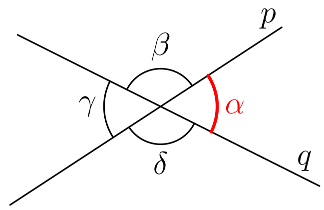
Odchýlka dvoch priamok

RNDr. Viera Vodičková

U: Najprv by sme si mali ujasniť, čo je to odchýlka dvoch priamok. Potom budeme riešiť úlohu, ako určiť túto odchýlku z analytického vyjadrenia priamok.

Ž: *Odchýlka priamok? To je predsa ich uhol!*

U: Nie je to celkom to isté. Načrtnime si dve priamky p a q. Koľko uhlov zvierajú? Koľko uhlov vidíš na obrázku?



Ž: *Aha! Sú tam štyri uhly.*

U: Áno. Označíme si ich α, β, γ a δ. Ktorý z nich bude odchýlkou priamok p a q ?

Ž: *Tak najprv, platí, že $\alpha = \gamma$ a zároveň $\beta = \delta$. Sú to tuším vrcholové uhly. Odchýlkou bude ten menší, čiže α.*

U: Výborne. Odchýlkou dvoch priamok nazývame veľkosť nulového, ostrého alebo pravého uhla, ktorého ramená ležia na daných priamkach.

Ž: *Hm... Ostrý uhol je tam preto, aby to bol ten menší, však?*

U: Správne. Ak sú priamky kolmé, ich odchýlkou je veľkosť pravého uhla, teda $90°$. Ak sú dve priamky rovnobežné, ich odchýlka je $0°$.
Tak, a teraz sa môžeme venovať analytickému vyjadreniu priamok. Akým spôsobom môžeme vyjadriť priamku?

Ž: *Záleží na tom, či to bude priamka v priestore alebo v rovine.*

U: Správna odpoveď. Začnime najprv rovinou. Akou rovnicou vieme vyjadriť priamku v rovine?

Ž: *Priamku v rovine môžeme vyjadriť parametricky, všeobecnou rovnicou a smernicovým tvarom.*

U: Smernicový tvar je len ináč upravená všeobecná rovnica priamky. Sústredíme sa preto na dva prípady, ak sú priamky dané parametricky a ak sú priamky dané všeobecnou rovnicou.

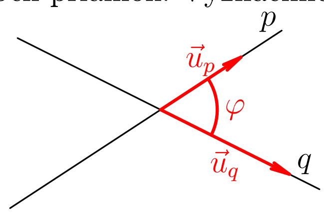
U: Začneme s prípadom, ak sú ***priamky dané parametricky***. Zopakujme si, že parametrické vyjadrenie priamky v súradniciach je:

$$x = a_1 + tu_1$$
$$y = a_2 + tu_2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Čo všetko vieme určiť z týchto parametrických rovníc priamky?

Ž: *Z parametrického vyjadrenia vieme určiť súradnice aspoň jedného bodu priamky, napr. bodu $A[a_1; a_2]$. Okrem toho aj súradnice smerového vektora priamky, $\vec{u} = (u_1; u_2)$.*

U: Potrebujeme dve priamky, zoberme si napr. priamky p a q. Označme ich smerové vektory $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$. Všetko si zakreslíme do obrázka. Smerový vektor, ako iste vieš, môžeme ľubovoľne umiestniť na priamku. Umiestnime si preto smerové vektory jednotlivých priamok tak, aby mali začiatok v priesečníku oboch priamok. Vyznačíme si odchýlku priamok, uhol φ.



Ž: *Už viem ako to bude! Ak ste smerové vektory takto pekne nakreslili, hneď vidno, že φ je aj odchýlkou vektorov $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$.*

U: Výborne. Odchýlku priamok určíme pomocou odchýlky ich smerových vektorov. Vieš, ako sa vypočíta odchýlka vektorov?

Ž: *Je na to nejaký vzorec. A asi tam vystupuje kosínus uhla...*

U: Odchýlku φ dvoch vektorov vypočítame podľa vzorca:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Ž: *Jasné! Hore máme skalárny súčin vektorov a dole súčin ich veľkostí.*

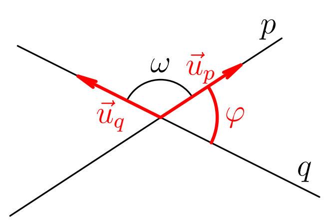
U: Odchýlku priamok p a q určíme ako odchýlku ich smerových vektorov, preto platí:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}_p\cdot\vec{u}_q}{|\vec{u}_p||\vec{u}_q|}.$$

Má to však jeden háčik.

Ž: *To som si mohol myslieť, že to nebude také jednoduché.*

U: Pozri sa na tento obrázok.



Opäť máme na ňom dve priamky p a q a ich smerové vektory. Akú odchýlku majú priamky a akú smerové vektory?

Ž: *Už rozumiem o čo vám ide. Odchýlka priamok je stále φ. Odchýlkou vektorov je však veľkosť uhla ω.*

U: Presne tak. Odchýlkou dvoch vektorov môže byť aj tupý uhol. Odchýlkou priamok nie.

