Parametrické vyjadrenie priamky

RNDr. Viera Vodičková

U: Prácu s vektormi už ovládame. Ukážeme si, ako môžeme priradiť priamke rovnicu. Začneme s geometriou. Koľkými bodmi je určená priamka?

Ž: *Priamka je určená dvoma rôznymi bodmi.*

U: Správne. Označme si ich napríklad A a B. Tieto dva body určujú vektor, ktorý označíme $\vec{u}$. Vektor $\vec{u} = B - A$. Nazývame ho ***smerovým vektorom priamky***. Smerový vektor priamky je nenulový vektor, ktorý môžeme na danú priamku umiestniť.

Ž: *Ale takých vektorov je veľmi veľa. Môžem si zvoliť ľubovoľné dva body priamky.*

U: Áno, to je pravda. Priamka má nekonečne veľa smerových vektorov.

Ž: *Keď sa nad tým zamyslím, všetky sa dajú na priamku umiestniť. Preto sú zhruba rovnaké, len majú rôznu veľkosť, alebo sú opačne orientované.*

U: Tvoja úvaha je správna. Všetky smerové vektory sa dajú umiestniť na danú priamku. Sú lineárne závislé.

Ž: *To znamená, že každý z nich je násobkom nášho vektora $\vec{u}$.*

U: Ak si na priamke zvolíme ľubovoľný bod X, môžeme povedať, že vektor $X - A$ bude násobkom smerového vektora $\vec{u}$. Označme si tento násobok t, pričom $t \in \mathbb{R}$. Potom môžeme písať:

$$X - A = t \cdot \vec{u}.$$

Ž: *Tomu rozumiem.*

U: Danú rovnicu trochu upravíme. Dá sa povedať, že bod A pripočítame k obom stranám. Dostávame:

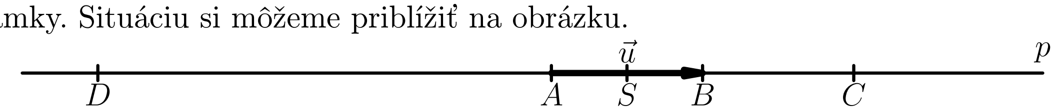
$$X = A + t \cdot \vec{u}.$$

Ž: *Môžem to čítať takto? Bod X získam tak, že k bodu A pripočítam t-násobok vektora $\vec{u}$.*

U: Áno, vystihol si podstatu. Môžeme pristúpiť k formulovaniu definície.
Rovnicu $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$ a $\vec{u} \neq \vec{0}$, nazývame parametrické vyjadrenie priamky.
Niekedy hovoríme aj o parametrickej rovnici priamky.

Ž: *Celkom to dáva zmysel. Bodov na priamke je nekonečne veľa. Aj reálnych čísel je nekonečne veľa. K ľubovoľnému reálnemu číslu t nájdem zodpovedajúci bod na priamke.*

U: Áno, a navyše to platí aj obrátene. K ľubovoľnému bodu priamky nájdeme prislúchajúce reálne číslo t. Reálne číslo t nazývame tiež ***parameter***. Odtiaľ pochádza názov vyjadrenia priamky. Situáciu si môžeme priblížiť na obrázku.



U: Na obrázku máme priamku p a na nej dva body A a B a smerový vektor $\vec{u} = B - A$. Napríklad pre $t = 2$ dostávame bod C, pričom zrejme platí, že $|AC| = 2|AB|$. Pre $t = -3$ dostávame bod D. Aký bod zodpovedá parametru $t = 1$?

Ž: *Pre $t = 1$…posuniem vektor $\vec{u}$ raz…vychádza bod C. Ale tomu zodpovedá $t = 2$. Niečo som urobil zle.*

U: Vektor $\vec{u}$ posunieme raz ale od bodu A, nie od bodu B!

Ž: *Jasné. Tak to bude bod B. Áno, parametru $t = 1$ zodpovedá bod B. Bodu A bude zodpovedať $t = 0$, ak sa nemýlim.*

U: Veľmi správne. Vidím, že si to už pochopil. Posledná skúška. Aký bod zodpovedá parametru $t = \frac{1}{2}$?

Ž: *To už je pre mňa ľahké. Bude to bod S - stred úsečky AB.*

U: Dobre. Uvedomme si, čo sme to vlastne dostali. Priamke sme priradili rovnicu. Znamená to, že namiesto s priamkou budeme teraz narábať s rovnicou.

Ž: *To je to prevratné, čo vymyslela analytická geometria?*

U: Presne tak. S bodmi a vektormi pracujeme prostredníctvom ich súradníc. Parametrická rovnica priamky sa dá prepísať do súradníc. Nech bod A má súradnice $A[a_1; a_2]$ a smerový vektor $\vec{u}$ má súradnice $\vec{u} = (u_1; u_2)$. Súradnice bodu X označíme ako $X[x; y]$.

Ž: *Podľa týchto súradníc súdim, že pôjde o priamku v rovine.*

U: Áno. Parametrická rovnica priamky $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$ je potom ekvivalentná s rovnicami:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Takúto sústavu rovníc nazývame ***parametrické vyjadrenie priamky v súradniciach***.

Ž: *Je to pochopiteľné. Prvý riadok - prvá rovnica - to sú prvé súradnice a druhý riadok druhé súradnice bodu X.*

U: Všimol si si, že máme priamku v rovine. Čo myslíš, môžeme takto vyjadriť aj priamku v priestore?

Ž: *Myslím, že všetky naše úvahy, ktoré sme tu robili, platia aj v rovine aj v priestore.*

U: To je pravda. Preto priamka v priestore má také isté parametrické vyjadrenie dané rovnicou $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$. Parametrické vyjadrenie priamky v súradniciach bude akurát obsahovať vyjadrenie tretej súradnice.

