrému vyjadreniu: $b_1 = -\frac{4}{3}b_2$. Dosadíme vypočítanú hodnotu b_2.

Ž: *Pre hodnotu* $b_2 = 9$ *dostávame*

$$b_1 = -\frac{4}{3} \cdot 9 = -12.$$

Našim prvým riešením je vektor $\vec{b}_1$ *so súradnicami* $(-12; 9)$.
Hodnota $b_2 = -9$ *dáva*

$$b_1 = -\frac{4}{3} \cdot (-9) = 12.$$

Druhým riešením je vektor $\vec{b}_2$ *so súradnicami* $(12; -9)$.

$$\boxed{\text{Riešenie: } \vec{b}_1 = (-12; 9) \text{ a } \vec{b}_2 = (12; -9)}$$

Úloha 1: *Je daný vektor* $\vec{c} = (3; 6)$. *Určte vektor* $\vec{d}$ *tak, aby platilo* $\vec{d} \perp \vec{c}$ *a zároveň* $|\vec{d}| = 4\sqrt{5}$.

Výsledok: $\vec{d}_1 = (-8; 4)$ a $\vec{d}_2 = (8; -4)$

Príklad 4: *Dané sú vektory* $\vec{u} = (3; 2; -1)$, $\vec{v} = (1; -4; 3)$. *Nájdite všetky vektory, ktoré sú na dané dva vektory kolmé.*

U: Označme si hľadaný vektor napríklad $\vec{a}$ a jeho súradnice $(a_1; a_2; a_3)$.

Ž: *Podľa zadania má byť vektor* $\vec{a}$ *kolmý na vektor* $\vec{u}$ *aj na vektor* $\vec{v}$. *Na kolmosť sa nejako používal skalárny súčin.*

U: Správne. Ak sú dva vektory kolmé, tak ich skalárny súčin je rovný nule.

Ž: *To znamená, že skalárny súčin vektora* $\vec{a}$ *a vektora* $\vec{u}$ *sa rovná nule, t. j.* $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0$.
Tak isto aj skalárny súčin vektora $\vec{a}$ *a vektora* $\vec{v}$ *sa rovná nule, t. j.* $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{u} = 0 &\iff a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0 \\ \vec{a}\cdot\vec{v} = 0 &\iff a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 \end{aligned}}$$

U: Súradnice vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ poznáme, preto ich môžeme dosadiť.

Ž: *Dostávame tak dve rovnice s troma neznámymi* a_1, a_2 *a* a_3.

$$\begin{aligned} 3a_1 + 2a_2 - a_3 &= 0 \\ a_1 - 4a_2 + 3a_3 &= 0. \end{aligned}$$

U: Neznámych je viac ako rovníc, sústava môže mať nekonečne veľa riešení. Spomeňme si, že hľadáme vektor v priestore, ktorý je kolmý na dva rôzne vektory. Ak nájdeme jeden, tak ľubovoľný jeho násobok bude tiež na tieto dva vektory kolmý, len bude mať inú veľkosť.

Ž: *Jasné. Môžem ho hocijako natiahnuť, stále bude kolmý.*

U: Až na jednu výnimku, nesmiem ho násobiť nulou, musí to byť nenulový násobok.

Ž: *No, ale ako nájdem ten jeden vyhovujúci vektor?*

U: Ak je takýchto vektorov nekonečne veľa, môžeme si jednu súradnicu zvoliť a ostatné dopočítame. Napríklad si zvolíme $a_1 = 1$. Dosadíme do modrých rovníc a dostávame dve rovnice s dvoma neznámymi.

$$\begin{aligned} 3 + 2a_2 - a_3 &= 0 \\ 1 - 4a_2 + 3a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ž: *Takú sústavu už viem riešiť. Vyberiem si dosadzovaciu metódu. Z prvej rovnice si vyjadrím* a_3*:*

$$a_3 = 3 + 2a_2.$$

Toto vyjadrenie dosadím do druhej rovnice namiesto a_3*. Dostávam:*

$$1 - 4a_2 + 3(3 + 2a_2) = 0.$$

Odstránim zátvorku a mám:

$$1 - 4a_2 + 9 + 6a_2 = 0.$$

Spočítam, čo sa dá a dostanem rovnicu:

$$10 + 2a_2 = 0.$$

A z toho už mám:

$$a_2 = -5.$$

U: Výborne. Ostáva dopočítať tretiu súradnicu. Vrátime sa k vyjadreniu

$$a_3 = 3 + 2a_2$$

a dosadíme vypočítanú hodnotu $a_2 = -5$.

