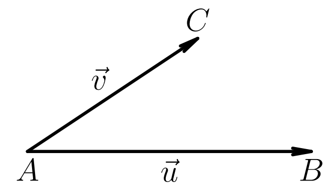
Odchýlka vektorov

RNDr. Viera Vodičková

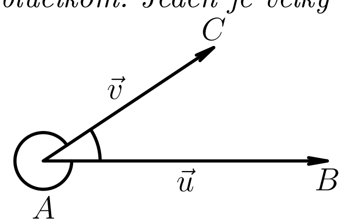
U: Ak chceme určiť ***odchýlku*** dvoch vektorov, najprv si ich umiestnime tak, aby mali spoločný začiatok. To znamená napr. vektor $\vec{u}$ bude mať umiestnenie $B - A$ a vektor $\vec{v}$ bude mať umiestnenie $C - A$.



Ž: *Nie je odchýlka to isté ako uhol?*

U: Nie celkom. Pozrime sa na obrázok. Koľko uhlov zvierajú vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$?

Ž: *Vidím tu dva. Vyznačím ich oblúčikom. Jeden je veľký a druhý malý.*



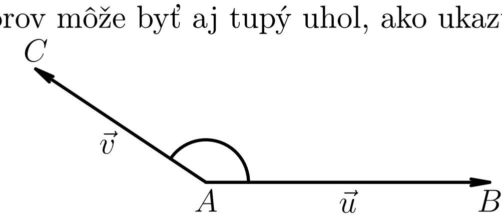
U: V matematike máme na to presné vyjadrenie, iste sa pamätáš, ten malý je konvexný a ten veľký nekonvexný uhol. Keď poviem uhol vektorov, nie je jasné ktorý z tých dvoch mám na mysli.

Ž: *Asi ten menší, teda konvexný.*

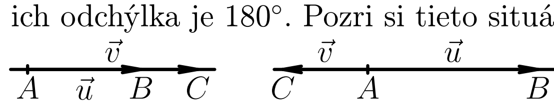
U: Presne tak. A preto nehovoríme o uhle, ale o odchýlke.
Ak majú dva nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ umiestnenie $B-A$ a $C-A$, potom odchýlkou vektorov $\vec{u}, \vec{v}$ nazývame veľkosť konvexného uhla BAC.

Ž: *Teraz mi je to celkom jasné. Ale prečo musíme hovoriť o konvexnom uhle, nestačil by ostrý uhol?*

U: To nie, odchýlkou vektorov môže byť aj tupý uhol, ako ukazuje obrázok:



U: V špeciálnom prípade, ak vektory vieme umiestniť na jednu priamku, majú odchýlku buď $0°$ alebo $180°$. Ak majú vektory rovnakú orientáciu, tak ich odchýlka je $0°$. Ak majú vektory opačnú orientáciu, tak ich odchýlka je $180°$. Pozri si tieto situácie na obrázku.



$|\sphericalangle \vec{u}, \vec{v}| = 0°$ $\qquad$ $|\sphericalangle \vec{u}, \vec{v}| = 180°$

U: V prípade, ak je aspoň jeden z vektorov nulový, odchýlku nedefinujeme.

Ž: *To je tiež celkom rozumné.*

U: Ešte sa dohodneme na označení. Odchýlku vektorov zapisujeme aj symbolicky, pozri sa na rámček, a čítame odchýlka vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

$$\boxed{|\sphericalangle \vec{u}, \vec{v}|}$$

U: Zápis je dlhý, preto je často výhodnejšie označiť odchýlku gréckym písmenom, podobne ako pri uhloch, napr. φ.

$$\boxed{\text{Odchýlka vektorov } \vec{u}, \vec{v}: \quad |\sphericalangle \vec{u}, \vec{v}| = \varphi}$$

U: V analytickej geometrii pracujeme hlavne so súradnicami, preto je vhodné vedieť, ako pomocou súradníc vektorov určiť ich odchýlku. Ak majú nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ súradnice $\vec{u} = (u_1; u_2), \vec{v} = (v_1; v_2)$, a odchýlku vektorov označíme ako $|\sphericalangle \vec{u}, \vec{v}| = \varphi$, potom pre $\cos\varphi$ platí vzťah v rámčeku.

