Odchýlka priamky a roviny

RNDr. Viera Vodičková

U: Zopakujeme si ako je v stereometrii definovaná odchýlka priamky a roviny.

Ž: *Ak je priamka s rovinou rovnobežná, tak ich odchýlka je určite* $0°$*.*

U: Správne. V tom je zahrnutý aj prípad priamky ležiacej v rovine. A teraz to ťažšie, priamka je s rovinou rôznobežná. Nazvime si ich napr. priamka p a rovina α. Ako určíme ich odchýlku?

Ž: *Priamku spustím kolmo na rovinu, a tak mi vznikne uhol …*

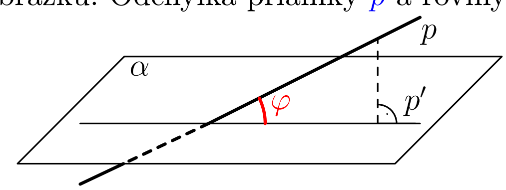
U: To je dosť nepresne povedané. Ale máš v podstate pravdu. Najprv zostrojíme kolmý priemet priamky p do roviny α. Nazveme ho p'.

Ž: *To som myslel tým „priamku spustím kolmo na rovinu".*

U: Ešte dodám, že kolmý priemet priamky p je priesečnicou roviny α a roviny ϱ, pričom rovina ϱ je kolmá na rovinu α a priamka p v nej leží.

Ž: *No vidíte, ja som to povedal len jednoduchšie!*

U: Odchýlkou priamky p a roviny α potom nazývame odchýlku priamok p a p'. Celú situáciu si môžeš pozrieť aj na obrázku. Odchýlka priamky p a roviny α je vyznačená ako φ.



U: Tak, a teraz sa môžeme venovať analytickému vyjadreniu. Akým spôsobom môžeme vyjadriť priamku a akým rovinu?

Ž: *Priamka je v priestore, ostáva nám iba parametrické vyjadrenie. Rovinu môžeme vyjadriť parametricky alebo všeobecnou rovnicou.*

U: Iste vieš, že parametrické rovnice roviny sú v podstate tri, vystupujú v nich dva smerové vektory a teda aj dva parametre. Naproti tomu všeobecná rovnica roviny je len jedna rovnica. Určite uznáš, že sa s ňou pracuje jednoduchšie. Sústredíme sa preto len na rovinu danú všeobecnou rovnicou.

Ž: *Jasné. A v prípade, že by predsa bola rovina zadaná parametricky, viem prepísať parametrické rovnice tejto roviny na rovnicu všeobecnú. Však?*

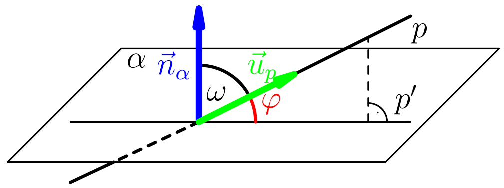
U: Dobre. Nech je priamka p zadaná parametricky. Čo všetko vieme určiť z parametrickej rovnice priamky?

Ž: *Z parametrického vyjadrenia vieme určiť súradnice aspoň jedného bodu priamky a súradnice smerového vektora priamky.*

U: Smerový vektor priamky p označíme $\vec{u}_p$. Pripomeniem, že tento vektor môžeme na priamku umiestniť.
Rovina α nech je daná všeobecnou rovnicou. Čo vieme vyčítať zo všeobecnej rovnice roviny?

Ž: *Súradnice normálového vektora roviny. Označíme ho $\vec{n}_\alpha$. Je to vektor kolmý na rovinu.*

U: Vrátime sa k obrázku. Vyznačíme si na ňom smerový vektor priamky p a normálový vektor roviny α.



Ž: *Vidím, že ste vektory šikovne umiestnili do spoločného začiatku. Tiež tam vidím vyznačený uhol ω.*

U: Uhol ω predstavuje na našom obrázku odchýlku vektorov $\vec{u}_p$ a $\vec{n}_\alpha$. Naznačuje, že bude súvisieť s odchýlkou priamky p a roviny α, teda s uhlom φ.

Ž: *No... Zdá sa, ako keby tvorili spolu pravý uhol.*

U: Máš pravdu! Zdôvodnime si to. Vektor $\vec{n}_\alpha$ je kolmý na rovinu α, teda aj na každú priamku tejto roviny.

Ž: *Čiže je kolmý aj na priamku p'.*

U: Správne.