Ž: *No jasné, bude dlhšie o jeden riadok. Skúsim ho zapísať sám. Nech bod A má súradnice $A[a_1; a_2; a_3]$ a smerový vektor $\vec{u}$ má súradnice $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$. Súradnice bodu X označíme ako $X[x; y; z]$. Parametrické rovnice priamky v priestore budú takéto:*

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2 \\ z &= a_3 + tu_3, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

U: Výborne. Zhrnieme si to. Na parametrické vyjadrenie priamky potrebujem bod a smerový vektor priamky. (Prípadne dva rôzne body.)

Ž: *Na začiatku sme však hovorili o tom, že priamka má nekonečne veľa smerových vektorov. Aj bodov na priamke je nekonečne veľa.*

U: Dobre si to pamätáš. Z týchto dôvodov parametrické vyjadrenie priamky nie je jednoznačné. Priamka má nekonečne veľa parametrických vyjadrení.

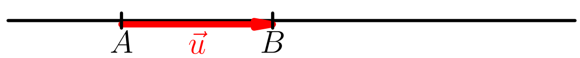
Ž: *Môže sa stať, že sused bude mať úplne iné parametrické vyjadrenie priamky ako ja, a aj tak to budeme mať obaja správne. Alebo nesprávne. To sa bude ťažko opisovať...*

U: Ale aj mne opravovať.

U: Parametricky sa veľmi jednoducho dajú vyjadriť aj časti priamok.

Ž: *Myslí sa tým napríklad úsečka, polpriamka a podobne?*

U: Správne. Vrátime sa k obrázku priamky, na ktorej sú dané dva body A a B a smerový vektor $\vec{u} = B - A$.



U: Už sme hovorili, že každému bodu na priamke prislúcha práve jedno reálne číslo t. Pozrime sa na polpriamku $\overrightarrow{AB}$. Aké hodnoty parametra t prislúchajú bodom tejto polpriamky?

Ž: *Myslím, že viem, o čo vám ide. Všimol som si už predtým, že ak t je kladné, dostaneme bod napravo od bodu A, a ak t je záporné, tak naľavo.*

U: Pre náš obrázok to platí. Závisí to však od orientácie smerového vektora $B - A$, stačí, že bod B bude naľavo od bodu A ... Okrem toho hovoriť napravo a naľavo nie je spoľahlivé, čo ak bude priamka nakreslená zvisle? Máš však pravdu v tom, že bodom polpriamky AB prislúchajú kladné hodnoty parametra t a samozrejme aj $t = 0$ - to je bod A.
Rovnicu $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \langle 0; \infty)$ a $\vec{u} \neq \vec{0}$, nazývame ***parametrické vyjadrenie polpriamky*** $\overrightarrow{AB}$.

Ž: *Podobne to bude aj s úsečkou?*

U: Áno. Bodu A zodpovedá parameter $t = 0$ a pre bod B je $t = 1$.

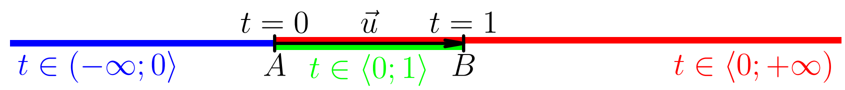
Ž: *A bodom medzi nimi parameter t z intervalu* $(0; 1)$.

U: Správne. Rovnicu $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \langle 0; 1\rangle$ a $\vec{u} \neq \vec{0}$, nazývame ***parametrické vyjadrenie úsečky*** AB.

U: Zhrnutie si môžeš pozrieť v tabuľke.

Parametrické vyjadrenie		
priamky $\overleftrightarrow{AB}$:	$X = A + t\vec{u}$,	kde $t \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = B - A$
úsečky AB :	$X = A + t\vec{u}$,	kde $t \in \langle 0; 1\rangle$, $\vec{u} = B - A$
popriamky $\overrightarrow{AB}$:	$X = A + t\vec{u}$,	kde $t \in \langle 0; \infty)$, $\vec{u} = B - A$

U: Na záver ti ponúkam jeden obrázok. Máš na ňom znázornenú zelenou farbou úsečku AB, červenou farbou polpriamku $\overrightarrow{AB}$ a modrou farbou opačnú polpriamku k polpriamke $\overrightarrow{AB}$. Ku každej máš znázornené, z akej množiny je potrebné zobrať hodnoty parametra t.


$t = 0$
$\vec{u}$
$t = 1$
$t \in (-\infty; 0\rangle$
A
$t \in \langle 0; 1\rangle$
B
$t \in \langle 0; +\infty)$

Príklad 1: *Napíšte parametrické vyjadrenie priamky p danej bodom $A[1; 1]$ a smerovým vektorom $\vec{u} = (-2; 3)$.*

Ž: *Parametrické vyjadrenie? To je také vyjadrenie, v ktorom vystupuje parameter, označovali sme ho, tuším, t.*

U: Zopakujeme si, že parametrickým vyjadrením priamky nazývame rovnicu $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$ a $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Ž: *Áno, samozrejme. Rovnica vyjadruje, že každý bod priamky získame tak, že k bodu A pripočítame t-násobok smerového vektora priamky.*

U: Aj tak sa to dá povedať. Na parametrické vyjadrenie priamky potrebujeme jeden bod priamky a smerový vektor priamky.

Ž: *Všetko predsa máme zadané. Táto úloha sa zdá byť ľahkou.*

U: Potrebujeme ešte parametrické vyjadrenie priamky v súradniciach. Vyzerá takto:

$$
\begin{aligned}
x &= a_1 + tu_1 \\
y &= a_2 + tu_2, \qquad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Ž: *Teraz mi stačí len dosadiť súradnice bodu A a súradnice smerového vektora $\vec{u}$. Parametrické rovnice priamky budú*

$$
\begin{aligned}
x &= 1 - 2t \\
y &= 1 + 3t.
\end{aligned}
$$

U: Máš to správne?

Ž: *Skontroloval som si to. Najprv sú súradnice bodu A a pri parametri t stoja súradnice vektora $\vec{u}$.*

U: Zabudol si ale na parameter t. Aké hodnoty môže nadobúdať?