Ž: *Vyriešime to jednoducho. Uhly φ a ω sú susedné uhly. Keď ich sčítam, dostanem 180°. Takže, vypočítam odchýlku vektorov, uhol ω. Potom odčítam túto hodnotu od 180° a mám uhol φ. Platí*

$$\varphi = 180^\circ - \omega.$$

U: Už to len trocha zjednodušíme. Odchýlku počítame pomocou kosínusu uhla. Vyjadrime si preto, čo platí pre kosínus týchto uhlov:

$$\cos\varphi = \cos(180^\circ - \omega) = -\cos\omega.$$

Ž: *Kosínus uhlov φ a ω sa líši len znamienkom.*

U: Áno. Uhol ω je odchýlkou vektorov, preto platí

$$\omega \in \langle 0^\circ; 180^\circ\rangle.$$

Pre uhol φ platí

$$\varphi \in \langle 0^\circ; 90^\circ\rangle,$$

nakoľko ide o odchýlku priamok. Kosínus uhlov z intervalu $\langle 0^\circ; 90^\circ\rangle$ je nezáporné číslo, preto stačí vo vzorci pridať absolútnu hodnotu. Pre odchýlku priamok p a q platí:

$$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q}{|\vec{u}_p||\vec{u}_q|}\right|.$$

Ž: *Rozumiem. Ak by bol uhol smerových vektorov náhodou tupý, bol by to uhol z druhého kvadrantu. Tam je hodnota kosínusu záporná, a preto z nej urobíme kladnú pomocou absolútnej hodnoty.*

U: Všimni si, že výraz v menovateli je stále kladný.

Ž: *Áno. Sú tam veľkosti vektorov, a to sú kladné čísla.*

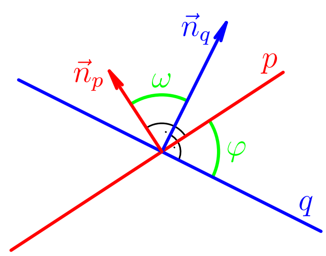
U: Absolútna hodnota nemá pre menovateľ význam. Preto stačí absolútnu hodnotu pridať len do čitateľa. Vzorec pre výpočet odchýlky priamok p a q je:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{|\vec{u}_p||\vec{u}_q|}.$$

U: Pozrieme sa, ako to bude vyzerať s odchýlkou dvoch priamok daných ***všeobecnou rovnicou***.

Ž: *Zo všeobecnej rovnice vieme určiť normálové vektory priamok. Normálový vektor je vektor kolmý na priamku.*

U: Veľmi správne.
Majme dané priamky p a q. Ich normálové vektory označme ako $\vec{n}_p$ a $\vec{n}_q$. Nakreslime si opäť obrázok. Do priesečníka priamok si umiestnime začiatočné body normálových vektorov $\vec{n}_p$ a $\vec{n}_q$. Priamka p a jej normálový vektor je vyznačená červenou farbou, priamka q a jej normálový vektor modrou farbou. Odchýlku priamok p a q označíme ako φ, odchýlku normálových vektorov ako ω.



Ž: *Vyzerá to, akoby ω a φ bolo to isté. Teda, chcel som povedať, že budú mať rovnakú veľkosť. Keby sa to červené otočilo až na modrú priamku...*

U: Máš pravdu. Dokážeme si to. Všimni si na obrázku uhol vymedzený priamkou p a normálovým vektorom $\vec{n}_q$.

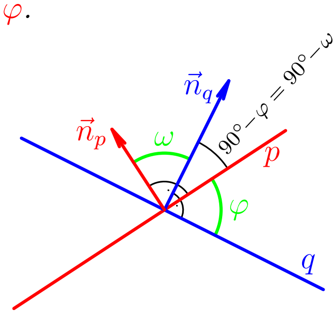
Ž: *Myslíte ten uhol medzi φ a ω?*

U: Presne ten. Pozrieme sa naň z dvoch pohľadov. Najprv si všimni červenú priamku p. Jej normálový vektor je na ňu kolmý, preto pre veľkosť nášho uhla platí, že sa rovná $90° - \omega$.

Ž: *Hm... Od červeného k červenému je $90°$, jedna časť je zelený uhol ω, preto zvyšok musí byť $90° - \omega$. Súhlasím.*

U: Teraz to zopakujeme z pohľadu modrej priamky.

Ž: *Aha! Medzi $\vec{n}_q$ a priamkou q je tiež $90°$. Jedna časť je uhol φ. Preto veľkosť nášho uhla môžeme vyjadriť aj ako $90° - \varphi$.*



U: Výborne. Veľkosť jedného uhla máme vyjadrenú dvoma spôsobmi. Preto platí rovnosť:

$$90° - \omega = 90° - \varphi.$$

Z toho už vyplýva, že

$$\varphi = \omega.$$

Ž: *Odchýlka priamok je taká istá ako odchýlka ich normálových vektorov.*

U: Áno. Preto môžeme pre odchýlku priamok p a q napísať vzťah v rámčeku.

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{n}_p||\vec{n}_q|}}$$

U: Ostávajú nám priamky v priestore.

Ž: *Priamku v priestore vieme vyjadriť len parametricky. Nebude to také isté ako v rovine? Však na odchýlke smerových vektorov sa nič nemení, či už sú v priestore alebo v rovine.*

U: Máš pravdu. Pre odchýlku priamok v priestore tiež platí vzorec v rámčeku.

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{|\vec{u}_p||\vec{u}_q|}}$$

Pričom $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$ sú smerové vektory priamok p a q. Spomenieme však prípad mimobežných priamok. Ako je definovaná odchýlka mimobežných priamok?