Ž: *Á... A tento pravý uhol je rozdelený na dva uhly, uhol φ a uhol ω.*

U: Preto platí:

$$\varphi = 90^\circ - \omega.$$

Ž: *Takže vypočítam odchýlku vektorov $\vec{u}_p$ a $\vec{n}_\alpha$, to bude uhol ω. A potom už len odčítam túto veľkosť od 90° a mám odchýlku priamky p a roviny α. Celkom jednoduché.*

U: Vieš ako sa vypočíta odchýlka vektorov?

Ž: *Ak sa dobre pamätám, bol na to nejaký vzorec. A asi tam vystupoval kosínus uhla...*

U: Odchýlku ω vektorov $\vec{u}_p$ a $\vec{n}_\alpha$ vypočítame takto:

$$\cos\omega = \frac{\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha}{|\vec{u}_p||\vec{n}_\alpha|}.$$

Ž: *Jasné! Hore máme skalárny súčin vektorov a dole súčin ich veľkostí.*

U: Má to však jeden háčik.

Ž: *To som si mohol myslieť ...*

U: Odchýlkou dvoch vektorov môže byť aj tupý uhol. Odchýlkou priamky a roviny nie. Podľa predchádzajúcich úvah potrebujeme, aby uhol ω bol ostrý, prípadne pravý.

Ž: *Vyriešime to jednoducho. Ak odchýlkou vektorov bude tupý uhol, zoberieme jeho susedný uhol. Čiže od 180° odčítame veľkosť tupého uhla a máme to.*

U: Už to len trocha zjednodušíme. Hodnota kosínusu susedných uhlov sa líši len znamienkom. Ich absolútne hodnoty sú rovnaké. Preto stačí do vzorca pre výpočet odchýlky dvoch vektorov pridať len absolútnu hodnotu a vzorec bude vyzerať tak, ako v tomto rámčeku.

$$\boxed{\cos\omega = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{u}_p||\vec{n}_\alpha|}}$$

Ž: *Dobre. Podľa tohto vzorca vypočítam veľkosť uhla ω a potom ju odčítam od $90°$.*

U: Aj tu to trošku zjednodušíme. Platí:

$$\omega = 90° - \varphi.$$

Čo platí potom pre $\cos\omega$?

Ž: *Môžem vyjadriť:*

$$\cos\omega = \cos(90° - \varphi).$$

U: Áno. Na základe vlastností goniometrických funkcií sínus a kosínus by si mal vedieť, že platí:

$$\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi.$$

Ž: *Šikovné. Nebudem musieť nič odčítavať. Nebudem počítať $\cos\omega$, ale rovno $\sin\varphi$.*

U: Ja už len doplním, že odchýlku priamky p a roviny α vypočítame podľa vzorca:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{u}_p||\vec{n}_\alpha|},$$

kde $\vec{u}_p$ je smerový vektor priamky p a $\vec{n}_\alpha$ normálový vektor roviny α.

Príklad 1: *Určte odchýlku priamky p: $x = 5 + t$, $y = 1 + 3t$, $z = -2t$, $t \in \mathbb{R}$ a roviny α: $2x - y + 3z - 4 = 0$.*

Ž: *Odchýlku priamky a roviny zistím pomocou ich vektorov.*

U: Presnejšie pomocou smerového vektora priamky a normálového vektora roviny.

Ž: *Tak som to myslel. Odchýlku priamky a roviny počítame podľa vzorca:*

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{u}_p||\vec{n}_\alpha|}.$$

U: Nezabudni, že vo vzorci nevystupuje „kosínus“ ale „sínus“. Vektor $\vec{u}_p$ je smerový vektor priamky p a $\vec{n}_\alpha$ je normálový vektor roviny α. Potrebujeme ich súradnice.

Ž: *Súradnice vektora $\vec{u}_p$ určím z parametrického vyjadrenia priamky p. Budú to čísla stojace pri parametri t, preto:*

$$\vec{u}_p = (1; 3; -2).$$

U: V poriadku.

Ž: *Súradnice normálového vektora prečítam zo všeobecnej rovnice roviny α. Sú to čísla stojace pri x, y a z. Preto:*

$$\vec{n}_\alpha = (2; -1; 3).$$

U: Vysvetlíme si podrobnejšie uvedený vzorec na výpočet odchýlky.

Ž: *V čitateli máme skalárny súčin. V menovateli zase súčin veľkostí oboch vektorov.*

U: Pomenoval si to správne. Dúfam, že to vieš aj tak pekne vypočítať.