Ž: *Aha! t môže byť ľubovoľné reálne číslo. Predpokladal som, že je to jasné. Potom to netreba písať.*

U: Práve naopak. Nesmieš zabudnúť napísať, do akej množiny patrí parameter t. Parameter môže byť aj z nejakého intervalu a potom sa jedná o určitú časť priamky.

Ž: *Tak to opravím. Parametrické vyjadrenie priamky p bude takéto:*

$$
\begin{aligned}
x &= 1 - 2t \\
y &= 1 + 3t, \qquad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Úloha 1: *Napíšte parametrické vyjadrenie priamky p danej bodom $K[-3; 5; 2]$ a smerovým vektorom $\vec{v} = (6; -3; 0)$.*

Výsledok:

$$
\begin{aligned}
x &= -3 + 6t \\
y &= 5 - 3t \\
z &= 2, \qquad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Príklad 2: *Napíšte parametrické vyjadrenie priamky* $p = \overleftrightarrow{AB}$*, ak* $A[5; -2; 1]$ *a* $B[9; 2; 3]$.

U: Pustime sa do toho. Čo navrhuješ?

Ž: *Mám napísať parametrické vyjadrenie priamky. Potrebujem k tomu jeden bod priamky a smerový vektor. S bodom nebudú problémy, mám hneď dva. Ale smerový vektor?*

U: Čo je to podľa teba smerový vektor?

Ž: *Smerový vektor je vektor, ktorý sa dá umiestniť na danú priamku.*

U: No vidíš! Máme na priamke dané dva rôzne body A a B. Vieš o nejakom vektore, ktorý je na priamke umiestnený?

Ž: *Jasné. Bude to vektor vyrobený z týchto dvoch bodov. Napríklad vektor* $B - A$*. Smerovým vektorom bude vektor* $\vec{u} = B - A$.

U: Určme jeho súradnice.

Ž: *Vektor* $\vec{u}$ *je vektor* $B - A$*, preto jeho súradnice budú rozdielom príslušných súradníc bodov* B *a* A*. Čiže vektor* $\vec{u}$ *má súradnice:* $\vec{u} = (4; 4; 2)$.

U: Výborne. Môžeme už teraz zapísať parametrické vyjadrenie priamky p?

Ž: *Áno, už máme všetko. Parametrická rovnica priamky má tvar:* $X = A + t\vec{u}$*, kde* $t \in \mathbb{R}$ *a* $\vec{u} \neq \vec{0}$*. Stačí len dosadiť.*

U: Vytvoríme tak tri rovnice. Prvá sa bude týkať prvých súradníc, druhá druhých a tretia tretích.

Ž: *Áno, všimol som si, že body majú tri súradnice, čo znamená, že sme v priestore. Dosadím hodnoty, vyberiem si bod* $A[5; -2; 1]$ *a smerový vektor* $\vec{u} = (4; 4; 2)$*. Parametrické vyjadrenie priamky* p *bude vyzerať takto:*

$$\begin{aligned} x &= 5 + 4t \\ y &= -2 + 4t, \\ z &= 1 + 2t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

U: V poriadku. Vidím, že si nezabudol ani uviesť, do akej množiny patrí parameter.

Ž: *Mám jednu otázku. Čo keby som si vybral namiesto bodu* A *bod* B*. Bolo by aj také vyjadrenie správne?*

U: Samozrejme. Vieme, že priamka má nekonečne veľa parametrických vyjadrení. Schválne, skúsme také vyjadrenie zapísať. Aby sa nám to neplietlo, označme tentokrát parameter ako s.

Ž: *Dobre. Opäť len dosadím:*

$$\begin{aligned} x &= 9 + 4s \\ y &= 2 + 4s, \\ z &= 3 + 2s, \qquad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ale naozaj je to tiež dobré?

U: Môžeme si to overiť na nejakom príklade. Samozrejme, že to nebude dôkaz, ale na pochopenie to stačí. Každému bodu priamky vieme priradiť parameter tak, aby jeho súradnice vyhovovali parametrickej rovnici. Zoberme si taký bod A. Aká hodnota parametra mu odpovedá v červenom vyjadrení?

Ž: *Bodu A v červenom vyjadrení odpovedá hodnota $t = 0$, to je predsa jasné. Á, vy myslíte, že teraz sa pozrieme na to, aký parameter mu odpovedá v modrom vyjadrení?*

U: Presne tak. Stačí sa pozrieť na prvú rovnicu: $x = 9 + 4s$. Prvá súradnica bodu A je 5. Ak dosadím za $s = -1$, dostanem $x = 5$.

Ž: *Áno, súhlasí to aj pre ostatné súradnice. Bodu A v modrom vyjadrení odpovedá hodnota parametra $s = -1$.*

U: No vidíš. Bod A vyhovuje obom parametrickým vyjadreniam, ale v každom mu odpovedá iná hodnota parametra.

Ž: *Už tomu rozumiem.*

U: Na záver sa ešte pozrieme na smerový vektor $\vec{u} = (4; 4; 2)$. Vieme, že priamka má nekonečne veľa smerových vektorov.

Ž: *Áno, hocijaký jeho násobok bude tiež smerovým vektorom danej priamky.*

U: Iste si si všimol, že všetky súradnice vektora $\vec{u}$ sú násobkom dvojky. Preto aj vektor, označím ho $\vec{v} = (2; 2; 1)$ bude smerovým vektorom priamky p.

Ž: *To súhlasí, lebo platí $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}$.*

U: Priamka p môže mať parametrické vyjadrenie aj takéto $X = A + t\vec{v}$, kde $t \in \mathbb{R}$, čo znamená:

$$\begin{aligned} x &= 5 + 2t \\ y &= -2 + 2t, \\ z &= 1 + t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ž: *V poriadku, takých vyjadrení by sme mohli vymyslieť veľa...*

U: Chcel som tým len povedať, že sa stále snažíme pracovať s čo najmenšími a „najkrajšími“ číslami. Preto ak sa dá, vyberieme smerový vektor, ktorý bude mať čo „najmenšie“, ale pri tom ešte stále „pekné“ súradnice.