Ž: *Myslím, že sa jedna priamka rovnobežne posunie k druhej, aby s ňou bola v jednej rovine a potom sa počíta normálne, ako v rovine.*

U: Toto tvoje vyjadrenie spresním definíciou. Odchýlkou mimobežných priamok p a q nazývame odchýlku priamok p a q', pričom priamka q' je rovnobežná s priamkou q a navyše priamky p a q' ležia v jednej rovine.

Ž: *Povedali ste to učenejšie ako ja.*

U: Uvedomme si, že ak budeme určovať odchýlku priamok pomocou ich smerových vektorov, problém s rovnobežným posúvaním priamky q odpadá. Odchýlka vektorov je definovaná aj pre prípad, keď nemajú spoločný začiatok, aj keď neležia v jednej rovine.

Ž: *Vektory môžeme posúvať. Teda vhodne umiestniť.*

U: Áno. Preto vzťah na výpočet odchýlky priamok platí aj pre mimobežné priamky.
Zhrnutie si pozri v rámčeku.

Odchýlka dvoch priamok daných parametricky

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{|\vec{u}_p||\vec{u}_q|},$$

kde $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$ sú smerové vektory priamok p a q

Odchýlka dvoch priamok v rovine daných všeobecnou rovnicou

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{n}_p||\vec{n}_q|},$$

kde $\vec{n}_p$ a $\vec{n}_q$ sú normálové vektory priamok p a q

Príklad 1: *Určte odchýlku priamok p a q, ktorých parametrické vyjadrenie je nasledovné:*
p: $x = 3 + t$, $y = -2 + t$, $z = -2t$; $t \in \mathbb{R}$
q: $x = 4 - s$, $y = 5$, $z = -3 + s$; $s \in \mathbb{R}$.

Ž: *Odchýlku dvoch priamok zistím pomocou ich smerových vektorov. Akú odchýlku budú mať smerové vektory, taká bude aj odchýlka priamok.*

U: Súhlasím. Až na to, že odchýlkou dvoch vektorov môže byť aj tupý uhol, odchýlkou dvoch priamok nie. Preto v nasledujúcom vzorci vystupuje absolútna hodnota a tento vzorec je zapísaný v rámčeku.

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{|\vec{u}_p||\vec{u}_q|}}$$

Ž: *Odchýlku priamok p a q označíme ako φ a podľa tohto vzorca ju ľahko vypočítame.*

U: Dobre. Potrebujeme najprv súradnice smerových vektorov oboch priamok.

Ž: *Súradnice smerových vektorov prečítam z parametrických rovníc. Sú to čísla pri parametri t, resp. s. Smerové vektory priamok p a q majú tieto súradnice:*

$$\vec{u}_p = (1; 1; -2), \quad \vec{u}_q = (-1; 0; 1).$$

U: Vysvetlíme si podrobnejšie uvedený vzorec na výpočet odchýlky.

Ž: *V čitateli máme skalárny súčin. V menovateli zase súčin veľkostí oboch vektorov.*

U: Pomenoval si to správne. Dúfam, že to vieš aj tak pekne vypočítať.

Ž: *Skúsim. Skalárny súčin vektorov vypočítam tak, že vynásobím ich prvé súradnice, k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc a k tomu ešte súčin ich tretích súradníc, teda*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

U: Dobre. To je všeobecný vzorec pre skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Použime ho pre náš prípad.

Ž: *Zopakujem si súradnice smerových vektorov*

$$\vec{u}_p = (1; 1; -2)$$

$$\vec{u}_q = (-1; 0; 1).$$

A počítam skalárny súčin:

$$\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 = -1 - 2 = -3.$$

U: Výborne. Skalárny súčin máme, poďme na veľkosti oboch vektorov.

Ž: *Použijem vzorec, ktorý platí pre výpočet veľkosti vektora:*

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Pre veľkosti smerových vektorov priamok p a q môžeme písať:

$$|\vec{u}_p| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6},$$

$$|\vec{u}_q| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

U: Súhlasím. Dáme to všetko dohromady a dosadíme vypočítané hodnoty do vzorca pre odchýlku.

Ž: *Počítam:*

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{|\vec{u}_p||\vec{u}_q|} = \frac{|-3|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}}.$$

U: Navrhujem výsledok upraviť, odmocninu čiastočne odmocniť a následne ju odstrániť z menovateľa.

Ž: $\sqrt{12}$ *sa dá napísať ako* $\sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$. *Potom zlomok rozšírim* $\sqrt{3}$*:*

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

U: Zvládol si to vynikajúco. Ak sa $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, potom platí $\varphi = 30°$. Odchýlka priamok p a q je $30°$.
Na záver ti ponúkam pohľad na celý výpočet, máš ho v rámčeku.

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{|\vec{u}_p||\vec{u}_q|}\\
\cos\varphi &= \frac{|1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}}\\
\cos\varphi &= \frac{|-3|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{12}\\
\cos\varphi &= \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\varphi &= 30°
\end{aligned}}$$

Úloha 1: *Určte odchýlku priamok p a q, ktorých parametrické vyjadrenie je takéto:*
p: $x = 3 - t$, $y = -5 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$
q: $x = -2 + s$, $y = 1 + 3s$; $s \in \mathbb{R}$.