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|\vec{u}||\vec{v}|}}$$

Ž: *V čitateli vynásobím príslušné súradnice a sčítam, teda u_1 krát v_1 plus u_2 krát v_2, ale čo to máme v menovateli zlomku?*

U: Sú to veľkosti vektorov. Na pripomenutie, veľkosť vektora vypočítame ako odmocninu zo súčtu druhých mocnín jeho súradníc.

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \ |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

U: V priestore je situácia analogická, len pribudnú tretie súradnice.

$$\boxed{\vec{u} = (u_1; u_2; u_3), \ \vec{v} = (v_1; v_2; v_3), \ \cos\varphi = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|\vec{u}||\vec{v}|}}$$

Príklad 1: *Vypočítajte odchýlku vektorov $\vec{u} = (-1; 2)$ a $\vec{v} = (1; 3)$.*

Ž: *Pre výpočet odchýlky dvoch vektorov máme vzorec.*

U: Vzorec je tu:

$$\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Ž: *Začnem menovateľom. Vypočítam si najprv veľkosti oboch vektorov. Najprv veľkosť vektora $\vec{u}$. Veľkosť vektora vypočítam ako odmocninu zo súčtu druhých mocnín jeho súradníc.*

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Dosadím súradnice a mám

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

A teraz veľkosť vektora $\vec{v}$, vzorec je obdobný:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

U: Výborne. Ak označíme odchýlku našich vektorov ako φ, môžeme dosadiť do vzorca.

Ž: *Dobre.*

$$\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Čo po dosadení súradníc dáva:

$$\cos\varphi = \frac{-1\cdot 1 + 2\cdot 3}{\sqrt{5}\sqrt{10}}.$$

A teda:

$$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{50}}.$$

A to už dáme do kalkulačky a vyčíslime hodnotu uhla.

U: Len sa neponáhľaj, daný zlomok môžeme upraviť, odmocninu v menovateli môžeme čiastočne odmocniť, veď $50 = 2\cdot 25$. Píšeme:

$$\cos\varphi = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Odstránime ešte odmocninu z menovateľa:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A to je hodnota, ktorú by sme mali vedieť aj spamäti, bez kalkulačky. $\varphi = 45°$.

Úloha 1: *Vypočítajte odchýlku vektorov* $\vec{a} = (-2; 1; -9)$ *a* $\vec{b} = (-\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{3})$.

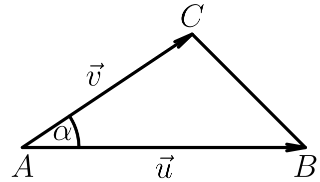
Výsledok: 90°

Príklad 2: *Vypočítajte veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A v trojuholníku ABC, ak $A[2;3]$, $B[3;1]$, $C[5;2]$.*

Ž: *Viem vypočítať veľkosť uhla vektorov, ale nie veľkosť uhla v trojuholníku.*

U: V trojuholníku si vieme vektory zaviesť a to tak, že ich odchýlka bude zároveň vnútorným uhlom trojuholníka. Uhol pri vrchole A si označíme ako α. Ako si zadefinujeme vektory, aby ich odchýlkou bol uhol α?

Ž: *Ja si pre istotu nakreslím obrázok.*



Budú to vektory $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$.

U: Správne. Odchýlkou týchto vektorov je uhol α, čiže vnútorný uhol pri vrchole A. Môžeme počítať.

Ž: *Počítať budeme podľa vzorca pre určenie odchýlky dvoch vektorov. Pre našu situáciu môžeme písať:*

$$\cos\alpha = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Začnem s veľkosťami oboch vektorov.

U: Pozor, najlepšie by bolo začať s určením súradníc oboch vektorov.

Ž: *Samozrejme, zabudol som, že ich ešte nemáme. Vypočítame teda súradnice vektorov.*

$$\vec{u} = B - A = (3-2;\ 1-3) = (1; -2),$$

$$\vec{v} = C - A = (5-2;\ 2-3) = (3; -1).$$

Ž: *Teraz vypočítam ich veľkosti. Stačí len dosadiť do vzorca pre veľkosť vektora. Máme ho v rámčeku.*

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

Čiže pre vektor $\vec{u}$ dostávame:

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

A pre vektor $\vec{v}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

U: To je všetko správne. Ostáva nám čitateľ vo vzorci, čiže vypočítať skalárny súčin oboch vektorov.