Ž: *Začnem skalárnym súčinom vektorov $\vec{u}_p$ a $\vec{n}_\alpha$. Vypočítam ho tak, že vynásobím ich prvé súradnice, k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc a k tomu ešte súčin ich tretích súradníc, teda*

$$\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 = 2 - 3 - 6 = -7.$$

U: Výborne. Skalárny súčin máme, poďme na veľkosti oboch vektorov.

Ž: *Použijem vzorec, ktorý platí pre výpočet veľkosti vektora:*

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Pre naše vektory môžem písať:

$$|\vec{u}_p| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14},$$

$$|\vec{n}_\alpha| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}.$$

U: Súhlasím. Dáme to všetko dohromady a dosadíme vypočítané hodnoty do vzorca pre odchýlku.

Ž: *Počítam:*

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{u}_p||\vec{n}_\alpha|} = \frac{|-7|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

U: Zvládol si to vynikajúco. Ak sa $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, potom platí $\varphi = 30°$. Odchýlka priamky p a roviny α je $30°$.
Na záver ti ponúkam pohľad na celý výpočet, máš ho v rámčeku.

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin\varphi &= \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{u}_p||\vec{n}_\alpha|}\\
\sin\varphi &= \frac{|1\cdot 2 + 3\cdot(-1) + (-2)\cdot 3|}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}\\
\sin\varphi &= \frac{|-7|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}\\
\varphi &= 30°
\end{aligned}}$$

Úloha 1: *Určte odchýlku priamky p:* $x = 4 - 2t,\ y = 1 - 2t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$ *a roviny* α*:* $x + 4y + z - 1 = 0$.

Výsledok: $45°$

Úloha 2: *Určte odchýlku priamky p:* $x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$ *a roviny* α*:* $x = 5 - r - 3s,\ y = 19 + r - 3s,\ z = 3 + 4r,\ r, s \in \mathbb{R}$.

Výsledok: $74°12'$

Príklad 2: *Určte odchýlku priamky p: $x = -1 - t$, $y = -1 + 3t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ a súradnicovej roviny xy.*

Ž: *Súradnicová rovina?*

U: Súradnicová rovina xy je rovina určená súradnicovými osami a to osou x a osou y. Aký má táto rovina normálový vektor?

Ž: *Normálový vektor je na rovinu kolmý. Na rovinu xy je kolmá os z, preto to bude vektor v smere osi z. Najlepšie jednotkový. Normálový vektor roviny xy je $\vec{n} = (0; 0; 1)$.*

U: Nakoľko rovina prechádza začiatkom sústavy súradníc, bodom $O[0; 0; 0]$, jej všeobecná rovnica vyzerá takto: $z = 0$.

Ž: *Celkom jednoducho, však?*

U: Dobre. Poďme na výpočet odchýlky.

Ž: *Odchýlku priamky a roviny zistím pomocou smerového vektora priamky a normálového vektora roviny. Ten sme práve určili.*

U: Potrebujeme ešte smerový vektor priamky $\vec{u}_p$.

Ž: *Súradnice vektora $\vec{u}_p$ určím z parametrického vyjadrenia priamky p. Budú to čísla stojace pri parametri t, preto:*

$$\vec{u}_p = (-1; 3; 1).$$

U: Vektory už máme. Stále si mi však nepovedal, ako určíme odchýlku priamky od roviny.

Ž: *Máme na to predsa vzorec. Ak označíme túto odchýlku φ, platí:*

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_p||\vec{n}|}.$$

U: Vysvetlíme si podrobnejšie uvedený vzorec na výpočet odchýlky.

Ž: *V čitateli máme skalárny súčin. V menovateli zase súčin veľkostí oboch vektorov.*

U: Poďme počítať.

Ž: *Začnem skalárnym súčinom vektorov $\vec{u}_p$ a $\vec{n}$. Vypočítam ho tak, že vynásobím ich prvé súradnice, k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc a k tomu ešte súčin ich tretích súradníc, teda*

$$\vec{u}_p \cdot \vec{n} = -1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1.$$

U: Výborne. Skalárny súčin máme, vypočítajme veľkosti oboch vektorov.

Ž: *Použijem vzorec, ktorý platí pre výpočet veľkosti vektora:*

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Pre naše vektory môžem písať:

$$|\vec{u}_p| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11},$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1.$$

U: Súhlasím. Podotýkam, že veľkosť vektora $\vec{n}$ si nemusel počítať. Povedali sme už, že je to jednotkový vektor.

