Parametrické vyjadrenie roviny

RNDr. Viera Vodičková

U: Analytická geometria prekladá geometrické objekty do sveta čísel. Bodom priraďuje súradnice, priamkam rovnice. Rovina nebude v ničom zaostávať, aj tej priradíme rovnicu, konkrétne parametrickú.

Ž: *Poznám už parametrické vyjadrenie priamky, mám očakávať niečo podobné?*

U: V podstate áno. Rovina je geometrický objekt. Ako môžeme rovinu jednoznačne určiť?

Ž: *Na určenie roviny máme viaceré možnosti. Môžeme ju určiť napríklad troma bodmi, bodom a priamkou...*

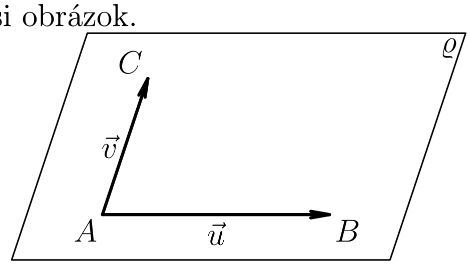
U: Ostaneme pri tých troch bodoch. Po prvé, musia to byť tri rôzne body, a po druhé, body, ktoré neležia na jednej priamke. Takým sme hovorili nekolineárne.

Ž: *Rovinu teda môžeme určiť troma nekolineárnymi bodmi.*

U: Dobre. Označme si rovinu ako ϱ, a tri jej nekolineárne body ako A, B a C. Našou úlohou bude pomocou týchto troch bodov určiť ľubovoľný iný bod tejto roviny.

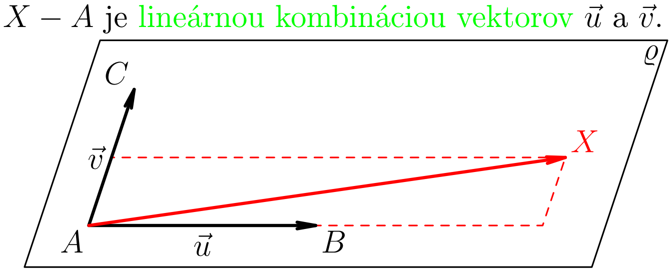
Ž: *Hodili by sa nám nejaké vektory?*

U: Áno. Vytvoríme si dva vektory, vektor $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$. Zrejme vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú lineárne nezávislé. Pozri si obrázok.



Ž: *Jasné, ak body A, B, C neležia na jednej priamke, potom ani vektory $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$ neležia na jednej priamke, sú teda lineárne nezávislé.*

U: Zoberieme si ľubovoľný bod roviny X. Vytvoríme vektor $X - A$. Sleduj ďalší obrázok. Je zrejmé, že vektor $X - A$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.



Ž: *Lineárnou kombináciou? To akože viem vektor $X - A$ „vyrobiť“ pomocou vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$... aha, na obrázku to vyzerá tak, že ak sčítam $2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$, dostanem vektor $X - A$.*

U: Túto skutočnosť môžeme zapísať nasledovne:

$$X - A = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

Alebo po úprave:

$$X = A + 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

Ž: *Podobá sa to na parametrické vyjadrenie priamky, akurát je tam ešte jeden vektor.*

U: Vo všeobecnosti pre ľubovoľný bod X roviny ϱ vieme nájsť vhodný t násobok vektora $\vec{u}$ a vhodný s násobok vektora $\vec{v}$ tak, že platí:

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}.$$

A naopak, pre ľubovoľnú dvojicu reálnych čísel t a s vieme nájsť prislúchajúci bod roviny ϱ. Zhrnieme to:
Rovnicu $X = A + t\vec{u} + s\vec{v}$, kde $t, s \in \mathbb{R}$ a $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú nenulové a lineárne nezávislé vektory, nazývame parametrickým vyjadrením roviny alebo parametrickou rovnicou roviny.

Ž: *Potreboval by som si ešte raz ujasniť, prečo majú byť vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nenulové a lineárne nezávislé. Je to také dlhé a krkolomné.*

U: Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sa nazývajú ***smerové vektory roviny***. Sú to vektory, ktoré rovinu určujú. Z toho dôvodu nemôžu byť nulové.

Ž: *To je pochopiteľné. Ale prečo majú byť lineárne nezávislé?*

U: Ak by boli lineárne závislé, tak by sme ich mohli uložiť na jednu priamku. Potom by ale jednoznačne neurčovali rovinu.