Ž: *Skalárny súčin sa počíta veľmi ľahko:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) = 3 + 2 = 5.$$

U: Dosadíme do vzorca.

Ž: *Zopakujem si vzorec:*

$$\cos\alpha = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

A teraz dosadzujem:

$$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{5}{5\sqrt{2}}.$$

Čiže:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

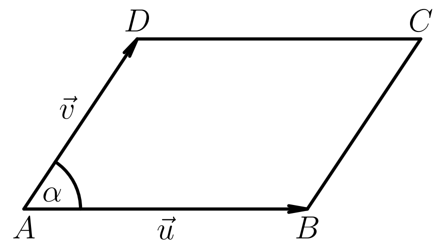
U: Výborne si zvládol aj odstránenie odmocniny z menovateľa zlomku. Uhol $\alpha = 45°$.

Úloha 1: *Vypočítajte veľkosť vnútorného uhla pri vrchole B v trojuholníku ABC, ak $A[16; 1; -2]$, $B[-9; 1; -2]$, $C[0; 1; 10]$.*

Výsledok: $\beta = 53°7'$

Príklad 3: *Daný je rovnobežník $ABCD$, pričom $A[3;-20;0]$, $B[3;-4;0]$, $C[3;1;5\sqrt{3}]$. Vypočítajte veľkosť uhla DAB.*

Ž: *Začnem s obrázkom.*



U: Výborne. V obrázku si už vyznačil uhol DAB a nazval si ho α. Zároveň tam vidím dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, ktoré si si zvolil tak, aby ich odchýlkou bol uhol α.

Ž: *Áno vektory som si zvolil takto: $\vec{u} = B - A$, $\vec{v} = D - A$. To znamená, že potrebujem súradnice bodu D. Ako ich ale vypočítam?*

U: Súradnice štvrtého vrchola rovnobežníka najrýchlejšie vypočítame pomocou stredu úsečky AC, ktorý je totožný so stredom úsečky DB. Je však nutné uskutočniť všetky tieto výpočty? Vráťme sa ešte k obrázku, nemôžeme vektor $\vec{v}$ umiestniť aj do inej orientovanej úsečky?

Ž: *Zabudol som, že vektory môžem posúvať. Vektor $\vec{v}$ je predsa aj na druhej strane. Čiže: $\vec{v} = C - B$.*

U: Tak poďme počítať.

Ž: *Vypočítam súradnice vektorov:*

$$\vec{u} = B - A = (0;16;0),$$

$$\vec{v} = C - B = (0;5;5\sqrt{3}).$$

U: Odchýlku dvoch vektorov vypočítame podľa vzorca:

$$\cos\alpha = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Ž: *V menovateli sú veľkosti oboch vektorov. Tie si vypočítam najprv:*

$$|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 16^2 + 0^2} = \sqrt{16^2} = 16$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 5^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 25\cdot 3} = \sqrt{100} = 10.$$

U: Výborne. Teraz už môžeme dosadiť do vzorca.

Ž: *Dosadzujem:*

$$\cos\alpha = \frac{0\cdot 0 + 16\cdot 5 + 0\cdot 5\sqrt{3}}{16\cdot 10} = \frac{16\cdot 5}{16\cdot 10} = \frac{1}{2}.$$

U: Takže

$$\alpha = 60^\circ.$$

Úloha 1: *Dokážte, že body $A[3;0]$, $B[6;4]$, $C[4;5]$ a $D[1;1]$ tvoria rovnobežník. Vypočítajte veľkosti jeho vnútorných uhlov a uhla ω, ktorý zvierajú uhlopriečky.*

Výsledok: $\alpha = \gamma = 100^\circ 18'$, $\beta = \delta = 79^\circ 42'$, $\omega = 47^\circ 44'$

Príklad 4: *Určte odchýlky priamky AB od osí súradnicovej sústavy, ak $A[-5;-3;8]$, $B[7;6;-12]$.*

Ž: *Celkom tomu nerozumiem, čo je to odchýlka od osí súradnicovej sústavy?*

U: Tak najprv, koľko máme tých osí?