Výsledok: 45°

Úloha 2: *Určte odchýlku priamok p a q, ktoré sú dané všeobecnými rovnicami:*
p: $x - 3 = 0$
q: $\sqrt{3}x - y + 5 = 0$.

Výsledok: 30°

Príklad 2: *Dané sú priamky p: $x = 1 + t$, $y = -7 - t$; $t \in \mathbb{R}$, $q : 4x - 3y + 18 = 0$. Určte ich odchýlku.*

Ž: *Sú to priamky v rovine. Odchýlku priamok zistím pomocou ich smerových vektorov.*

U: Pozor! Všimni si rovnice oboch priamok.

Ž: *Priamka p je daná parametricky . . . a priamka q všeobecnou rovnicou. Zo všeobecnej rovnice priamo získam len súradnice normálového vektora, nie smerového.*

U: To máš pravdu. Na výpočet odchýlky dvoch priamok potrebujeme buď obidva smerové alebo obidva normálové vektory priamok.

Ž: *Pamätám sa, že z normálového vektora priamky sa nejako dal vyrobiť smerový vektor. . .*

U: Áno. Smerový vektor sa dá umiestniť na priamku a normálový vektor je na ňu kolmý.

Ž: *To znamená, že smerový a normálový vektor priamky sú navzájom kolmé.*

U: Ich skalárny súčin je rovný nule. Preto stačí súradnice normálového vektora vymeniť, v jednej zmeniť znamienko a máme smerový vektor danej priamky.

Ž: *Spomínam si.*

U: Určme si z rovníc priamok súradnice príslušných vektorov.

Ž: *Z parametrických rovníc priamky p určím súradnice smerového vektora priamky p:*

$$\vec{u}_p = (1; -1).$$

Zo všeobecnej rovnice priamky q určím súradnice jej normálového vektora:

$$\vec{n}_q = (4; -3).$$

U: Vyrobíme si smerový vektor priamky q.

Ž: *Povedali ste, že stačí vymeniť súradnice a v jednej zmeniť znamienko. Takže smerový vektor priamky q má súradnice:*

$$\vec{u}_q = (3; 4).$$

U: Výborne. Odchýlku priamok p a q vypočítame podľa vzorca:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{|\vec{u}_p||\vec{u}_q|}.$$

Vysvetlime si ho podrobnejšie.

Ž: *V čitateli máme absolútnu hodnotu skalárneho súčinu. V menovateli zase súčin veľkostí oboch vektorov.*

U: Pomenoval si to správne. Dúfam, že to vieš aj tak pekne vypočítať.

Ž: *Skúsim. Skalárny súčin vektorov vypočítam tak, že vynásobím ich prvé súradnice a k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc, teda*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

U: Dobre. To je všeobecný vzorec pre skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Použime ho pre náš prípad.

Ž: *Zopakujem si súradnice smerových vektorov*

$$\vec{u}_p = (1; -1)$$

$$\vec{u}_q = (3; 4).$$

A počítam skalárny súčin:

$$\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = 3 - 4 = -1.$$

U: Výborne. Skalárny súčin máme, poďme na veľkosti oboch vektorov.

Ž: *Použijem vzorec, ktorý platí pre výpočet veľkosti vektora:*

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Pre veľkostí smerových vektorov priamok p a q máme:

$$|\vec{u}_p| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$|\vec{u}_q| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

U: Súhlasím. Dáme to všetko dohromady a dosadíme vypočítané hodnoty do vzorca pre odchýlku.

Ž: *Počítam:*

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{|\vec{u}_p||\vec{u}_q|} = \frac{|-1|}{\sqrt{2} \cdot 5} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

U: Navrhujem výsledok upraviť, odstrániť odmocninu z menovateľa.

Ž: *Zlomok rozšírim $\sqrt{2}$ a dostávam:*

$$\cos\varphi = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

U: Zvládol si to vynikajúco. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{10}$, na určenie približnej hodnoty φ musíme už siahnuť po kalkulačke.

Ž: *Dostávame $\varphi \doteq 81°52'$. Odchýlka priamok p a q je približne $81°52'$.*

U: Na záver ti ponúkam pohľad na celý výpočet, máš ho v rámčeku.

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{|\vec{u}_p||\vec{u}_q|} \\
\cos\varphi &= \frac{|1 \cdot 3 + (-1) \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} \\
\cos\varphi &= \frac{|-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{25}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10} \\
\varphi &\doteq 81°52'
\end{aligned}}$$

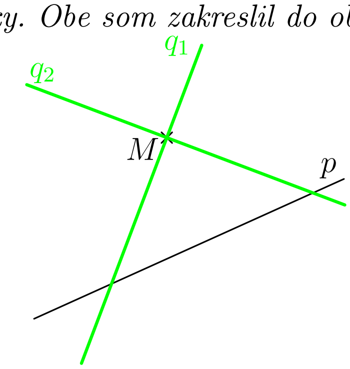
Úloha 1: *Dané sú priamky* p*:* $x = 1 - 3t$, $y = 2 + t$; $t \in \mathbb{R}$, $q : 3x - y + 7 = 0$. *Určte ich odchýlku.*

Výsledok: 90°

Príklad 3: *Napíšte rovnicu priamky q, ktorá prechádza bodom $M[1; 3]$ tak, že jej odchýlka s priamkou $p : 4y - 5 = 0$ je 45°.*

U: Najprv si urobme o úlohe nejakú predstavu. Máme daný bod M a priamku p. Koľko priamok q s požadovanou vlastnosťou bude existovať?