Ž: *Aha. A súvisí to s tým, že body A, B, C, ktoré určujú smerové vektory, nemôžu ležať na jednej priamke.*

U: Parametrická rovnica roviny priradí ľubovoľnej dvojici reálnych čísel t a s práve jeden bod roviny.

Ž: *A asi aj naopak. K ľubovoľnému bodu roviny nájdeme práve jednu prislúchajúcu dvojicu reálnych čísel t a s.*

U: Správne. Môžeme si nejaké body vyskúšať. Máme rovnicu

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Ak si zvolíme napr. $t = 0$ a zároveň $s = 0$, dostaneme bod A. Skús teraz ty, aké hodnoty parametrov treba zobrať, aby sme dostali bod B.

Ž: *Bod B leží na priamke $\overleftrightarrow{AB}$, budem potrebovať len vektor $\vec{u}$, vektor $\vec{v}$ nepotrebujem, preto $s = 0$. Takže pre bod B to bude $t = 1$ a $s = 0$.*

U: Výborne. Pekne si povedal, že nebudeš potrebovať vektor $\vec{v}$. Pre všetky body na priamke $\overleftrightarrow{AB}$ platí, že $s = 0$. Rovnica vyzerá:

$$X = A + t\vec{u} + 0 \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ž: *Vyzerá to celkom ako parametrické vyjadrenie priamky.*

U: Pravdaže. Smerový vektor priamky $\overleftrightarrow{AB}$ je vektor $\vec{u} = B - A$. Jednotlivé kúsky musia do seba zapadať.

Ž: *Vyjadríme si aj rovnicu roviny v súradniciach, tak ako sme to urobili pri priamke?*

U: Samozrejme. Bez súradníc by sme nemohli s rovnicou roviny veľmi pracovať. Nech bod A má súradnice $A[a_1; a_2; a_3]$, smerový vektor $\vec{u}$ má súradnice $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a smerový vektor $\vec{v}$ má súradnice $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$. Súradnice bodu X označíme ako $X[x; y; z]$. Parametrické rovnice roviny potom sú:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3, \qquad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Túto sústavu nazývame ***parametrické vyjadrenie roviny v súradniciach*** alebo ***parametrické rovnice roviny***.

U: Čo myslíš, koľko má rovina smerových vektorov?

Ž: *Povedali ste, že rovina má dva smerové vektory.*

U: Dobre, asi som zle položil otázku. Koľko dvojíc smerových vektorov má rovina?

Ž: *Na určenie dvoch smerových vektorov sme potrebovali tri nekolineárne body. Rovina však obsahuje nekonečne veľa bodov, preto trojicu bodov, ktoré určujú rovinu, si tiež môžem vybrať nekonečne veľa spôsobmi.*

U: Presne tak. Preto existuje nekonečne veľa parametrických vyjadrení tej istej roviny.

Ž: *Tak to bolo aj s parametrickým vyjadrením priamky.*

U: Na záver si to už len ujasníme. Čím je rovina jednoznačne daná? Teda, čo potrebujeme poznať, aby sme vedeli napísať parametrické vyjadrenie roviny?

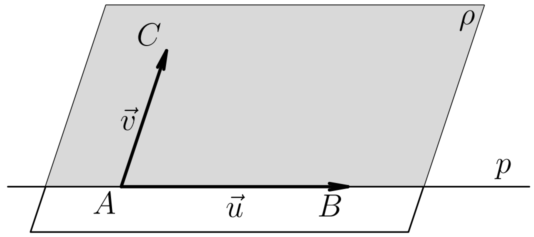
Ž: *Aby som vedel napísať parametrické vyjadrenie roviny potrebujem jeden bod, samozrejme patriaci rovine, a dva jej smerové vektory.*

U: Správne. Rovina je jednoznačne daná jedným bodom a dvoma jej smerovými vektormi. Tie musia byť lineárne nezávislé.

U: Povieme si ešte niečo o tom, ako môžeme analyticky vyjadriť ***polrovinu***.

Ž: *Polrovina? To je časť roviny, vlastne jej „polovica“.*

U: Polrovina je určená hraničnou priamkou a bodom, ktorý jej patrí. Vráťme sa k prvému obrázku.



Body A, B ležia na priamke, nazvime ju p. Potom máme polrovinu $\overrightarrow{pC}$, určenú hraničnou priamkou p a bodom C.

Ž: *Je to jasné. Polrovina $\overrightarrow{pC}$ - to sú všetky body priamky p a všetky body roviny ϱ na tej strane od priamky, kde je aj bod C.*

U: Vieme už, že rovinu ϱ môžeme vyjadriť parametricky takto:

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Ako sa to zmení pri polrovine?