Ž: *Podľa súradníc, keďže sú tri, súdim, že sme v priestore, takže máme tri osi.*

U: Správne. Každá os je priamka, takže našou úlohou bude vypočítať odchýlku priamky AB od priamok, ktoré predstavujú osi sústavy súradníc. Odchýlku priamok sme ešte nepočítali, ale stačí si uvedomiť, že odchýlka priamok je totožná s odchýlkou ľubovoľných vektorov, ktoré vieme na tieto priamky umiestniť. Iste vieš umiestniť nejaký vektor na priamku AB.

Ž: *Asi to bude vektor $B - A$.*

U: Označme si ho napr. $\vec{a}$. Vypočítajme jeho súradnice.

Ž: *Súradnice vektora sú:*

$$\vec{a} = B - A = (12; 9; -20).$$

Aké vektory umiestnime na súradnicové osi?

U: Zoberme si napr. os x. Na umiestnenie vektora potrebujeme dva rôzne body, ktoré ležia na osi x. Budú predstavovať začiatok a koniec vektora. Vedel by si také dva body určiť?

Ž: *Na osi x ležia body, ktoré majú len $x-$ovú súradnicu, teda ostatné súradnice majú nulové. Vyberiem si napr. bod M so súradnicami $M[1;0;0]$ a bod N so súradnicami $N[3;0;0]$.*

U: Tvoj výber je v poriadku, predsa len podotknem, že väčšinou sa snažíme vybrať, čo najjednoduchšie a teda by sa nám ponúkal začiatok súradnicovej sústavy bod $O[0;0;0]$ a potom možno tvoj bod $M[1;0;0]$. Podľa mojej voľby, dostávame vektor $M - O$ so súradnicami $(1;0;0)$, ktorý sa nazýva aj jednotkovým vektorom na osi x a zvykne sa označovať ako vektor $\vec{i}$.

$$\vec{i} = M - O = (1; 0; 0).$$

Ž: *A ak by som chcel ostať pri svojich bodoch, dostal by som vektor $N - M = (2;0;0)$.*

U: Aj ten by bol správny, no ak ich porovnáš, vidíš, že je dvojnásobkom môjho vektora $\vec{i}$, a načo počítať s dvojkou, keď s jednotkou je to ľahšie?

Ž: *Uznávam. Použijeme vektor $\vec{i} = (1;0;0)$.*

U: Teraz už ľahko určíme jednotkové vektory na osiach y a z. Označíme ich ako $\vec{j}$ a $\vec{k}$.

Ž: *Budú mať súradnice: vektor $\vec{j} = (0;1;0)$ a vektor $\vec{k} = (0;0;1)$.*

U: Môžeme počítať odchýlky.

Ž: *Vypočítam si najprv veľkosti všetkých vektorov. Veľkosť vektora $\vec{a}$:*

$$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + 9^2 + 20^2} = \sqrt{144 + 81 + 400} = \sqrt{625} = 25.$$

Teraz vektor $\vec{i}$:

$$|\vec{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$$

U: Výhodou zvolenia si jednotkových vektorov je aj to, že všetky majú veľkosť 1, ako si sa práve presvedčil v prípade vektora $\vec{i}$. Takže platí:

$$|\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Ž: *Označme odchýlku priamky AB od osi x ako α, potom podľa vzorca na určenie odchýlky dvoch vektorov platí:*

$$\cos\alpha = \frac{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3}{|\vec{a}||\vec{i}|}.$$

Dosadím súradnice a veľkosti vektorov:

$$\cos\alpha = \frac{12\cdot 1 + 9\cdot 0 - 20\cdot 0}{25\cdot 1}$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{25}.$$

Túto hodnotu dáme do kalkulačky a dostávame: $\alpha = 61^\circ 18'$

U: Výborne, podobne určíme aj ostatné dve odchýlky.