Ž: *Pomôžem si obrázkom. Priamka q má prechádzať bodom M a zvierať s priamkou p uhol 45°. To budú dve také priamky. Obe som zakreslil do obrázka.*



U: Dobre, predstavu máme. Hľadáme rovnicu priamky q. Akú rovnicu budeme hľadať, parametrickú alebo všeobecnú?

Ž: *Nakoľko priamka p je daná všeobecnou rovnicou, dúfam, že sa nám podarí aj priamku q vyjadriť všeobecnou rovnicou.*

U: Predpokladajme, že všeobecná rovnica priamky q bude mať tvar:

$$ax + by + c = 0.$$

Poznáme odchýlku priamok p a q. Pomocou čoho vieme vypočítať odchýlku dvoch priamok?

Ž: *Ak sú priamky dané všeobecnou rovnicou, odchýlku dvoch priamok určujeme ako odchýlku ich normálových vektorov.*

U: Súhlasím. Aké súradnice majú normálové vektory jednotlivých priamok?

Ž: *Normálový vektor priamky p ľahko prečítam z jej všeobecnej rovnice, sú to koeficienty stojace pri x a y. Vlastne x v rovnici nemáme... preto prvá súradnica bude 0:*

$$\vec{n}_p = (0; 4).$$

Súradnice normálového vektora priamky q ale nepoznám.

U: Nevieme ich vyčísliť, ale vieme povedať, že normálový vektor priamky q bude mať súradnice

$$\vec{n}_q = (a; b),$$

kde a a b sú zatiaľ naše neznáme. Dobre. Ako určíme odchýlku normálových vektorov?

Ž: *Zvyčajne postupujeme podľa vzorca na výpočet odchýlky priamok:*

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{n}_p||\vec{n}_q|}.$$

U: Vysvetlime si ho podrobnejšie.

Ž: *V čitateli máme skalárny súčin. V menovateli zase súčin veľkostí oboch vektorov.*

U: Pomenoval si to správne. Začnime skalárnym súčinom.

Ž: *Skalárny súčin vektorov vypočítame tak, že vynásobím ich prvé súradnice a k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc. Zopakujem si súradnice normálových vektorov*

$$\vec{n}_p = (0; 4)$$

$$\vec{n}_q = (a; b).$$

A počítam skalárny súčin:

$$\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q = 0 \cdot a + 4 \cdot b = 4b.$$

U: Výborne. Skalárny súčin máme, poďme na veľkosti oboch vektorov.

Ž: *Opäť použijem vzorec, ktorý platí pre výpočet veľkosti vektora:*

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Pre normálové vektory priamok p a q môžeme písať:

$$|\vec{n}_p| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4,$$

$$|\vec{n}_q| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

U: Súhlasím. Dáme to všetko dohromady a dosadíme vypočítané hodnoty do vzorca pre odchýlku.

Ž: *Dosadzujem:*

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{n}_p||\vec{n}_q|} = \frac{|4b|}{4 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Môžem ešte zrušiť absolútnu hodnotu a vykrátiť 4.

U: Moment! Absolútnu hodnotu nemôžeš len tak zrušiť! Možno sa ti zdá, že výraz $4b$ je nezáporný, ale nie je to tak. Nevieme, aké znamienko bude mať neznáma b. Môžeme len 4 vybrať z absolútnej hodnoty a následne vykrátiť.

Ž: *Dobre. Dostávam:*

$$\cos\varphi = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

U: Výborne. Odchýlku priamok však poznáme.

Ž: *Áno. Odchýlka priamok p a q je $45°$. Teda $\varphi = 45°$. To znamená, že*

$$\cos\varphi = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

U: Po dosadení dostávame rovnicu

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ž: *Je to však jedna rovnica a dve neznáme. To bude mať nekonečne veľa riešení.*

U: Ale to je v poriadku. Uvedom si, že neznáme a a b sú súradnice normálového vektora priamky q. Ako iste vieš, priamka môže mať nekonečne veľa normálových vektorov.

Ž: *Ale všetky sú násobkom jedného vektora.*

U: To využijeme. Môžeme predpokladať, že jeden z normálových vektorov bude mať napr. druhú súradnicu $b = 1$. Neplatilo by to iba vtedy, ak by hľadaná priamka mala špeciálnu polohu v sústave súradníc, bola by rovnobežná s osou y.

Ž: *Odkiaľ viem, že to nie je tento prípad?*

U: Máš na to viacero možností. Napr. podľa všeobecnej rovnice priamky p: $4y - 5 = 0$.

Ž: *Tá je v zadaní.*

U: Uvedomíš si, že je to priamka rovnobežná s osou x, a preto priamka q, ktorá s ňou zviera $45°$ uhol, nemôže byť rovnobežná s osou y.

Ž: *To je fakt! No, ale keby to bola iná priamka?*

U: Potom ešte vieš, že úloha má dve riešenia. Preto, ak týmto spôsobom nájdeš len jedno riešenie, dá sa predpokladať, že druhé riešenie – to bude práve priamka rovnobežná s osou y. Vtedy stačí sa vrátiť a zvoliť si prvú súradnicu $a = 1$.
Takže nech $b = 1$, dosaďme túto hodnotu a dopočítajme a.