Ž: *Ak som správne pochopil teóriu, body roviny získavame ako lineárne kombinácie vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Teraz potrebujeme len body „nad“ priamkou p. Násobky vektora $\vec{u}$ sú asi v pohode. Pri vektore $\vec{v}$ nemôžeme zobrať tie „dolné“ násobky.*

U: Výborne. Podstatu si vystihol. Bodom polroviny $\overrightarrow{pC}$ zodpovedajú nezáporné násobky vektora $\vec{v}$. Preto polrovinu $\overrightarrow{pC}$ môžeme parametricky vyjadriť:

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R} \ \wedge \ s \in \langle 0; \infty).$$

Príklad 1: *Dané sú body $A[3;0;5]$, $B[-4;-2;1]$ a $C[-3;-2;-1]$. Určte parametrické vyjadrenie roviny $\varrho = \overleftrightarrow{ABC}$.*

Ž: *Na parametrické vyjadrenie roviny potrebujem poznať dva jej smerové vektory a bod, ktorý patrí rovine. Body máme až tri...*

U: Smerové vektory si pomocou týchto troch bodov ľahko vyrobíme. Napríklad prvým smerovým vektorom bude vektor $\vec{u} = B - A$.

Ž: *Druhým smerovým vektorom bude vektor $\vec{v} = C - A$.*

U: Áno, je to jedno ako zvolíme vektory, ale najjednoduchšie je vždy si voliť vektory s tým istým začiatkom. Vypočítajme ich súradnice.

Ž: *Vektor $\vec{u} = B - A$. Bod $A[3;0;5]$ a bod $B[-4;-2;1]$. Súradnice vektora $\vec{u}$ vypočítam ako rozdiel súradníc bodov A a B. Preto:*

$$\vec{u} = B - A = (-4-3; -2-0; 1-5) = (-7; -2; -4).$$

Nasleduje druhý vektor $\vec{v} = C - A$. Bod $C[-3;-2;-1]$ a bod $A[3;0;5]$. Súradnice vektora $\vec{v}$ budú:

$$\vec{v} = C - A = (-3-3; -2-0; -1-5) = (-6; -2; -6).$$

U: Dobre, máme súradnice smerových vektorov. Skontroloval si si, či dané tri body určujú vôbec rovinu? Sú body A, B a C nekolineárne?

Ž: *To musím? Myslel som, že ak mi dajú úlohu napísať rovnicu roviny, tak je jasné, že tieto body rovinu tvoria!*

U: Na to sa nemôžeš spoliehať. Overiť, či sú body A, B a C nekolineárne nie je problém. Máme už teraz smerové vektory, stačí overiť, či sú lineárne nezávislé.

Ž: *Lineárne nezávislé? Máte na mysli to, či nie je jeden násobkom druhého?*

U: Presne to.

Ž: *Súradnice vektorov sú $\vec{u} = (-7;-2;-4)$ a $\vec{v} = (-6;-2;-6)$. Vidím, že vektor $\vec{v}$ nie je násobkom vektora $\vec{u}$.*

U: Áno. Napríklad si všimneme druhé súradnice, tie sú rovnaké. Ak by mal byť vektor $\vec{v}$ násobkom vektora $\vec{u}$, museli by byť rovnaké aj ostatné súradnice. Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú lineárne nezávislé a body A, B a C určujú rovinu.

Ž: *Máme smerové vektory aj bod, napr. A. Napíšeme teda parametrické rovnice roviny.*

U: Parametrické vyjadrenie roviny je:

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Ž: *Súradnice bodu X sú $X[x;y;z]$. Dosadím potrebné súradnice a máme:*

$$\begin{aligned} x &= 3 - 7t - 6s \\ y &= -2t - 2s \\ z &= 5 - 4t - 6s, \qquad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

U: Výborne. Podotýkam však, že to nie je jedinné parametrické vyjadrenie roviny $\overleftrightarrow{ABC}$. Stačí namiesto bodu A zobrať bod B a dostaneme tiež správne parametrické vyjadrenie roviny:

$$X = B + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

V súradnicovom zápise to dáva:

$$\begin{aligned} x &= -4 - 7t - 6s \\ y &= -2 - 2t - 2s \\ z &= 1 - 4t - 6s, \qquad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Úloha 1: *Dané sú body $A[2;1;6]$, $B[0;-1;-6]$ a $C[-1;2;0]$. Určte parametrické vyjadrenie roviny $\varrho = \overleftrightarrow{ABC}$.*