Ž: *Myslíte to tak, že s číslami 4, 4 a 2 - čo sú súradnice vektora $\vec{u}$, sa pracuje horšie ako s číslami 2, 2 a 1 - čo sú súradnice vektora $\vec{v}$?*

U: Možno sa to teraz nezdá, ale asi by si si nevybral smerový vektor, napríklad $\vec{a} = (4\sqrt{23}; 4\sqrt{23}; 2\sqrt{23})$, hoci aj ten je správny.

Ž: *No to asi nie, už rozumiem, čo ste chceli povedať. Budem sa snažiť na to nezabudnúť.*

Úloha 1: *Napíšte parametrické vyjadrenie priamky $p = \overleftrightarrow{MN}$, ak $M[5; 2]$ a $N[9; 4]$.*

Výsledok:

$$\begin{aligned} x &= 5 + 4t \\ y &= 2 + 2t \qquad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Príklad 3: *Je daná priamka p: $x = 5 + 4t$, $y = -2 - t$, $z = 5t$; $t \in \mathbb{R}$.*

(a) Určte súradnice aspoň jedného smerového vektora priamky p.

(b) Určte súradnice aspoň dvoch rôznych bodov ležiacich na priamke p.

U: Najprv si zopakujeme, čo vieme o parametrickom vyjadrení priamky.

Ž: *Pokiaľ sa dobre pamätám, parametrické vyjadrenie priamky je dané rovnicou: $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$.*

U: Pamätáš sa dobre. Vedel by si aj vysvetliť jednotlivé prvky v tejto rovnici?

Ž: *No ... A je bod priamky, $\vec{u}$ je jej smerový vektor, t je parameter a X je X.*

U: X je ľubovoľný bod priamky. Inak si to povedal správne. Pre úplnosť môžeme ešte dodať, že smerový vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Ž: *Pozriem sa teraz na zadanie úlohy. Priamka je daná parametricky, ale nie jednou rovnicou, ale hneď troma. Vystupujú tam súradnice x, y, z, je to priamka v priestore.*

U: Ak pracujeme so súradnicami v priestore, tak parametrická rovnica priamky je ekvivalentná s rovnicami:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2 \\ z &= a_3 + tu_3, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ž: *Aha, vidíme, že súradnice smerového vektora stoja v rovniciach hneď pri parametri, vyznačil som ich červenou farbou:*

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 5 + 4t \\ y &= -2 - 1t \\ z &= 5t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}}$$

Ž: *Stačí mi len prečítať: súradnice smerového vektora priamky sú: $\vec{u} = (4; -1; 5)$.*

U: Výborne. Súradnice jedného bodu priamky by tiež nemali byť problém.

Ž: *Veru nie. Ak porovnám parametrické vyjadrenia, vidím, že súradnice bodu A, ktorý patrí priamke, stoja hneď na začiatku. Vyznačím si ich modrou farbou:*

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 5 + 4t \\ y &= -2 - t \\ z &= 5t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}}$$

Ž: *Problém mi robí len tretia rovnica, súradnica z. Nemáme tam žiadne číslo.*

U: Ak tam nič nie je, tak je tam samozrejme nula. Tretiu rovnicu môžeme zapísať aj takto: $z = 0 + 5t$.

Ž: *Potom súradnice bodu A, ktorý patrí priamke sú: $A[5; -2; 0]$.*
Potrebujeme ešte jeden bod priamky. To už asi nepôjde tak ľahko.

U: Súradnice ďalšieho bodu priamky sa nebudú dať tak pekne prečítať, ako súradnice bodu A a smerového vektora $\vec{u}$. Napriek tomu práca s parametrickým vyjadrením nie je vôbec náročná. Spomeňme si, že každej hodnote parametra odpovedá jeden bod priamky.

Ž: *Áno! Stačí si zvoliť nejakú hodnotu pre t a dostanem ďalší bod.*

U: Presne tak. Označme tento bod napríklad ako B. Parameter si zvoľ, aký chceš.

Ž: *Napríklad $t = 2$. Dosadím túto hodnotu do parametrických rovníc a dostanem súradnice bodu B:*

$$x = 5 + 4 \cdot 2 = 5 + 8 = 13$$
$$y = -2 - 2 = -4$$
$$z = 5 \cdot 2 = 10.$$

Bod B má súradnice $B[13; -4; 10]$.

U: Je asi zrejmé, že takýmto spôsobom môžeme získať súradnice ľubovoľného počtu bodov na priamke.

Úloha 1: *Je daná priamka p: $x = 1 + 4t$, $y = -t$, $z = 3 - t$; $t \in \mathbb{R}$.*

(a) Určte súradnice aspoň jedného smerového vektora priamky p.

(b) Určte súradnice aspoň dvoch rôznych bodov ležiacich na priamke p.

Výsledok: $\vec{u} = (4; -1; -1)$, napr. $A[1; 0; 3]$, $B[5; -1; 2]$

Príklad 4: *Rozhodnite, či body* $M[5; 3]$ *a* $N[-\frac{31}{2}; 0]$ *ležia na priamke* p *určenej bodom* $A[-5; 7]$ *a smerovým vektorom* $\vec{u} = (3; 2)$*.*

U: Potrebujeme pracovať s priamku. Navrhujem začať s parametrickou rovnicou priamky p.

Ž: *Dobre. Parametrická rovnica priamky vyzerá takto:* $X = A + t\vec{u}$*, kde* $t \in \mathbb{R}$*. Jej vyjadrenie v súradniciach bude potom takéto:*

$$x = -5 + 3t$$
$$y = 7 + 2t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

U: Máme rozhodnúť, či body M a N ležia na priamke p. Pripomeniem, že každému bodu priamky p zodpovedá jedinná hodnota parametra t.