Ž: *To som ale hlupák!*

U: Také zlé to snáď nebude.
Dáme to všetko dohromady a dosadíme vypočítané hodnoty do vzorca pre odchýlku.

Ž: *Počítam:*

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_p||\vec{n}|} = \frac{|1|}{\sqrt{11}\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}.$$

U: Výborne. Určme hodnotu φ.

Ž: *Použijem kalkulačku a dostávam $\varphi = 17°32'$. Odchýlka priamky p a súradnicovej roviny xy je $17°32'$.*

Úloha 1: *Určte odchýlku priamky p: $x = 2+2t$, $y = -1-3t$, $z = 3+\sqrt{3}t$, $t \in \mathbb{R}$ a súradnicovej roviny yz.*

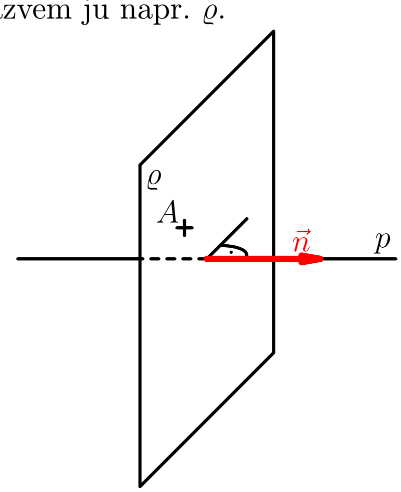
Výsledok: $30°$

Úloha 2: *Určte odchýlku osi z od roviny ϱ: $2x - 2y + z + 11 = 0$.*

Výsledok: $19°28'$

Príklad 3: *Určte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $A[7;-5;3]$ a je kolmá na priamku p: $x = 2 + 3t$, $y = 5t$, $z = 7 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$.*

U: Navrhujem pre názornosť začať s obrázkom. Načrtneme si priamku p, bod A a rovinu požadovaných vlastností, nazvem ju napr. ϱ.



Otázkou je, či môže obrázok vyzerať takto. Nepatrí bod A náhodou priamke p?

Ž: *To viem rýchlo zistiť. Dosadím súradnice bodu $A[7;-5;3]$ do parametrických rovníc priamky p a zistím, či mu zodpovedá jediná hodnota parametra t:*

$$\begin{aligned} 7 &= 2 + 3t \\ -5 &= 5t \\ 3 &= 7 - 2t. \end{aligned}$$

Z každej rovnice si vypočítam neznámu t. Z prvej rovnice dostávam: $t = \frac{5}{3}$. Z druhej rovnice mám: $t = -1$. Téčka sú rôzne. Tretiu rovnicu už ani nepočítam. Bod A nepatrí priamke p.

U: Výborne, tento problém máme za sebou. Našou úlohou je napísať všeobecnú rovnicu roviny ϱ. Čo k tomu potrebujeme?

Ž: *Potrebujem normálový vektor roviny a súradnice jedného bodu patriaceho rovine. Taký bod poznám, je to bod A.*

U: Normálový vektor je vektor kolmý na rovinu. Pozrime sa na obrázok: čo nám pomôže pri hľadaní normálového vektora roviny ϱ?

Ž: *Na obrázku máme vyznačený smerový vektor priamky p. Ten je umiestnený na priamke p.*

U: A tá je kolmá na rovinu ϱ.

Ž: *Aha! Čiže aj vektor $\vec{u}_p$ je kolmý na rovinu ϱ.*

U: Preto môže byť jej normálovým vektorom.

Ž: *To je fajn. Jeho súradnice ľahko prečítam z parametrických rovníc priamky p, sú to čísla stojace pri parametri t. Takže:*

$$\vec{n}_\varrho = \vec{u}_p = (3; 5; -2).$$

U: Súradnice normálového vektora môžeme dosadiť do všeobecnej rovnice roviny, ktorá potom vyzerá takto:

$$3x + 5y - 2z + d = 0.$$

Ž: *Ostáva nám výpočítať koeficient d.*

U: Na to použijeme bod A.