Ž: *Dobre. Dosadím $b = 1$ a získavam rovnicu:*

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1|}{\sqrt{a^2 + 1^2}}.$$

Teraz už naozaj môžem vynechať absolútnu hodnotu:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

U: Odstránime zlomky.

Ž: *Vynásobím obe strany rovnice výrazom $2\sqrt{a^2+1}$ a dostávam:*

$$\sqrt{2}\sqrt{a^2 + 1} = 2.$$

Obe strany rovnice umocním na druhú:

$$2(1 + a^2) = 4.$$

U: Dostal si kvadratickú rovnicu. Podľa očakávaní by mala mať dve riešenia. Vyriešme ju.

Ž: *Roznásobím zátvorku:*

$$2 + 2a^2 = 4,$$

všetky členy dám na ľavú stranu

$$2a^2 - 2 = 0$$

a predelím dvojkou

$$a^2 - 1 = 0.$$

U: Zatiaľ správne.

Ž: *Ľavú stranu rozložím na súčin:*

$$(a+1)(a-1)=0.$$

A hneď mám dve riešenia

$$a_1=-1;\quad a_2=1.$$

U: Výborne. Podľa očakávaní máme dve riešenia. Prvá priamka q_1 má normálový vektor $\vec{n}_{q_1}=(-1;1)$ a druhá priamka q_2 má normálový vektor $\vec{n}_{q_2}=(1;1)$. Potrebujeme už len všeobecnú rovnicu týchto priamok. Začnime s priamkou q_1. Jej normálový vektor je $\vec{n}_{q_1}=(-1;1)$, preto všeobecná rovnica bude vyzerať takto:

$$-x+y+c=0.$$

Ž: *Ostáva koeficient* c.

U: Máme však ešte daný bod $M[1;3]$, ktorý patrí priamke q.

Ž: *Aha! Dosadím jeho súradnice do rovnice priamky a dopočítam* c*:*

$$-1+3+c=0.$$

Z toho mám:

$$c=-2.$$

Všeobecná rovnica priamky q_1 *je:*

$$-x+y-2=0.$$

U: Dobre. Teraz to isté s priamku q_2.

Ž: *Normálový vektor priamky* q_2 *je* $\vec{n}_{q_2}=(1;1)$, *preto všeobecná rovnica bude vyzerať takto:*

$$x+y+c=0.$$

Dosadím súradnice bodu M *a dopočítam* c*:*

$$1+3+c=0.$$

Z toho mám:

$$c=-4.$$

Všeobecná rovnica priamky q_2 *je:*

$$x+y-4=0.$$

Úloha 1: *Napíšte rovnicu priamky* p*, ktorá prechádza bodom* $A[0;-9]$ *tak, že jej odchýlka s priamkou* $q: 3x-7=0$ *je* 60°.

Výsledok: $p_1: \sqrt{3}x+3y+27=0;\quad p_2: -\sqrt{3}x+3y+27=0$

Príklad 4: *Určte súradnicu päty kolmice vedenej z bodu $A[-1;3]$ na priamku* $q: \ 2x + 3y - 5 = 0$.

Ž: *Určiť súradnicu päty kolmice? Narysovať by to bolo veľmi jednoduché.*

U: O to sa aj oprieme. Budeme kopírovať postup konštrukcie. Ako by si postupoval konštrukčne?

Ž: *Jednoducho. Narysujem kolmicu z bodu A na priamku q a nazvem ju napr. k. Kde sa pretnú priamky k a q je päta kolmice, nazvem ju napr. P.*

U: My budeme postupovať rovnako. Len namiesto rysovania budem počítať. Povedal si, že narysuješ kolmicu z bodu A na priamku q a nazveš ju k. My napíšeme rovnicu priamky k, ktorá je kolmá na priamku q a prechádza bodom A. Čo platí o normálových vektoroch kolmých priamok?

Ž: *Ak sú dve priamky kolmé, tak aj ich normálové vektory sú na seba kolmé. Normálový vektor priamky q poznám:*

$$\vec{n}_q = (2;3).$$

U: Výborne. Normálový vektor priamky k je naňho kolmý. Znamená to, že ich skalárny súčin je rovný nule.

Ž: *Moment! To znamená, že stačí iba prehodiť poradie súradníc vektora $\vec{n}_q$ a v jednej súradnici zmeniť znamienko. Normálový vektor priamky k bude mať napr. súradnice:*

$$\vec{n}_k = (3;-2).$$

U: To si vyriešil šikovne. Keďže normálový vektor priamky k je $\vec{n}_k = (3;-2)$, všeobecná rovnica priamky k bude vyzerať takto:

$$3x - 2y + c = 0.$$

Ž: *Ostáva koeficient c.*

U: Máme však ešte daný bod $A[-1;3]$, ktorý patrí priamke k.

Ž: *Aha! Dosadím jeho súradnice do rovnice priamky a dopočítam c:*

$$-3 - 6 + c = 0.$$

Z toho mám:

$$c = 9.$$

Všeobecná rovnica priamky k je:

$$3x - 2y + 9 = 0.$$

U: Výborne. Vrátime sa k tvojmu postupu konštrukcie. Povedal si: „Kde sa pretnú priamky k a q je päta kolmice, nazvem ju napr. P.“ Musíme určiť priesečník priamok k a q.