Ž: *Znamená to, že budeme hľadať aké* t *odpovedá bodu* M*? A potom to isté pre bod* N*.*

U: Áno, ale je možné, že takú hodnotu nenájdeme. Potom daný bod na priamke neleží. Začnime s bodom M. Predpokladajme, že leží na priamke p. Potom môžeme dosadiť jeho súradnice do parametrického vyjadrenia a hľadať prislúchajúcu hodnotu parametra t.

Ž: *Dobre. Dosadím súradnice bodu* M*, namiesto* x *píšem 5, čo je prvá súradnica bodu* M *a namiesto* y *píšem 3. Dostávam:*

$$5 = -5 + 3t$$
$$3 = 7 + 2t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

U: Zostavili sme sústavu dvoch lineárnych rovníc s jednou neznámou t. Ako ju navrhuješ riešiť?

Ž: *To je jednoduché. Z každej rovnice si vypočítam neznámu* t*. Z prvej rovnice po pripočítaní* 5 *k obom stranám dostávame:*

$$10 = 3t.$$

Z čoho

$$t = \frac{10}{3}.$$

Podobne pracujem s druhou rovnicou:

$$-4 = 2t$$

$$t = -2.$$

U: Z oboch rovníc sme dostali rôzne hodnoty pre parameter t. Ak by bod M ležal na priamke p, musela by obom rovniciam vyhovovať tá istá hodnota parametra t.

Ž: *To znamená, že bod* M *nepatrí priamke* p*.*

U: Postup pri bode N bude taký istý.

Ž: *Dosadím teraz súradnice bodu N. Namiesto x píšem $-\frac{31}{2}$, čo je prvá súradnica bodu N a namiesto y píšem 0. Dostávam:*

$$-\frac{31}{2} = -5 + 3t$$
$$0 = 7 + 2t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Opäť vypočítam t z oboch rovníc a porovnám. Prvú rovnicu vynásobím najprv 2, aby som odstránil zlomky:

$$-31 = -10 + 6t.$$

Pripočítam 10 a vydelím 6. Dostávam:

$$t = -\frac{21}{6}.$$

Z druhej rovnice mám hneď:

$$t = -\frac{7}{2}.$$

Opäť rôzne výsledky, ani bod N neleží na priamke p.

U: Počkaj! Z prvej rovnice si dostal $t = -\frac{21}{6}$. To nie je zlomok v základnom tvare.

Ž: *Naozaj! Upravím ho na základný tvar, vydelím čitateľa aj menovateľa 3. Dostávam $t = -\frac{7}{2}$. To je tá istá hodnota!* **Bod N leží na priamke p.**

Úloha 1: *Rozhodnite, či body $A[-2;3]$ a $B[2;-3]$ ležia na priamke p určenej bodom $P[1;-3]$ a smerovým vektorom $\vec{u} = (1;-2)$.*

Výsledok: A áno, B nie

Príklad 5: *Určte reálne číslo* m_1 *tak, aby bod* $M[m_1; 6]$ *ležal na priamke* p*:* $x = 1 + 3t,\ y = -1 + 7t;\ t \in \mathbb{R}$.

Ž: *Máme danú priamku parametrickým vyjadrením. Súradnice sú len dve, budeme pracovať v rovine.*

U: Trochu ťa vyskúšam. Aké súradnice má smerový vektor priamky?

Ž: *To som sa už naučil. Musím pozerať na čísla, ktoré stoja pri parametri* t*. Smerový vektor má súradnice* $(3; 7)$*.*

U: Výborne.
Máme určiť reálne číslo m_1 tak, aby bod $M[m_1; 6]$ ležal na priamke p.

Ž: *Viem, že každému bodu priamky je priradená nejaká hodnota parametra* t*. Ak bod* M *má ležať na priamke* p*, tak aj on musí mať priradené nejaké* t*. Ako ho len nájsť?*

U: Ak bod M leží na priamke p, ***jeho súradnice vyhovujú parametrickým rovniciam priamky*** p.

Ž: *Celkom nerozumiem, čo to znamená.*

U: V parametrických rovniciach vystupuje x a y, to sú súradnice ľubovoľného bodu priamky.

Ž: *Aha! To znamená, že namiesto* x *napíšem prvú súradnicu bodu* M *a namiesto* y *druhú súradnicu bodu* M*.*

U: Presne tak.

Ž: *Dosadzujem:*

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 + 3t \\ 6 &= -1 + 7t. \end{aligned}$$

U: Dostali sme tak sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi m_1 a t. Ako ju budeme riešiť?

Ž: *Všimol som si, že v druhej rovnici sa vyskytuje iba neznáma* t*, nuž ju odtiaľ vyjadrím. Pripočítam 1 a následne vydelím 7:*

$$t = 1.$$

U: Výborne. Ako vypočítame druhú neznámu?

Ž: *Dosadím* $t = 1$ *do prvej rovnice:*

$$m_1 = 1 + 3 \cdot 1.$$

Spočítam a dostávam:

$$m_1 = 4.$$

U: No a máme výsledok. Bod M má súradnice $M[4; 6]$.

Úloha 1: *Určte reálne číslo* m_2 *tak, aby bod* $M[3; m_2]$ *ležal na priamke* p*:* $x = 2 - 2t,\ y = 7 - t;\ t \in \mathbb{R}$.

Výsledok: $\frac{15}{2}$

Príklad 6: *Zistite, či dané sústavy rovníc sú vyjadrením tej istej priamky:*

$$x = -3 + 2t \qquad\qquad x = 1 - 6s$$
$$y = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad y = 3s, \quad s \in \mathbb{R}$$

U: Parametrické vyjadrenie priamky nie je jednoznačné. Priamka môže mať nekonečne veľa parametrických vyjadrení.

Ž: *Áno, spomínam si. Súvisí to s tým, že priamka má veľa smerových vektorov a aj veľa bodov.*

U: Presnejšie povedané, nekonečne veľa.
Máme pred sebou dve parametrické vyjadrenia, čo navrhuješ urobiť?