Výsledok: Napr.

$$\begin{aligned} x &= 2 - t + s \\ y &= 1 - t - 3s \\ z &= 6 - 6t - 6s, \qquad t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Príklad 2: *Je daná rovina ϱ : $x = 2 + 5t - s$, $y = 1 - t$, $z = -3 + 2t + 7s$, $t, s \in \mathbb{R}$.*

(a) *Určte súradnice smerových vektorov roviny ϱ.*

(b) *Určte súradnice aspoň dvoch rôznych bodov ležiacich v rovine ϱ.*

Ž: *Máme danú rovinu a to, tuším, parametrickým vyjadrením.*

U: Tvojou úlohou bude naučiť sa vyčítať z parametrického vyjadrenia roviny, čo najviac informácií.

Ž: *To nebudeme nič počítať?*

U: Veľa nie. Ako vyzerá parametrická rovnica roviny?

Ž: *Je to rovnica:*

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

A je bod roviny, $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú jej smerové vektory roviny.

U: Áno. Po rozpise do súradníc parametrické vyjadrenie roviny vyzerá takto:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3, \qquad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kde môžeme nájsť súradnice smerových vektorov?

Ž: *Súradnice smerových vektorov sú zrejme tieto: $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$.*

U: Áno, a keď sa pozrieme na parametrické rovnice, vidíme, že $u_1; u_2; u_3$ sú čísla, ktoré stoja pri parametri t.

Ž: *A súradnice vektora $\vec{v}$ stoja pri parametri s. Je to ľahké, pekne ich tam vidno.*

U: Výborne. Venujme sa našej rovine. V parametrickom vyjadrení vyznačíme červenou čísla pri parametri t a modrou pri parametri s.

$$\begin{aligned} x &= 2 \ +5t \ -s \\ y &= 1 \ \ -t \\ z &= -3+2t+7s, \qquad t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ž: *Smerový vektor $\vec{u}$ má súradnice*

$$\vec{u} = (5; -1; 2),$$

to sú červené čísla stojace pri parametri t. Smerový vektor $\vec{v}$ bude mať súradnice -1, …v druhej rovnice nie je parameter s!

U: Len žiadnu paniku! Parameter s je v druhej rovnici…

Ž: *Nič tam nevidím!*

U: …ale je vynásobený nulou. Druhá rovnica by mohla vyzerať aj takto:

$$y = 1 - t + 0s.$$

Ž: *Rozumiem. Kto by to tam písal, keď je to nula? Druhý smerový vektor má súradnice:*

$$\vec{v} = (-1; 0; 7),$$

to sú modré čísla stojace pri parametri s.

U: Výborne. Ostáva nám určiť súradnice aspoň dvoch rôznych bodov roviny. Predpokladám, že s jedným bodom nebude žiaden problém.

Ž: *Súradnice bodu* $A[a_1; a_2; a_3]$ *- to sú tie čísla na začiatku, hneď za rovná sa. Čiže bod* A *má súradnice*

$$A[2; 1; -3].$$

U: Ostáva druhý bod, nazvime ho napr. B.

Ž: *Ten nejako získame pomocou parametrov* t *a* s.

U: Máš pravdu. Parametrické vyjadrenie roviny znamená, že ľubovoľnej dvojici reálnych čísel t a s zodpovedá práve jeden bod roviny. Pre bod A to boli hodnoty $t = 0$ a $s = 0$.

Ž: *Znamená to, že si zvolím konkrétne hodnoty* t *a* s, *dosadím ich do rovníc a mám súradnice nejakého bodu roviny?*

U: Presne si to vystihol. $t,\ s$ sú ľuvolné reálne čísla, ich hodnoty si môžeš zvoliť.

Ž: *Napríklad* $t = 1$ *a* $s = -1$. *Dosadím tieto hodnoty do parametrických rovníc a vypočítam súradnice:*

$$\begin{aligned} x &= 2 + 5 \cdot 1 - (-1) = 2 + 5 + 1 = 8 \\ y &= 1 - 1 = 0 \\ z &= -3 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) = -3 + 2 - 7 = -8. \end{aligned}$$

Bod B *má súradnice* $B[8; 0; -8]$.

Úloha 1: *Je daná rovina* $\varrho:\ x = 1 - 6s,\ y = 5 + t - s,\ z = 1 - 3t - 3s,\ t, s \in \mathbb{R}$.

(a) Určte súradnice smerových vektorov roviny ϱ.

(b) Určte súradnice aspoň dvoch rôznych bodov ležiacich v rovine ϱ.