Ž: *Čiže:*

$$a_3 = 3 + 2 \cdot (-5) = -7.$$

U: Dobre. Našli sme teda vektor $\vec{a}$ so súradnicami $(1; -5; -7)$, ktorý vyhovuje zadaniu. Povedali sme si už, že úloha má nekonečne veľa riešení, riešením bude každý nenulový násobok tohto vektora $\vec{a}$.

Ž: *Tomu už rozumiem, ale ako zapíšeme všetky nenulové násobky vektora* $\vec{a}$*?*

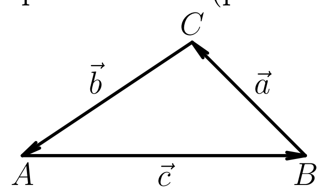
U: Násobok vektora znamená, že vektor je násobený nejakým reálnym číslom, označme ho napríklad k. Ak násobíme vektor $\vec{a}$ reálnym číslom k, tak aj jeho súradnice dostaneme tak, že súradnice vektora $\vec{a} = (1; -5; -7)$ násobíme týmto reálnym číslom k. To znamená, že všetky hľadané vektory budú mať súradnice: $(k; -5k; -7k)$, kde k je ľubovoľné reálne číslo rôzne od nuly.

$$\boxed{\text{Riešenie: } \vec{a} = (k; -5k; -7k), \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}}$$

Príklad 5: *Dokážte, že trojuholník ABC je pravouhlý, ak $A[16; 1; -2]$, $B[-9; 1; -2]$, $C[0; 1; 10]$.*

Ž: *To je asi podobná úloha ako vypočítať vnútorné uhly v trojuholníku. Vypočítam ich a uvidím, či je niektorý pravý.*

U: Tento postup by bol v poriadku, ja ti však chcem ponúknuť trošku kratší. Na stranách trojuholníka zvolíme vektory, napríklad takto (pozri obrázok):



$$\vec{c} = B - A, \ \ \vec{a} = C - B, \ \ \vec{b} = A - C$$

Nemusíme teraz počítať odchýlku týchto vektorov, stačí zistiť, či niektoré dva z nich nie sú na seba kolmé.

Ž: *To je podľa mňa to isté, čo som navrhoval ja!*

U: Zabúdaš na skalárny súčin. Aby sme vedeli, či sú dva vektory kolmé, stačí vypočítať ich skalárny súčin…

Ž: *…a zistiť, či sa nerovná nule. Máte pravdu, vypočítať skalárny súčin je jednoduché. Hneď sa dám do toho.*

U: Ak si nepamätáš ako sa počíta skalárny súčin, pozri si rámček.

> ***Skalárny súčin vektorov*** $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$a $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$
>
> $$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Ž: *Najprv si vypočítam súradnice vektorov.*

$$\vec{c} = B - A = (-9-16; \ 1-1; \ -2-(-2)) = (-25; 0; 0)$$

$$\vec{a} = C - B = (0-(-9); \ 1-1; \ 10-(-2)) = (9; 0; 12)$$

$$\vec{b} = A - C = (16-0; \ 1-1; \ -2-10) = (16; 0; -12)$$

U: Tak to by sme mali, poďme na skalárny súčin.

Ž: *Takže vyskúšam všetky dvojice. Začnem postupne, vypočítam najprv skalárny súčin vektorov $\vec{c}$ a $\vec{a}$.*

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = -25 \cdot 9 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 12 = -25 \cdot 9 = -225.$$

U: Výborne. Skalárny súčin vektorov $\vec{c}$ a $\vec{a}$ je rôzny od nuly, preto nie sú na seba kolmé.