Ž: *Určiť priesečník dvoch priamok? To znamená vyriešiť sústavu rovníc pozostávajúcu z rovníc oboch priamok.*

U: Áno, zostavíme si sústavu z rovníc priamok q a k:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 5 &= 0 \\ 3x - 2y + 9 &= 0. \end{aligned}$$

Na vyriešenie sústavy navrhujem použiť sčítaciu metódu.

Ž: *Dobre. Prvú rovnicu vynásobím číslom* 3 *a druhú rovnicu vynásobím číslom* (-2)*. Potom ich sčítam. Sledujte rámček. Dostanem rovnicu*

$$9y + 4y - 15 - 18 = 0.$$

Po úprave vyzerá takto:

$$13y = 33.$$

Z čoho dostávam

$$y = \frac{33}{13}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2x + 3y - 5 &= 0 \quad / \cdot 3 \\ 3x - 2y + 9 &= 0 \quad / \cdot (-2) \\ \hline 9y + 4y - 15 - 18 &= 0 \\ 13y &= 33 \\ y &= \frac{33}{13} \end{aligned}}$$

U: Hodnotu $y = \frac{33}{13}$ dosadím napr. do prvej rovnice:

$$2x + 3 \cdot \frac{33}{13} - 5 = 0.$$

Ž: *Z toho mám*

$$2x = -\frac{34}{13},$$

čiže

$$x = -\frac{17}{13}.$$

Bod P *– priesečník priamok* q *a* k *má súradnice* $P[-\frac{17}{13}; \frac{33}{13}]$.

U: Áno. Päta kolmice vedenej z bodu $A[-1; 3]$ na priamku $q: \ 2x + 3y - 5 = 0$ má súradnice $P[-\frac{17}{13}; \frac{33}{13}]$.

Úloha 1: *Určte súradnicu päty kolmice vedenej z bodu* $A[3; -7]$ *na priamku* $p: \ 5x - 6y + 4 = 0$.

Výsledok: $P[-2; -1]$

Príklad 5: *Daná je kocka $ABCDEFGH$ s dĺžkou hrany 4 cm. Určte analytickou metódou odchýlku priamok $\overleftrightarrow{BP}$ a $\overleftrightarrow{HF}$, pričom bod P je stred hrany HG.*

Ž: *Uf! To je normálna úloha zo stereometrie. Nikde žiadne súradnice, vektory ani rovnice.*

U: Práve o to ide. Úloha sa dá riešiť klasicky, ale aj analytickou metódou. Analyticky sa neriešia len úlohy, kde už máme dané rovnice roviny a priamky. Práve naopak. Musíme dokázať aj klasickú geometrickú úlohu preniesť do sveta analytickej geometrie. Niekedy zistíme, že je to oveľa jednoduchší spôsob riešenia.

Ž: *Znamená to, že rovnice priamky a roviny si budeme musieť určiť sami.*

U: Samozrejme. Na to však potrebujeme poznať súradnice jednotlivých bodov.

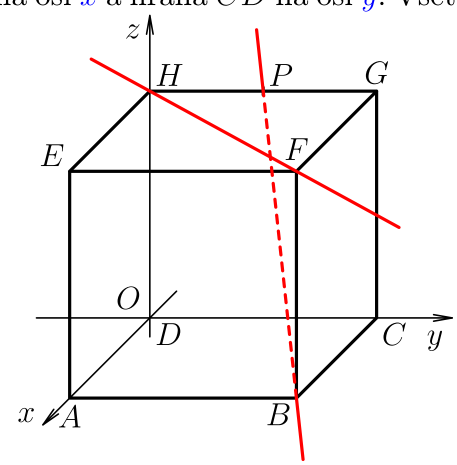
Ž: *Žiadne nemáme.*

U: Tak si zavedieme súradnicovú sústavu. Podľa možnosti tak, aby sa nám počítalo čo najjednoduchšie.

Ž: *Mám kocku a tú si umiestnim v sústave súradníc. Samozrejme v trojrozmernej, čiže v priestore. Asi bude najjednoduchšie umiestniť vrchol D do začiatku sústavy súradníc. Teda*

$$D[0; 0; 0].$$

U: Áno. To si zvolil šikovne. Dodám ešte, že spodná podstava kocky bude ležať v súradnicovej rovine xy. Hrana AD leží na osi x a hrana CD na osi y. Všetko je zakreslené aj na obrázku.



Ž: *Na obrázku máme zakreslené aj dané priamky $\overleftrightarrow{BP}$ a $\overleftrightarrow{HF}$. Vidím, že sú to mimobežky. S určením ich odchýlky by som sa určite natrápil.*

U: Práve o tom som rozprával. Riešiť úlohu analyticky je niekedy jednoduchšie. Netreba nám ani tak priestorovú predstavivosť ako vedieť narábať s rovnicami priamok. Vráťme sa ale ku kocke. Kocka má hranu 4 cm. Zoberme ako jeden dielik na súradnicových osiach 1cm. Napr. bod F má súradnice

$$F[4; 4; 4].$$

Ž: *Dobre. Tak ja určím súradnice ostatných vrcholov kocky.*

U: Pozor. Aby si sa zbytočne neunavoval, urč súradnice len tých vrcholov, ktoré potrebujeme.