Výsledok:

(a) $\vec{u} = (0; 1; -3)$, $\vec{v} = (-6; -1; -3)$

(b) napr. $A[1; 5; 1]$ $(t = 0,\ s = 0)$, $B[-5; 5; -5]$ $(t = 1,\ s = 1)$

Príklad 3: *Je daná rovina* $\varrho: \quad x = 2 - t + s, \; y = 1 - t - 3s \; z = 6 - 6t - 6s, \; t, s \in \mathbb{R}$. *Rozhodnite, či body* $K[2;4;10]$ *a* $L[-3;2;-6]$ *ležia v rovine* ϱ.

U: Najprv ťa trochu vyskúšam. Aké súradnice majú smerové vektory roviny?

Ž: *To viem. Súradnice prvého smerového vektora musím hľadať pri parametri* t *a súradnice druhého smerového vektora pri parametri* s. *Teda* $\vec{u} = (-1;-1;-6)$ *a* $\vec{v} = (1;-3;-6)$.

U: Výborne. Máme rozhodnúť, či body K a L ležia v rovine ϱ. Pripomeniem, že ku každému bodu roviny existuje dvojica čísel t, s tak, aby jeho súradnice vyhovovali parametrickému vyjadreniu roviny.

Ž: *Znamená to, že budeme hľadať, aké* t *a* s *zodpovedá bodu* K *a potom bodu* L*?*

U: Áno. Je však možné, že také hodnoty neexistujú, potom daný bod v rovine neleží. Začnime s bodom K. Predpokladajme, že leží v rovine ϱ. Potom môžeme dosadiť jeho súradnice do parametrického vyjadrenia roviny.

Ž: *Kam mám dosadiť jeho súradnice?*

U: Do parametrického vyjadrenia, namiesto x, y a z.

Ž: *Aha! Bod* $K[2;4;10]$, *dosadzujem:*

$$\begin{aligned} 2 &= 2 - t + s \\ 4 &= 1 - t - 3s \\ 10 &= 6 - 6t - 6s. \end{aligned}$$

U: Dostali sme sústavu troch rovníc. Koľko máme neznámych?

Ž: *Dve:* t *a* s.

U: To znamená, že dve rovnice by nám mohli postačiť na vypočítanie hodnôt t a s. Tretia rovnica je kontrolná. Rozhodne o tom, či sústava má riešenie, alebo nemá.

Ž: *Dobre. Vyberiem si dve rovnice, napr. prvé dve:*

$$\begin{aligned} 2 &= 2 - t + s \\ 4 &= 1 - t - 3s. \end{aligned}$$

Prvú rovnicu vynásobím číslom -1 *a následne obe rovnice sčítam. Sledujte rámček. Dostali sme rovnicu* $2 = -1 - 4s$. *Z nej už ľahko dostávam* $s = -\frac{3}{4}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} 2 = 2 - t + s \quad / \cdot (-1) \\ \underline{4 = 1 - t - 3s \qquad\quad} \\ 2 = -1 - 4s \\ s = -\dfrac{3}{4}. \end{array}}$$

U: Výborne. Potrebujeme ešte vypočítať druhú neznámu t.

Ž: *Použijem na to napr. prvú rovnicu:*

$$2 = 2 - t + s.$$

Dosadím $s = -\frac{3}{4}$ *a vypočítam* t.

$$2 = 2 - t - \frac{3}{4}$$
$$t = -\frac{3}{4}.$$

U: Nasleduje kontrola v tretej nepoužitej rovnici.

Ž: *Do tretej rovnice* $10 = 6 - 6t - 6s$ *dosadíme vypočítané hodnoty* t *a* s.

$$10 = 6 - 6 \cdot (-\tfrac{3}{4}) - 6 \cdot (-\tfrac{3}{4}).$$

Upravím pravú stranu:

$$10 = 6 + \frac{9}{2} + \frac{9}{2}$$

a dostávam

$$10 \neq 15.$$

U: Rovnosť neplatí. Bod K nepatrí do roviny ϱ, pretože jeho súradnice nevyhovujú parametrickým rovniciam roviny pre žiadnu dvojicu čísel t a s.