Ž: *Napadlo mi, či by sme nemohli porovnať smerové vektory, ak by boli rôzne, tak je jasné, že ide o rôzne priamky.*

U: Dobre, môžeme to skúsiť. Nazvime si prvú priamku modrou:

$$x = -3 + 2t$$
$$y = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A druhú priamku červenou:

$$x = 1 - 6s$$
$$y = 3s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ž: *Potom smerový vektor modrej priamky označím ako $\vec{u}$ a má súradnice $\vec{u} = (2; -1)$. Smerový vektor červenej priamky označím ako $\vec{v}$ a má súradnice $\vec{v} = (-6; 3)$. Priamky nemajú ten istý smerový vektor.*

U: Pozor, to sú unáhlené závery. Pred chvíľou si hovoril o tom, že priamka má "veľa" smerových vektorov.

Ž: *To je pravda.*

U: Všetky smerové vektory jednej priamky sú lineárne závislé.

Ž: *Aha, pozriem sa, či vektor $\vec{v}$ nie je náhodou násobkom vektora $\vec{u}$. Prvá súradnica vektora $\vec{v}$ je -3 násobkom prvej súradnice vektora $\vec{u}$.*

$$2 \cdot (-3) = -6$$

A platí to aj u druhej!

$$-1 \cdot (-3) = 3.$$

U: Platí:

$$\vec{v} = -3 \cdot \vec{u}.$$

Smerové vektory priamok sú lineárne závislé. Smerový vektor modrej priamky môže byť smerovým vektorom červenej priamky a naopak.

Ž: *Môže to byť tá istá priamka. A ja som sa tešil, že sme už úlohu vyriešili.*

U: Smerové vektory sme už prebrali, čo navrhuješ teraz?

Ž: *Z rovnice priamok viem ešte vyčítať súradnice bodov, ktoré na nich ležia. Napríklad na modrej priamke leží bod A so súradnicami $A[-3;2]$. Dosadím jeho súradnice do rovnice červenej priamky a zistím, či mu prislúcha nejaká hodnota parametra s.*

U: No, skúsime to.

Ž: *Nehovoríte to veľmi nadšene, asi to nebude dobré. Ale aj tak to vyskúšam. Dosadím súradnice:*

$$-3 = 1 - 6s$$
$$2 = 3s.$$

Od oboch strán prvej rovnice odpočítam 1 a následne vydelím (-6). Dostanem

$$s = \frac{2}{3}.$$

Z druhej rovnice, po predelení 3, dostávam

$$s = \frac{2}{3}.$$

Parametre z oboch rovníc sú rovnaké. Bod A patrí aj červenej priamke.

U: Výborne! Tým máme úlohu vyriešenú.

Ž: *Nezdá sa mi. Mali by sme vyskúšať ďalšie body modrej priamky, či patria červenej priamke. Ale tých bodov je nekonečne veľa?!*

U: Ale, ale… Veď to bol tvoj nápad. Je potrebné ho len domyslieť. Priamky majú rovnaké smerové vektory, majú ten istý smer.

Ž: *Musia byť rovnobežné.*

U: Áno. Navyše sme našli jeden bod A, ktorý patrí obom priamkam. Sú rovnobežné a majú jeden spoločný bod.

Ž: *Jasné! To nemôže byť inak, ibaže majú spoločné všetky body. Je to tá istá priamka.*

U: Správne. Dané sústavy rovníc sú analytickým vyjadrením tej istej priamky.

U: Na záver ti ukážem ešte iný postup riešenia tejto úlohy. Predpokladajme, že ide o tú istú priamku.

Ž: *Ale to sme predsa nemohli vedieť.*

U: Hovorím ***predpokladajme***. Ak je náš predpoklad nesprávny, počas riešenia sa to ukáže. Ak je to tá istá priamka, súradnice všetkých bodov modrej priamky musia vyhovovať rovniciam červenej priamky a naopak. Porovnajme ich :.

$$-3 + 2t = 1 - 6s$$
$$2 - t = 3s.$$

Ž: *Dostali sme opäť sústavu. S dvoma rovnicami a s dvoma neznámymi. Skúsim ju vyriešiť. Najprv si obidve rovnice upravím tak, že na ľavej strane budem mať neznáme t a s a na pravej číslo. Bude to vyzerať takto:*

$$\begin{aligned} 2t + 6s =& 4 \\ -t - 3s =& -2. \end{aligned}$$

Zjednodušíme ich ešte. Prvú rovnicu vydelíme 2 a druhú rovnicu vynásobíme (-1), obsahuje veľa mínusov.

$$\begin{aligned} t + 3s =& 2 \\ t + 3s =& 2 \end{aligned}$$

Och! Dostali sme dve rovnaké rovnice.

U: Neboj sa, je to v poriadku. Čo to znamená pre riešenie sústavy dvoch rovníc? Jednu rovnicu môžeme vynechať. Sú také isté, tak je zbytočná. Ostala nám jedna rovnica $t + 3s = 2$. Koľko má riešení?

Ž: *Nekonečne veľa.*

U: Áno, naše priamky majú nekonečne veľa spoločných bodov. Sú totožné.

Ž: *Bolo to asi kratšie riešenie ako to, čo som navrhol ja.*

U: Tvoje riešenie bolo však poučné. Bolo na ňom pekne vidno, čo porovnávame.

Ž: *Aj tak, ako by to dopadlo, ak by to neboli tie isté priamky?*

U: Sústava dvoch lineárnych rovníc môže mať nula, jedno alebo nekonečne veľa riešení. Nekonečne veľa riešení sme už prebrali. Ak by mala jedno riešenie, znamenalo by to, že priamky majú spoločný práve jeden bod.

Ž: *To by boli rôznobežné. Ale ja by som to hneď zistil, lebo by mali rôzne smerové vektory.*

U: Ak by nemali žiaden spoločný bod, boli by rovnobežné. To by mali rovnaké smerové vektory. V každom prípade, by dané rovnice predstavovali inú priamku.