Ž: *Pokračujem s ďalšou dvojicou. Počítam skalárny súčin vektorov $\vec{c}$ a $\vec{b}$.*

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = -25 \cdot 16 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-12) = -25 \cdot 16 = -400.$$

U: Výborne, no ani tieto vektory nie sú kolmé. Ostáva posledná dvojica.

Ž: *Áno, je to dvojica vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Počítam:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 \cdot 16 + 0 \cdot 0 + 12 \cdot (-12) = 144 - 144 = 0.$$

Ž: *Tieto dva vektory sú na seba kolmé. Trojuholník je pravouhlý.*

U: A vedel by si povedať, pri ktorom vrchole má pravý uhol?

Ž: *No …pozriem sa na obrázok a vidím, že vektor $\vec{a}$ leží na strane BC a vektor $\vec{b}$ na strane AC. Z toho mi vyplýva, že pravý uhol bude pri vrchole C. Je to taký klasický pravouhlý trojuholník.*

U: Výborne, úlohu si zvládol.

Úloha 1: *Body $E[2;-2;-2]$, $F[0;-1;-4]$, $G[2;1;-5]$ tvoria trojuholník EFG. Dokážte, že je pravouhlý. Pri ktorom vrchole leží pravý uhol?*

Výsledok: pri vrchole F

Príklad 6: *Stála sila s veľkosťou $F = 200N$ pôsobí na teleso tak, že so smerom posunutia zviera uhol $\alpha = 30°$. Určte vykonanú prácu, ak dráha $s = 25m$.*

Ž: *To vyzerá na fyziku!*

U: No, máš pravdu, ale mysli na to, že fyzika sa bez matematiky nezaobíde. Väčšina fyzikálnych javov je popísaná matematicky. Asi ste sa učili na fyzike o práci. Ako ju môžeme vypočítať?

Ž: *Označovali sme ju tuším W a vypočítali sme ju ako súčin sily F a posunutia d.*

$$\boxed{W = F \cdot d}$$

U: Pozrieme sa na tento vzorec z matematického hľadiska. Vo fyzike ste veličiny delili na vektory a skaláre.

Ž: *Spomínam si, vektory mali smer, ako napr.sila, skaláre nemali smer, ako napr. hmotnosť.*

U: Správne. Pre náš prípad je dôležité, že sila F aj posunutie d sú vektorové veličiny a práca W je skalárna veličina. Čiže, ak počítame sila krát posunutie, $F \cdot d$, násobíme dve vektorové veličiny a dostávame prácu, veličinu skalárnu. $F \cdot d$ teda nie je nič iné ako skalárny súčin vektora sily F a vektora posunutia d. Môžeme písať:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

Ž: *To nám ale veľmi nepomôže, vo fyzike nepracujeme vždy so sústavou súradníc, a ani v tomto prípade nevieme, aké súradnice majú vektory sily a posunutia.*

U: Zabudol si, že na výpočet skalárneho súčinu sme odvodili ešte jeden vzorec, ktorý nenarába so súradnicami. Všimni si ho v rámčeku.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \varphi}$$

U: Ak si ho aplikujeme na náš prípad, máme vzorec:

$$W = F \cdot d \cdot \cos \alpha$$

Ž: *Á ... Taký vzorec sme predsa tiež používali na fyzike!*

U: V prípade, ak smer sily bol iný ako smer posunutia. Uhol α je uhol, ktorý zviera vektor sily s vektorom posunutia. Aspoň teraz vieš, odkiaľ sa takýto vzorec zobral. Nie je to nič iné ako skalárny súčin vektorov.

Ž: *Tak to mám teraz ľahkú úlohu, dosadím do vzorca, a mám. Prácu W vypočítam ako súčin sily F, posunutia d a kosínusu uhla α, čo je $200 \cdot 25 \cdot \cos 30°$. Keďže $\cos 30°$ sa rovná $\frac{1}{2}$, dostavame $200 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2}$, čo je 2500. Sila vykoná prácu $2500J$.*

$$\boxed{\begin{gathered} W = F \cdot d \cdot \cos \alpha \\ W = 200 \cdot 25 \cdot \cos 30° = 200 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2} = 2500\mathrm{J} \end{gathered}}$$