Ž: *Pre bod* L *použijem zrejme ten istý postup. Súradnice bodu* $L[-3; 2; -6]$ *dosadím do parametrických rovníc roviny* ϱ.

$$\begin{aligned} -3 &= 2 - t + s \\ 2 &= 1 - t - 3s \\ -6 &= 6 - 6t - 6s. \end{aligned}$$

Vyberiem si prvé dve rovnice:

$$\begin{aligned} -3 &= 2 - t + s \\ 2 &= 1 - t - 3s. \end{aligned}$$

Prvú rovnicu vynásobím číslom -1 *a následne obe rovnice sčítam. Dostanem rovnicu*

$$5 = -1 - 4s.$$

Z nej už ľahko dostávam

$$s = -\frac{3}{2}.$$

U: Ide ti to výborne.

Ž: *Hodnotu $s = -\frac{3}{2}$ dosadím do prvej rovnice:*

$$-3 = 2 - t + s$$

a vypočítam t

$$-3 = 2 - t - \frac{3}{2}$$
$$t = \frac{7}{2}.$$

Nasleduje kontrola v tretej nepoužitej rovnici $-6 = 6 - 6t - 6s$. Takže

$$-6 = 6 - 6 \cdot \frac{7}{2} - 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right).$$

Po úprave to dáva:

$$-6 = -6.$$

U: Rovnosť platí. Bod L patrí do roviny ϱ, pretože jeho súradnice vyhovujú parametrickým rovniciam roviny pre dvojicu čísel $t = \frac{7}{2}$ a $s = -\frac{3}{2}$.

Úloha 1: *Rozhodnite, ktoré z bodov $A[1; 2; 3]$, $B[2; 3; 0]$ a $C[4; -7; 3]$ ležia v rovine určenej parametrickým vyjadrením $x = 2 - t + s,\ y = -1 + t - 2s\ z = 3 + 2t - s,\ t, s \in \mathbb{R}$.*

Výsledok: A leží ($t = -1,\ s = -2$), B neleží, C leží ($t = 2,\ s = 4$)

Príklad 4: *Je daná rovina* $\varrho:\ x = 2 - t + s,\ y = 1 - t - 3s,\ z = 6 - 6t - 6s,\quad t, s \in \mathbb{R}$. *Určte* $m \in \mathbb{R}$ *tak, aby bod* $M[-2; 1; m]$ *ležal v rovine* ϱ.

Ž: *Rovina je daná parametrickým vyjadrením. Viem, že každému bodu roviny je priradená dvojica parametrov* t *a* s.

U: Áno. Dodám len, že je to dvojica, pre ktorú súradnice daného bodu vyhovujú parametrickým rovniciam roviny.

Ž: *Ak bod* M *leží v rovine, aj jeho súradnice musia vyhovovať parametrickým rovniciam roviny.*

U: Správne. Preto ich môžeme dosadiť do parametrických rovníc.

Ž: *Bod* $M[-2; 1; m]$, *preto:*

$$\begin{aligned} -2 &= 2 - t + s \\ 1 &= 1 - t - 3s \\ m &= 6 - 6t - 6s. \end{aligned}$$

U: Dostali sme sústavu troch rovníc s troma neznámymi. Potrebujeme ju len vyriešiť. Všimnime si, že neznáma m sa nachádza len v tretej rovnici. Preto pomocou prvých dvoch rovníc vypočítame hodnoty parametrov t a s.

Ž: *Prvú rovnicu vynásobím číslom* -1 *a následne obe rovnice sčítam. Sledujte rámček. Získal som rovnicu* $3 = -1 - 4s$. *Z nej už ľahko dostávam* $s = -1$.

$$\boxed{\begin{array}{l} -2 = 2 - t + s \quad / \cdot (-1) \\ \ \ 1 = 1 - t - 3s \\ \hline \\ \ \ 3 = -1 - 4s \\ \ \ s = -1 \end{array}}$$

U: Výborne. Potrebujeme ešte vypočítať druhú neznámu t.

Ž: *Použijem na to napr. prvú rovnicu:*

$$-2 = 2 - t + s.$$

Dosadím $s = -1$ *a vypočítam* t

$$\begin{aligned} -2 &= 2 - t - 1 \\ t &= 3. \end{aligned}$$

U: Bodu M zodpovedá v parametrických rovniciach roviny dvojica parametrov $t = 3$ a $s = -1$. Dosadením do tretej rovnice získame hľadanú hodnotu m.

Ž: *Dobre. Tu je tretia rovnica*

$$m = 6 - 6t - 6s.$$

Dosadím hodnoty $t = 3$ *a* $s = -1$:

$$m = 6 - 6 \cdot 3 - 6 \cdot (-1).$$

Vypočítam

$$m = 6 - 18 + 6 = -6.$$

U: Bod M má súradnice $M[-2;1;-6]$.