Ž: *Dobre. Dosadím súradnice bodu $A[7; -5; 3]$ do všeobecnej rovnice roviny. Dostávam:*

$$3 \cdot 7 + 5 \cdot (-5) - 2 \cdot 3 + d = 0.$$

Odtiaľ už ľahko vypočítam d:

$$\begin{aligned} 21 - 25 - 6 + d &= 0 \\ -10 + d &= 0 \\ d &= 10. \end{aligned}$$

U: Všeobecná rovnica roviny ϱ je

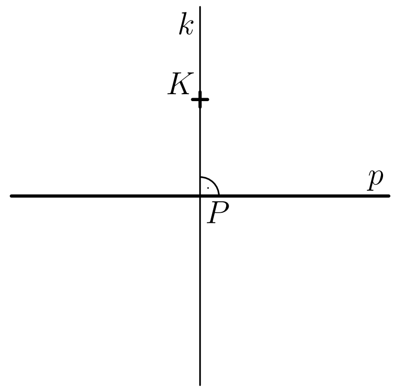
$$3x + 5y - 2z + 10 = 0.$$

Úloha 1: *Určte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $B[7; -5; 3]$ a je kolmá na priamku q: $x = 1 + 4t$, $y = 17 - t$, $z = 29$, $t \in \mathbb{R}$.*

Výsledok: $4x - y - 33 = 0$

Príklad 4: *Určte súradnice päty kolmice vedenej z bodu* $K[5;-7;2]$ *na priamku* p: $x = 1 - t$, $y = -4 + t$, $z = 7 + 3t$, $t \in \mathbb{R}$.

Ž: *Narysovať by to bolo ľahké. Zostrojil by som kolmicu* k *na priamku* p *prechádzajúcu bodom* K. *Tam, kde sa pretne s priamkou* p *vznikne päta kolmice, označím ju ako* P. *Všetko som nakreslil aj na obrázok.*



U: V poriadku. My túto situáciu vyriešime analyticky.

Ž: *Asi viem aj ako. Nájdem rovnicu kolmice* k*, a potom určím prienik s priamkou* p*. Bude ma čakať sústava rovníc.*

U: No... povedzme. Nájdime teda rovnicu priamky k.

Ž: *To bude jednoduché. Priamka* p *je daná parametricky, preto poznám jej smerový vektor. Ten je kolmý na priamku* k*, preto môže byť jej normálovým vektorom.*

U: Tu vidím jeden problém. Priamka v priestore nemá všeobecnú rovnicu a teda ani normálový vektor!

Ž: *Och! To som si neuvedomil!*

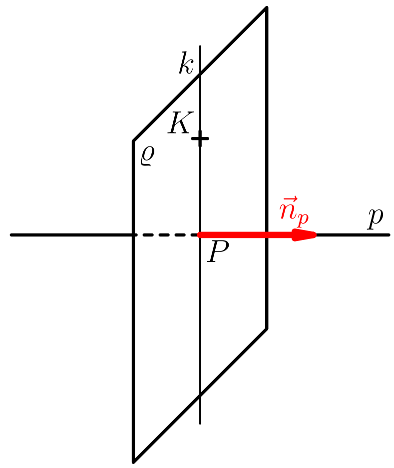
U: Priamka k je v priestore, musíme preto nájsť jej parametrické vyjadrenie.

Ž: *Namiesto normálového vektora potrebujem smerový. Tak to si neviem predstaviť, kde ho zoberiem.*

U: Všetky tvoje predchádzajúce úvahy sa dajú použiť, len namiesto kolmice - priamky, zoberieme kolmú rovinu, napr. ϱ.

Ž: *To nie je zlý nápad! Aj v stereometrii sme často namiesto kolmej priamky hľadali kolmú rovinu, bolo to jednoduchšie.*

U: Tvoj obrázok trochu poopravím. Zároveň na ňom vyznačím smerový vektor $\vec{u}_p$ priamky p. Ten, ako si povedal, poznáme.



Ž: *A teraz už platí, že smerový vektor priamky p je normálovým vektorom roviny ϱ.*

U: Áno. Nájdeme všeobecnú rovnicu roviny ϱ. Hľadaný bod P bude prienikom roviny ϱ a priamky p.

Ž: *Súradnice smerového vektora priamky p prečítam z jej parametrického vyjadrenia, sú to čísla stojace pri parametri t. Preto:*

$$\vec{u}_p = \vec{n} = (-1; 1; 3).$$

U: Predpokladám, že $\vec{n}$ je normálový vektor roviny ϱ. Jeho súradnice môžeme dosadiť do všeobecnej rovnice roviny, ktorá potom vyzerá takto:

$$-x + y + 3z + d = 0.$$

Ž: *Ostáva nám výpočítať koeficient d.*

U: Potrebujeme jeden bod roviny. Bude to bod K.