Úloha 1: *Zistite, či dané sústavy rovníc sú vyjadrením tej istej priamky:*

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2t & \qquad x &= 5 + 3s \\ y &= 2 - 5t, \quad t \in \mathbb{R} & \qquad y &= 7 + 7{,}5s, \quad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Výsledok: áno

Príklad 7: *Dané sú body* $A[2; -3]$ *a* $B[-1; -2]$. *Napíšte*

(a) *parametrické vyjadrenie úsečky* AB,

(b) *parametrické vyjadrenie polpriamky* $\overrightarrow{AB}$,

(c) *parametrické vyjadrenie polpriamky* $\overrightarrow{BA}$.

Ž: *Úsečka, polpriamka - to sú časti priamok. Ich parametrické vyjadrenie bude podobné ako u priamky.*

U: Navrhujem preto začať s parametrickým vyjadrením ***priamky*** $\overleftrightarrow{AB}$. Nie je to síce v zadaní, ale myslím, že sa nám to bude hodiť.

Ž: *Dobre. Potrebujem jej smerový vektor, označím ho* $\vec{u}$ *a bude to vektor* $B - A$. *Určím jeho súradnice. Súradnice vektora* $\vec{u}$ *budú rozdielom príslušných súradníc bodov* B *a* A. *Čiže vektor* $\vec{u} = B - A$ *má súradnice:* $\vec{u} = (-3; 1)$.

U: Má priamka aj iný smerový vektor?

Ž: *Samozrejme. Môže ním byť každý nenulový násobok vektora* $\vec{u}$. *Napríklad to môže byť vektor* $\vec{v} = (-6; 2)$, *lebo je dvojnásobkom vektora* $\vec{u}$.

U: Výborne, vidím, že tomu rozumieš. Napíšme teraz parametrické vyjadrenie priamky $\overleftrightarrow{AB}$ v súradniciach.

Ž: *Preriešil som už niekoľko takýchto úloh, napíšem teda rovnice priamky rovno, bez vysvetľovania. Priamka* $\overleftrightarrow{AB}$ *má parametrické vyjadrenie:*

$$\begin{aligned} x &= 2 - 3t \\ y &= -3 + t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

U: Áno, je to správne. Na parametrické vyjadrenie si použil bod A a vektor $\vec{u} = B - A$.

U: Pokračujeme už našou úlohou. Ako sa bude odlišovať parametrické vyjadrenie úsečky AB?

Ž: *Rovnice budú tie isté. Len parameter bude z inej množiny. Konkrétne to bude uzavretý interval* $\langle 0; 1\rangle$. **Úsečka** AB *má parametrické vyjadrenie:*

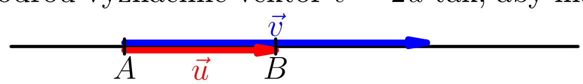
$$\begin{aligned} x &= 2 - 3t \\ y &= -3 + t, \qquad t \in \langle 0; 1\rangle. \end{aligned}$$

U: Dobre. Povedali sme, že smerovým vektorom priamky môže byť aj vektor $\vec{v} = 2\vec{u}$. Ako by vyzerala parametrická rovnica úsečky, ak by sme použili tento vektor $\vec{v}$?

Ž: *Myslím, že úplne rovnako, len použijem vektor* $\vec{v} = (-6; 2)$. *Tu sú rovnice:*

$$\begin{aligned} x &= 2 - 6t \\ y &= -3 + 2t, \qquad t \in \langle 0; 1\rangle. \end{aligned}$$

U: Tak to teda nie! Celkom si ešte neporozumel významu parametra t v rovnici priamky! Pre úsečku platí, že parameter patrí do intervalu $\langle 0; 1\rangle$ len vtedy, ak použitý smerový vektor má umiestnenie v krajných bodoch úsečky. Ak má iné umiestnenie, prípadne má inú veľkosť, musí sa tomu prispôsobiť aj množina hodnôt pre parameter. Názornejšie to bude na obrázku. Znázornime si priamku, na nej úsečku AB, červenou vyznačíme vektor $\vec{u} = B - A$. Potom modrou vyznačíme vektor $\vec{v} = 2\vec{u}$ tak, aby mal začiatok tiež v bode A.



U: Chceme získať body patriace úsečke AB ...

Ž: *... teda všetky body medzi bodmi A a B.*

U: Ak použijem rovnicu $X = A + t\vec{u}$, je jasné, že bodu A odpovedá parameter $t = 0$, bodu B parameter $t = 1$ a ostatným bodom úsečky AB parameter medzi nulou a jednotkou. Čiže $t \in \langle 0; 1\rangle$.

Ž: *To je celkom pochopiteľné.*

U: Pozrime sa teraz na vektor $\vec{v}$. Príslušná parametrická rovnica je $X = A + t\vec{v}$.

Ž: *Bodu A odpovedá opäť parameter $t = 0$.*

U: Áno, ale parameter $t = 1$ odpovedá koncovému bodu vektora $\vec{v}$.

Ž: *A ten už nepatrí úsečke AB. Už som pochopil, v čom je problém. Bodu B bude odpovedať $t = \frac{1}{2}$. Parameter zoberieme len od nuly po jednu polovicu: $t \in \langle 0; \frac{1}{2}\rangle$.*

U: Teraz to už je správne.

U: Pokračujeme s ***polpriamkou*** $\overrightarrow{AB}$.

Ž: *Rovnica bude taká istá, len musíme preskúmať do akej množiny bude patriť parameter.*

U: Skús si pomôcť obrázkom, ktorý už máme.

Ž: *Nedám sa zlákať rýchlym záverom, poriadne si to zdôvodním. Polpriamka $\overrightarrow{AB}$ začína v bode A a ide ďalej smerom k bodu B. Už vieme, že bodu A odpovedá $t = 0$.*

U: Predpokladám, že sa chystáš použiť vektor $\vec{u}$.