Ž: *Označíme si odchýlku priamky AB od osi y ako β, potom platí:*

$$\cos\beta = \frac{12\cdot 0 + 9\cdot 1 - 20\cdot 0}{25\cdot 1}$$

$$\cos\beta = \frac{9}{25}.$$

Z kalkulačky dostávame: $\beta = 68^\circ 53'$.
Odchýlka priamky AB od osi z bude γ, potom :

$$\cos\gamma = \frac{12\cdot 0 + 9\cdot 0 - 20\cdot 1}{25\cdot 1}$$

$$\cos\gamma = -\frac{20}{25} = -\frac{4}{5}.$$

Z kalkulačky dostávame: $\gamma = 143^\circ 7'$.

Príklad 5: *Daný je trojuholník ABC, pričom $A[1;2;-3]$, $B[-3;3;-2]$, $C[-1;1;-1]$. Určte, či je trojuholník ostrouhlý, tupouhlý alebo pravouhlý.*

Ž: *Ak sa nemýlim, o tom aký je to trojuholník, rozhodujú veľkosti vnútorných uhlov. Ostrouhlý má všetky tri uhly ostré, tupouhlý má jeden tupý a dva ostré a pravouhlý má jeden uhol pravý, čiže 90 stupňový.*

U: Nemýliš sa, je to správne.

Ž: *To znamená, že musím vypočítať veľkosti všetkých vnútorných uhlov. Začnem s uhlom α.*

U: Neponáhľaj sa tak, porozprávajme sa ešte o tom. Naozaj potrebuješ vedieť veľkosti ***všetkých*** vnútorných uhlov?

Ž: *No, ak by bol napríklad pravouhlý a prvý uhol by mi vyšiel pravý, ďalej by som, samozrejme, nepočítal.*

U: No vidíš! Aby sme zistili, o aký trojuholník ide, nemusíme poznať veľkosti všetkých jeho vnútorných uhlov, stačí zistiť najväčší z nich, ten môže byť ostrý, tupý alebo pravý.

Ž: *To je pekné, ale ako mám vedieť, ktorý bude najväčší? Ja predsa len spočítam všetky.*

U: Niekedy je cennejšie najprv porozmýšľať ako otrocky počítať. Zabudol si, že najväčší vnútorný uhol trojuholníka leží oproti najdlhšej strane?

Ž: *Takže zistím, ktorá strana je najdlhšia a potom spočítam veľkosť uhla oproti nej.*

U: Presne tak to urobíme, pustime sa do práce.

Ž: *Vypočítam si veľkosti všetkých strán trojuholníka, použijem pritom vzorec na určenie veľkosti úsečky.*

$$|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}.$$

Takže

$$|AB| = \sqrt{(-3-1)^2+(3-2)^2+(-2-(-3))^2} = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18}.$$

Podobne ďalšie úsečky.

$$|BC| = \sqrt{(-1+(-3))^2+(1-3)^2+(-1-(-2))^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3,$$

$$|AC| = \sqrt{(-1-1)^2+(1-2)^2+(-1-(-3))^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3.$$

Najdlhšia je strana AB.

U: Áno, ale naviac sme zistili aj niečo iné.

Ž: *Všimol som si, že strany BC a AC sú rovnako dlhé.*

U: Majú rovnakú veľkosť, trojuholník je rovnoramenný.

Ž: *Tak to iste bude ostrouhlý.*

U: Ale nie, rovnoramenný trojuholník môže byť ostrouhlý, tupouhlý ale aj pravouhlý. Poďme pekne vypočítať veľkosť uhla oproti najdlhšej strane AB.

Ž: *Bude to uhol* γ. *Zvierajú ho vektory* $\vec{u} = A - C$ *a* $\vec{v} = B - C$. *Určím si ich súradnice.*

$$\vec{u} = A - C = (1-(-1);\ 2-1;\ -3-(-1)) = (2; 1; -2),$$

$$\vec{v} = B - C = (-3-(-1);\ 3-1;\ -2-(-1)) = (-2; 2; -1).$$

U: Veľkosti vektorov nemusíme počítať, sú to veľkosti príslušných strán trojuholníka, ktoré sme už vypočítali.

Ž: *Platí:*

$$|\vec{u}| = |AC| = 3,$$

$$|\vec{v}| = |BC| = 3.$$

U: Dosadíme do vzorca pre výpočet odchýlky dvoch vektorov.