Ž: *Dosadím súradnice bodu $K[5; -7; 2]$ do všeobecnej rovnice roviny. Dostávam:*

$$-5 + (-7) + 3 \cdot 2 + d = 0.$$

Odtiaľ už ľahko vypočítam d:

$$\begin{aligned} -5 - 7 + 6 + d &= 0 \\ d &= 6. \end{aligned}$$

Všeobecná rovnica roviny ϱ je

$$-x + y + 3z + 6 = 0.$$

U: Alebo aj

$$x - y - 3z - 6 = 0.$$

Ž: *Tak rovinu máme. Pätu kolmice, bod P, získame ako prienik priamky p a roviny ϱ.*

U: Máme určiť priesečník priamky p

$$x = 1 - t$$
$$y = -4 + t$$
$$z = 7 + 3t$$

a roviny ϱ

$$x - y - 3z - 6 = 0.$$

Znamená to, že vyriešime sústavu týchto rovníc. Vyjadrenia pre x, y, z z parametrických rovníc priamky dosadíme do rovnice roviny.

Ž: *Dosadzujem*

$$(1 - t) - (-4 + t) - 3(7 + 3t) - 6 = 0.$$

U: Získali sme jednu rovnicu s jednou neznámou t.

Ž: *Tú hravo vyriešim. Upravím najprv ľavú stranu*

$$1 - t + 4 - t - 21 - 9t - 6 = 0,$$

sčítam čo sa dá

$$-11t - 22 = 0.$$

Z toho je jasné, že

$$t = -2.$$

U: Výborne. Ako získame súradnice bodu P?

Ž: *Stačí dosadiť vypočítanú hodnotu $t = -2$ do parametrických rovníc priamky p:*

$$x = 1 - (-2) = 3$$
$$y = -4 + (-2) = -6$$
$$z = 7 + 3 \cdot (-2) = 1.$$

Bod P má súradnice $P[3; -6; 1]$.

U: Áno. Pätou kolmice vedenej z bodu K na priamku p je bod $P[3; -6; 1]$.

Úloha 1: *Určte súradnice päty kolmice vedenej z bodu $K[2; 3; 0]$ na priamku p: $x = -3 - 2t$, $y = -12 - 3t$, $z = 1 + t$, $t \in \mathbb{R}$.*

Výsledok: $P[5; 0; -3]$

Príklad 5: *Je daná priamka* $p: x = 1 + t,\ y = 2 + at,\ z = -1 - t,\ t \in \mathbb{R}$ *a rovina* $\varrho: \ x + y - z + 8 = 0$. *Určte hodnotu reálneho parametra* a *tak, aby*

a) odchýlka priamky p *od roviny* ϱ *bola* $30°$,

b) priamka p *bola kolmá na rovinu* ϱ.

Ž: *To je úloha s parametrom!*

U: Toho sa predsa nemusíš báť! Parameter si zatiaľ jednoducho nevšímaj.

Ž: *Dobre. Začnem s úlohou a). Chcem, aby odchýlka priamky a roviny bola* $30°$.

U: Ako určíme odchýlku priamky a roviny?

Ž: *Máme na to vzorec. Ak označíme túto odchýlku* φ, *tak platí:*

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\varrho|}{|\vec{u}_p||\vec{n}_\varrho|}.$$

U: Dodám len, že $\vec{u}_p$ je smerový vektor priamky p a $\vec{n}_\varrho$ je normálový vektor roviny ϱ.

Ž: *Súradnice vektora* $\vec{u}_p$ *určím z parametrického vyjadrenia priamky* p. *Sú to čísla stojace pri parametri* t, *preto:*

$$\vec{u}_p = (1; a; -1).$$

Dúfam, že to a *je tam v poriadku.*

U: Samozrejme. Pokračujeme normálovým vektorom roviny ϱ.

Ž: *Jeho súradnice prečítam zo všeobecnej rovnice roviny* ϱ. *Sú to čísla stojace pri* x, y *a* z. *Preto:*

$$\vec{n}_\varrho = (1; 1; -1).$$

U: Vysvetlíme si podrobnejšie vzorec na výpočet odchýlky:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\varrho|}{|\vec{u}_p||\vec{n}_\varrho|}.$$

Ž: *V čitateli máme skalárny súčin. V menovateli zase súčin veľkostí oboch vektorov.*

U: Pomenoval si to správne. Poďme počítať.

Ž: *Začnem skalárnym súčinom vektorov* $\vec{u}_p$ *a* $\vec{n}_\varrho$. *Vypočítam ho tak, že vynásobím ich prvé súradnice, k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc a k tomu ešte súčin ich tretích súradníc, teda*

$$\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\varrho = 1 \cdot 1 + a \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 1 + a + 1 = 2 + a.$$

U: Výborne. Vidíš, ide ti to aj s parametrom. Skalárny súčin máme, poďme na veľkosti oboch vektorov.