Úloha 1: *Určte číslo* $a \in \mathbb{R}$ *tak, aby bod* $A[6;0;2]$ *ležal v rovine, ktorej parametrické vyjadrenie je* $x = 3 - t + s,\ y = t + 2s,\ z = -1 + t + as, \quad t, s \in \mathbb{R}$.

Výsledok: $a = 5$

Príklad 5: *Napíšte parametrické vyjadremie roviny ϱ, ktorá je určená bodom $A[2;-3;1]$ a priamkou p s parametrickým vyjadrením $x = 1+2t$, $y = -3+t$, $z = 4+3t$, $t \in \mathbb{R}$.*

Ž: *Viem, že rovnicu*

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

nazývame parametrické vyjadrenie roviny.

U: Áno. Pričom A je ľubovoľný bod roviny a $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú jej smerové vektory roviny. Sú to vektory, ktoré rovinu určujú, teda ich môžeme do roviny umiestniť.

Ž: *Budem potrebovať bod roviny, ten mám, je to bod $A[2;-3;1]$. Potom ešte smerové vektory ... tie nemám.*

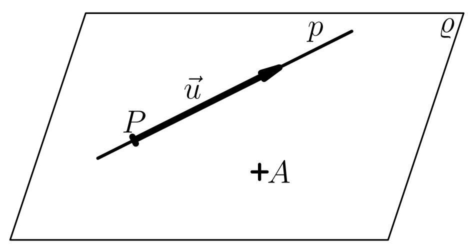
U: Máme však danú priamku p. Čo môžeme vyčítať z parametrického vyjadrenia priamky p?

Ž: *Z parametrického vyjadrenia priamky viem vyčítať súradnice jedného bodu priamky, to sú tie čísla, hneď za rovná sa. Označím ho napr. P. Má súradnice $P[1;-3;4]$.*

U: Výborne. Ale to ešte nie je všetko.

Ž: *Samozrejme, nenechali ste ma dohovoriť. Ešte viem súradnice smerového vektora priamky p, to sú zase čísla stojace pri parametri t. Smerový vektor priamky p má súradnice $\vec{u} = (2;1;3)$.*

U: Pre lepšiu predstavu si načrtneme obrázok.



U: Na obrázku máme rovinu ϱ, v nej leží priamka p. Na priamke p máme vyznačený bod P a smerový vektor priamky $\vec{u}$. V rovine ϱ sa ešte nachádza bod A.

Ž: *Odkiaľ viete, že obrázok vyzerá takto? Čo ak bod A leží na priamke p?*

U: To je veľmi správna pripomienka! V prípade, že by bod A ležal na priamke p, rovina ϱ by nebola jednoznačne určená. Vieme to overiť?

Ž: *Mám zistiť, či bod A patrí priamke p? Zoberiem súradnice bodu $A[2;-3;1]$ a dosadím ich do parametrických rovníc priamky p:*

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 2t \\ -3 &= -3 + t \\ 1 &= 4 + 3t \end{aligned}$$

Z prvej rovnice dostávam $t = \frac{1}{2}$ a z druhej rovnice $t = 0$. Táto sústava nemá riešenie, a preto bod A nepatrí priamke p. Môžeme pokračovať.

U: Dobre. Hľadáme smerové vektory roviny ϱ. Pozrime sa na obrázok, či ich tam nemáme.

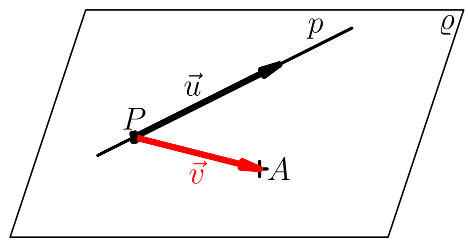
Ž: *No, keď sa tak na to pozerám, smerový vektor $\vec{u}$ priamky p môže byť aj smerovým vektorom roviny ϱ. Vektor $\vec{u}$ leží predsa aj v rovine ϱ!*

U: No vidíš! Jeden smerový vektor by sme mali. Aj druhý je na obrázku, len sa treba poriadne pozrieť.

Ž: *Pozerám sa... a nič.*

U: Vektor je určený dvoma bodmi. Poznáme v rovine ϱ dva body, ktoré by mohli určovať jej smerový vektor?

Ž: *Jasné! Máme body P a A. Vytvoria nám ďalší vektor $\vec{v} = A - P$. Načrtnem ho aj na obrázku.*



U: Výborne. Aké má súradnice?