Ž: *Tu máme vzorec:*

$$\cos\gamma = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\vec{u}||\vec{v}|},$$

po dosadení máme:

$$\cos\gamma = \frac{2\cdot(-2) + 1\cdot 2 + (-2)\cdot(-1)}{3\cdot 3} = \frac{-4+2+2}{9} = \frac{0}{9} = 0.$$

Dobre som počítal, keď vyšla nula?

U: Ale áno. Dostali sme, že $\cos\gamma = 0$, to znamená, že $\gamma = 90^\circ$.

Ž: *Trojuholník je pravouhlý a navyše aj rovnoramenný.*

U: Skutočnosť, že trojuholník je pravouhlý, sme mohli zistiť už aj skôr. Po vypočítaní dĺžok strán si stačilo všimnúť, že pre trojuholník platí Pytagorova veta:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2.$$

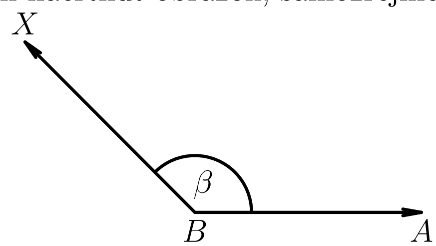
Úloha 1: *Daný je trojuholník* ABC, *pričom* $A[1; 0; 2]$, $B[2; -2; 4]$, $C[3; 6; 1]$. *Určte, či je trojuholník ostrouhlý, tupouhlý alebo pravouhlý.*

Výsledok: trojuholník je tupouhlý

Príklad 6: *Sú dané body $A[2;5;10]$, $B[2;1;7]$. Na osi x určte bod X tak, aby platilo: $|\sphericalangle ABX| = 135°$.*

Ž: *Ak má bod X ležať na osi x bude mať druhú a tretiu súradnicu nulovú.*

U: Správne, môžeme to zapísať: $X[x;0;0]$.
Pre ďalšie úvahy navrhujem načrtnúť obrázok, samozrejme, bez súradnicových osí.



U: Uhol ABX sme si označili ako β. Vidíme, že uhol β zvierajú dva vektory, ktoré sú to?

Ž: *Sú to vektory $A - B$ a $X - B$.*

U: Pomenujme si ich a určme ich súradnice.

Ž: *Tak napr.*

$$\vec{a} = A - B = (0;4;3),$$

$$\vec{b} = X - B = (x-2;-1;-7).$$

U: Dobre, našou neznámou bude x. Pri riešení využijeme to, že poznáme odchýlku týchto dvoch vektorov. Ako vyzerá v našom prípade vzorec na určenie odchýlky?

Ž: *Ak si označíme $|\sphericalangle ABX|$ ako β, bude to takto:*

$$\cos\beta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

U: Ak je veľkosť uhla $|\sphericalangle ABX| = \beta = 135°$, čo vieme povedať o hodnote $\cos\beta$?

Ž:

$$\cos\beta = \cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

U: Vidím, že do vzorca budeš ešte potrebovať veľkosti oboch vektorov.

Ž: *Tak si ich vyjadrím:*

$$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(x-2)^2 + (-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 1 + 49} = \sqrt{(x-2)^2 + 50}.$$

U: Máme už všetko pripravené, môžeme dosadiť do vzorca:

$$\cos\beta = \frac{0\cdot(x-2)+4\cdot(-1)+3\cdot(-7)}{5\sqrt{(x-2)^2+50}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dostali sme rovnicu s jednou neznámou x. Po jednoduchej úprave vyzerá takto:

$$\frac{5}{\sqrt{(x-2)^2+50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ž: *Pustím sa do riešenia. Najprv celú rovnicu umocním na druhú.*

$$\frac{2}{4} = \frac{25}{(x-2)^2+50}.$$

Odstránim zlomky

$$(x-2)^2+50 = 50,$$

vidím, že 50 *môžeme škrtnúť . . .*

U: Číslo 50 odčítame z oboch strán rovnice.

Ž: *Dostali sme rovnicu* $(x-2)^2=0$*, ktorá má jedinné riešnie* **x=2**.

U: Po dlhej práci sme našli práve jeden bod X, ktorý vyhovuje zadaniu a má súradnice $X[2;0;0]$.