Ž: *Použijem vzorec, ktorý platí pre výpočet veľkosti vektora:*

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Pre naše vektory môžem písať:

$$|\vec{u}_p| = \sqrt{1^2 + a^2 + (-1)^2} = \sqrt{2 + a^2},$$

$$|\vec{n}_\varrho| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

U: Súhlasím. Dáme to všetko dohromady a dosadíme vypočítané hodnoty do vzorca pre odchýlku.

Ž: *Počítam:*

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\varrho|}{|\vec{u}_p||\vec{n}_\varrho|} = \frac{|2 + a|}{\sqrt{2 + a^2} \cdot \sqrt{3}}.$$

Čo však ďalej?

U: Poznáme predsa hodnotu uhla $\varphi = 30°$. Vieme, že

$$\sin\varphi = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

Ž: *Potom platí:*

$$\frac{|2 + a|}{\sqrt{2 + a^2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

U: Áno. Dostali sme jednu rovnicu s neznámou a.

Ž: *Ostáva mi ju len vyriešiť. Začnem s tým, že obidve strany rovnice umocním na druhú, aby som odstránil odmocniny:*

$$\frac{|2 + a|^2}{(2 + a^2) \cdot 3} = \frac{1}{4}.$$

Teraz odstránim zlomky:

$$4|2 + a|^2 = 3(2 + a^2).$$

U: Ide ti to dobre. Roznásobime zátvorky.

Ž: *OK.*

$$4(4 + 4a + a^2) = 6 + 3a^2.$$

Čo je:

$$16 + 16a + 4a^2 = 6 + 3a^2.$$

U: Po úprave máme kvadratickú rovnicu:

$$a^2 + 16a + 10 = 0.$$

Ž: *Vyriešim ju pomocou diskriminantu. Takže:*

$$D = 16^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 256 - 40 = 216.$$

Odmocnina z diskriminantu je rovná

$$\sqrt{D} = \sqrt{216} = 2\sqrt{54} = 6\sqrt{6}.$$

U: Dobre. Aké sú korene kvadratickej rovnice?

Ž: *Korene sú* $x_{1,2}\dots$

U: Moment, neznáma je a.

Ž: *Aha! Teda*

$$a_{1,2} = \frac{-16 \pm 6\sqrt{6}}{2} = -8 \pm 3\sqrt{6}.$$

U: Správne. Odchýlka priamky p od roviny ϱ bude $30°$, ak hodnota parametra a bude $-8 + 3\sqrt{6}$ alebo $-8 - 3\sqrt{6}$.
Ostala nám úloha b).

Ž: *To už teraz bude jednoduché. Môžem využiť už odvodený vzťah:*

$$\sin\varphi = \frac{|2 + a|}{\sqrt{2 + a^2} \cdot \sqrt{3}}.$$

Ak je priamka kolmá na rovinu, tak ich odchýlka je $90°$*. Platí:* $\sin 90° = 1$*. Dosadím a mám:*

$$1 = \frac{|2 + a|}{\sqrt{2 + a^2} \cdot \sqrt{3}}.$$

Čo je opäť kvadratická rovnica, tak ju vyriešim.

U: No…súhlasím.

Ž: *Umocním obe strany rovnice na druhú a zároveň odstránim zlomky. Dostávam:*

$$3(2 + a^2) = |2 + a|^2.$$

A po úprave mám kvadratickú rovnicu:

$$a^2 - 2a + 1 = 0.$$

U: Tá vyzerá celkom krajšie.

Ž: *To je pravda. Rozložím ľavú stranu na súčin a mám:*

$$(a - 1)^2 = 0.$$

Odtiaľ je jasné, že $a = 1$.

U: Úlohu si vyriešil správne. Avšak ukážem ti aj iný postup. Ak je priamka kolmá na rovinu, tak smerový vektor priamky a normálový vektor roviny sa dajú umiestniť na jednu priamku. To znamená, že vektor $\vec{n}_\varrho$ musí byť násobkom vektora $\vec{u}_p$. Pozrieme sa ešte raz na súradnice týchto vektorov:

$$\vec{u}_p = (1; a; -1),$$

$$\vec{n}_\varrho = (1; 1; -1).$$

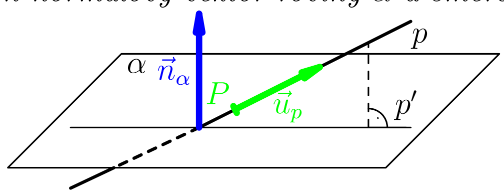
Ž: *Jasné! Hneď vidno, že to musí byť ten istý vektor a teda* $a = 1$.