Ž: *Ó, áno, samozrejme. Bodu B odpovedá $t = 1$. Hodnota parametra $t = 2$ odpovedá bodu, ktorý je za bodom B. Aj pre $t = 3$ dostávam bod na polpriamke $\overrightarrow{AB}$. Zdá sa, že bodom na polpriamke budú odpovedať kladné parametre.*

U: Správne. Kladné hodnoty, ale aj s nulou, nezabúdaj na bod A.

Ž: **Polpriamka** $\overrightarrow{AB}$ *má parametrické vyjadrenie:*

$$\begin{aligned} x &= 2 - 3t \\ y &= -3 + t, \qquad t \in \langle 0; \infty). \end{aligned}$$

U: Ostala nám posledná úloha - polpriamka $\overrightarrow{BA}$.

Ž: *Nakreslím si radšej obrázok, aby som to mohol všetko lepšie preskúmať.*

U: Vidím, že si si znázornil vektor $\vec{u}$ červenou farbou a polpriamku $\overrightarrow{BA}$ modrou.

Ž: *Využijeme to, čo už vieme. Bodu B odpovedá $t = 1$. Bodom úsečky AB odpovedajú hodnoty $t \in \langle 0; 1\rangle$. Ostávajú body, ktoré sú v obrázku naľavo od bodu A.*

U: Spomeň si, že napravo od bodu A boli hodnoty t kladné. To bola polpriamka $\overrightarrow{AB}$.

Ž: *No áno. Naľavo budú záporné. Je to aj preto, že vektor $\vec{u}$ musí zmeniť orientáciu. Inak by sme sa nedostali naľavo od bodu A.*

U: Tak si to zhrňme. Máme záporné hodnoty parametra t a ešte $t \in \langle 0; 1\rangle$.

Ž: *Znamená to, že $t \in (-\infty; 1\rangle$.* **Polpriamka $\overrightarrow{BA}$** *má parametrické vyjadrenie:*

$$\begin{aligned} x &= 2 - 3t \\ y &= -3 + t, \qquad t \in (-\infty; 1\rangle. \end{aligned}$$

Úloha 1: *Dané sú body $A[-5; -6]$, $B[11; 2]$ a $C[3; 4]$. Napíšte*

(a) parametrické vyjadrenie polpriamky AC.

(b) parametrické vyjadrenie ťažnice na stranu a

Výsledok:

(a)

$$\begin{aligned} x &= -5 + 8t \\ y &= -6 + 10t, \qquad t \in \langle 0; \infty) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x &= -5 + 12t \\ y &= -6 + 9t, \qquad t \in \langle 0; 1\rangle \end{aligned}$$

Príklad 8: *Dané je parametrické vyjadrenie priamky p:* $x = -1 - 2t$, $y = 5 - 4t$, $z = -3 + 6t$; $t \in \mathbb{R}$. *Určte priesečník priamky* p *so súradnicovou rovinou* xy.

Ž: *Tri súradnice - máme danú priamku v priestore. Dokonca viem aj aký má smerový vektor. Je to vektor so súradnicami* $(-2; -4; 6)$.

U: Výborne. To ťa musím pochváliť. Poďme k riešeniu úlohy.

Ž: *Máme nájsť priesečník priamky so súradnicovou rovinou* xy.

U: Čo je zaujímavé na bodoch, ktoré ležia v rovine xy?

Ž: *V rovine* xy *ležia body, ktoré nemajú* z*-tovú súradnicu.*

U: To je nezmysel! Každý bod v priestore má tri súradnice!

Ž: *Chcel som povedať, že ich tretia súradnica je rovná nule.*

U: To je už niečo iné. Označme si priesečník priamky p a roviny xy napríklad ako P. Bod P bude mať potom súradnice $P[p_1; p_2; 0]$.

$$\boxed{p \cap xy = \{P\} \quad \Rightarrow \quad P[p_1; p_2; 0]}$$

U: Bod P patrí priamke p. Znamená to, že jeho súradnice musia vyhovovať parametrickej rovnici priamky p.

Ž: *Aha! Môžem dosadiť súradnice bodu* P *namiesto* x, y *a* z *v rovnici priamky.*

U: Správne. Tak to urobme.

Ž: *Dosadím súradnice bodu* $P[p_1; p_2; 0]$ *a dostávam tri rovnice:*

$$\begin{aligned} p_1 &= -1 - 2t \\ p_2 &= 5 - 4t \\ 0 &= -3 + 6t. \end{aligned}$$

U: Dostali sme sústavu troch rovníc s troma neznámymi.

Ž: *Neznáme sú* t *a súradnice* p_1 *a* p_2. *V tretej rovnici*

$$0 = -3 + 6t.$$

vystupuje len neznáma t, *tak si ju môžeme vyjadriť. Pripočítam* 3 *k obom stranám rovnice*

$$3 = 6t$$

a následne vydelím šiestimi:

$$t = \frac{1}{2}.$$

U: Výborne. Získať neznáme súradnice bodu P bude už jednoduché. Stačí dosadiť vypočítanú hodnotu $t = \frac{1}{2}$ do prvých dvoch rovníc.

Ž: *Zoberiem si prvú rovnicu:*

$$p_1 = -1 - 2t.$$

Dosadím $t = \frac{1}{2}$*:*

$$p_1 = -1 - 2 \cdot \frac{1}{2}.$$

Vypočítam:

$$p_1 = -1 - 1 = -2.$$

Podobne s druhou rovnicou:

$$p_2 = 5 - 4t = 5 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 5 - 2 = 3.$$

U: Priesečník priamky p a roviny xy, bod P, má súradnice $P[-2; 3; 0]$.

Úloha 1: *Dané je parametrické vyjadrenie priamky* p*:* $x = -1 - 2t$, $y = 5 - 4t$, $z = -3 + 6t$; $t \in \mathbb{R}$. *Určte priesečníky priamky* p *so súradnicovými rovinami* xz *a* yz*.*

Výsledok: $p \cap xz = \{A[-\frac{7}{2}; 0; \frac{9}{2}]\}$, $p \cap yz = \{B[0; 7; -6]\}$