Ž: *Vektor $\vec{v} = A - P$, preto jeho súradnice sú*

$$\vec{v} = (2-1; -3-(-3); 1-4) = (1; 0; -3).$$

U: Zhrnieme to. Máme bod roviny $A[2; -3; 1]$. Smerové vektory sú $\vec{u} = (2; 1; 3)$ a $\vec{v} = (1; 0; -3)$. Nič nám už nebráni zapísať parametrické vyjadrenie roviny v súradniciach.

Ž: *Parametrické vyjadrenie roviny ϱ je:*

$$\begin{aligned} x &= 2 + 2t + s \\ y &= -3 + t \\ z &= 1 + 3t - 3s, \qquad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Úloha 1: *Napíšte parametrické vyjadremie roviny, ktorá je určená bodom $A[-1; 2; 5]$ a priamkou s parametrickým vyjadrením $x = -2 + 3t,\ y = -1 + t,\ z = 3t, \quad t \in \mathbb{R}$.*

Výsledok: Napr.

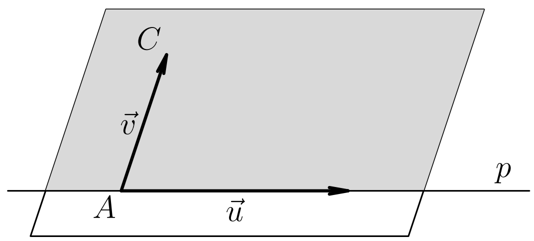
$$\begin{aligned} x &= -1 + 3t - s \\ y &= 2 + t - 3s \\ z &= 5 + 3t - 5s, \qquad t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Príklad 6: *Daná je priamka* $p(A;\vec{u})$ *a bod* C, *pričom* $A[2;5;5]$, $\vec{u}=(1;-3;2)$ *a* $C[4;7;-1]$. *Určte parametrické vyjadrenie polroviny* $\overrightarrow{pC}$.

Ž: *Parametrické vyjadrenie polroviny bude podobné ako parametrické vyjadrenie celej roviny.*

U: Navrhujem, nakresliť si obrázok.

Ž: *Súhlasím. Máme priamku* p, *na nej bod* A *a smerový vektor* $\vec{u}$. *Niekde mimo priamky máme bod* C.



U: Dobre. Povedal si, že je to podobné ako pri rovine. Ak by si mal napísať parametrické vyjadrenie roviny, čo by si k tomu potreboval?

Ž: *Potreboval by som bod, to bude bod* A. *Potom dva smerové vektory. Jedným bude vektor* $\vec{u}$.

U: Tým druhým bude vektor $\vec{v}=C-A$.

Ž: *Jasné. Určím si jeho súradnice. Vektor* $\vec{v}=C-A$. *Bod* $A[2;5;5]$ *a bod* $C[4;7;-1]$. *Súradnice vektora* $\vec{v}$ *vypočítam ako rozdiel súradníc bodov* C *a* A. *Preto:*

$$\vec{v}=C-A=(4-2;7-5;-1-5)=(2;2;-6).$$

U: Dobre. Všimneme si, že vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nie sú lineárne závislé. Svedčí to o tom, že bod C neleží na priamke p.

Ž: *Pokúsim sa napísať parametrické vyjadrenie roviny:*

$$X=A+t\vec{u}+s\vec{v},\quad t,s\in\mathbb{R}.$$

U: S tým súhlasím. Bodom polroviny $\overrightarrow{pC}$ zodpovedajú nezáporné násobky vektora $\vec{v}$. Preto polrovinu $\overrightarrow{pC}$ môžeme parametricky vyjadriť takto:

$$X=A+t\vec{u}+s\vec{v},\quad t\in\mathbb{R}\ \wedge\ s\in\langle 0;\infty).$$

Ž: *Dosadím potrebné súradnice a máme parametrické vyjadrenie polroviny* $\overrightarrow{pC}$:

$$\begin{aligned} x&=2+t+2s\\ y&=5-3t+2s\\ z&=5+2t-6s,\qquad t\in\mathbb{R}\ \wedge\ s\in\langle 0;\infty). \end{aligned}$$

Úloha 1: *Daná je priamka* $p(A;\vec{u})$ *a bod* C; $A[1;-3;4]$, $\vec{u}=(2;1;3)$ *a* $C[2;-3;1]$. *Určte parametrické vyjadrenie polroviny* $\overrightarrow{pC}$.

Výsledok:

$$x = 1 + 2t + s$$
$$y = -3 + t$$
$$z = 4 + 3t - 3s, \qquad t \in \mathbb{R} \ \wedge \ s \in \langle 0; \infty).$$