Ž: *Máme určiť odchýlku priamok* $\overleftrightarrow{BP}$ *a* $\overleftrightarrow{HF}$. *Potrebujem súradnice štyroch bodov:* B, P, H *a* F. *Bod* F *ste mi už určili. Z obrázka je jasné, že bod* B *má súradnice*

$$B[4; 4; 0].$$

Podobne bod H

$$H[0; 0; 4].$$

U: Ostáva ešte bod P. To nie je vrchol kocky.

Ž: *Mohol by som určiť súradnice vrcholu* G *a súradnice bodu* P *pomocou súradníc stredu úsečky.*

U: Áno, to by bol správny postup. Ale, keď sa pozrieš na obrázok, uvidíš to aj bez počítania.

Ž: *No jasné! Bod* P *je „medzi“ bodmi* H *a* G *v takej istej výške. Má súradnice*

$$P[0; 2; 4].$$

U: Výborne. Tým sme úlohu previedli na analytickú. Môžeme sa pustiť do určenia odchýlky priamok $\overleftrightarrow{BP}$ a $\overleftrightarrow{HF}$.

Ž: *Mali by sme asi vytvoriť rovnicu priamky* $\overleftrightarrow{BP}$ *a potom rovnicu priamky* $\overleftrightarrow{HF}$.

U: Nebude to potrebné. Pri určení odchýlky priamok si vystačíme len s vektormi. Potrebujeme smerový vektor priamky $\overleftrightarrow{BP}$ a smerový vektor priamky $\overleftrightarrow{HF}$.

Ž: *So smerovými vektormi priamok by nemal byť problém. Pri každej priamke máme predsa súradnice dvoch jej rôznych bodoch. Takže priamka* BP *je daná bodmi* $B[4; 4; 0]$ *a* $P[0; 2; 4]$. *Smerovým vektorom priamky* $\overleftrightarrow{BP}$ *bude vektor* $\vec{u} = P - B$ *a bude mať súradnice*

$$\vec{u} = P - B = (0-4; 2-4; 4-0) = (-4; -2; 4).$$

Priamka HF *je daná bodmi* $H[0; 0; 4]$ *a* $F[4; 4; 4]$. *Smerovým vektorom priamky* $\overleftrightarrow{HF}$ *bude vektor* $\vec{v} = F - H$ *a bude mať súradnice*

$$\vec{v} = F - H = (4-0; 4-0; 4-4) = (4; 4; 0).$$

U: Výborne. Odchýlku priamok počítame podľa nasledujúceho vzorca:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|},$$

pričom $\vec{u}$ je smerový vektor jednej priamky a $\vec{v}$ smerový vektor druhej priamky. Vysvetlíme si ho podrobnejšie.

Ž: *V čitateli máme skalárny súčin. V menovateli zase súčin veľkostí oboch vektorov.*

U: Pomenoval si to správne. Dúfam, že to vieš aj tak pekne vypočítať.

Ž: *Skúsim. Skalárny súčin vektorov vypočítame tak, že vynásobím ich prvé súradnice a k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc a nakoniec pripočítam súčin tretích súradníc, teda*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

U: Dobre. Môžeme počítať.

Ž: *Zopakujem si súradnice smerových vektorov*

$$\vec{u} = (-4; -2; 4)$$

$$\vec{v} = (4; 4; 0).$$

A počítam skalárny súčin:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \cdot 4 + (-2) \cdot 4 + 4 \cdot 0 = -16 - 8 + 0 = -24.$$

U: Výborne. Skalárny súčin máme, poďme na veľkosti oboch vektorov.

Ž: *Opäť použijem vzorec, ktorý platí pre výpočet veľkosti vektora:*

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Pre smerové vektory priamok $\overleftrightarrow{BP}$ *a* $\overleftrightarrow{HF}$ *môžeme písať:*

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6,$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}.$$

U: Súhlasím. Dáme to všetko dohromady a dosadíme vypočítané hodnoty do vzorca pre odchýlku.

Ž: *Počítam:*

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{|-24|}{6 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{24}{24\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

U: Navrhujem výsledok upraviť, odstrániť odmocninu z menovateľa.

Ž: *Zlomok rozšírim* $\sqrt{2}$ *a dostávam:*

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

U: Zvládol si to vynikajúco. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Veľkosť uhla φ by si mal vedieť pri takejto hodnote určiť aj spamäti.

Ž: *Hm... platí* $\varphi = 45°$. *Odchýlka priamok* $\overleftrightarrow{BP}$ *a* $\overleftrightarrow{HF}$ *je* $45°$.

U: Na záver ti ponúkam pohľad na celý výpočet, máš ho v rámčeku.

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}\\
\cos\varphi &= \frac{|(-4) \cdot 4 + (-2) \cdot 4 + 4 \cdot 0|}{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 4^2}\sqrt{4^2 + 4^2 + 0^2}}\\
\cos\varphi &= \frac{|-24|}{6 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{24}{24\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\varphi &= 45°
\end{aligned}}$$

Úloha 1: *Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ s dĺžkou hrany $|AB| = 4$ a výškou $v = 6$. Označme K stred hrany AB a M stred hrany CV. Určte analytickou metódou odchýlku priamok $\overleftrightarrow{KM}$ a $\overleftrightarrow{CV}$.*

Výsledok: $\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{19}\sqrt{11}}$; $\varphi \doteq 69°45'$