Príklad 6: *Určte kolmý priemet priamky $p: x = 2 - t,\ y = 4 + 2t,\ z = -4t,\ t \in \mathbb{R}$ do roviny určenej rovnicou $\alpha:\ x - 2z + 5 = 0$.*

Ž: *Kolmý priemet priamky... To znamená, že „priamku p spustím kolmo na rovinu α“.*

U: Presnejšie povedané, kolmý priemet priamky p je priesečnicou roviny α a roviny ϱ, ktorá je kolmá na rovinu α a priamka p v nej leží.

Ž: *Asi bude lepšie, keď si to aj načrtnem. Na obrázku bude rovina α, priamka p a jej kolmý priemet p'. Tiež vyznačím normálový vektor roviny α a smerový vektor priamky p.*



U: Priamka p' vznikne ako prienik rovín α a ϱ. Potrebujeme rovnicu roviny ϱ.

Ž: *To znamená nájsť jej normálový vektor. Veru netuším odkiaľ ho zoberiem.*

U: Len sa pozri na obrázok. Normálový vektor tam neuvidíš, ale určite tam nájdeš dva smerové vektory roviny ϱ.

Ž: *Jasné! Jedným bude smerový vektor priamky p a druhým... Predsa normálový vektor roviny α.*

U: Výborne. Normálový vektor roviny ϱ určíme ako vektorový súčin týchto dvoch vektorov.

Ž: *Určím si najprv súradnice príslušných vektorov. Súradnice vektora $\vec{u}_p$ určím z parametrického vyjadrenia priamky p. Sú to čísla stojace pri parametri t, preto:*

$$\vec{u}_p = (-1; 2; -4).$$

U: Súhlasím. Pokračujme normálovým vektorom roviny α.

Ž: *Jeho súradnice prečítam zo všeobecnej rovnice roviny α. Sú to čísla stojace pri x, y a z. Preto:*

$$\vec{n}_\alpha = (1; 0; -2).$$

U: Výborne. Určíme vektor $\vec{n}_\varrho$ ako vektorový súčin vektorov $\vec{u}_p$ a $\vec{n}_\alpha$.

Ž: *Zapíšem si ich súradnice do zákrytov pod seba, prvý riadok budú súradnice vektora $\vec{u}_p$, teda -1, 2 a -4, pridám ešte raz prvú a druhú súradnicu. V druhom riadku urobím to isté s vektorom $\vec{n}_\alpha$, budú to čísla 1, 0 a -2 a ešte 1 a 0.*

$$\begin{array}{rrrrr} -1 & 2 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

A teraz počítam. Prvá súradnica: $2 \cdot (-2) - (-4) \cdot 0 = -4$.
Druhá súradnica: $-4 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) = -4 - 2 = -6$.
A nakoniec tretia súradnica: $-1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$.
Normálový vektor roviny ϱ má súradnice

$$\vec{n}_\varrho = \vec{u}_p \times \vec{n}_\alpha = (-4; -6; -2).$$

U: Pre ľahšie počítanie navrhujem zobrať ako normálový vektor roviny ϱ (-2)-násobok tohto vektora. Čiže:

$$\vec{n}_\varrho = (2; 3; 1).$$

Všeobecná rovnica roviny ϱ vyzerá takto:

$$2x + 3y + z + d = 0.$$

Ž: *Ostáva nám dopočítať d. Potrebujeme jeden bod roviny. Hm...*

U: Poradím ti. Z parametrického vyjadrenia priamky p vieme vyčítať aj súradnice jedného jej bodu.

Ž: *To áno. Označím ho napr. ako P. Ale ako nám to pomôže? ... aha! Priamka p predsa leží v rovine ϱ, preto aj bod P patrí tejto rovine. Jeho súradnice sú $P[2; 4; 0]$.*

U: Výborne. Dosadíme ich do všeobecnej rovnice:

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + d = 0$$

a dopočítame d.

Ž: *Po jednoduchej úprave dostávam: $d = -16$. Všeobecná rovnica roviny ϱ je:*

$$2x + 3y + z - 16 = 0.$$

U: Súhlasím. Kolmý priemet, priamku p', získame ako prienik rovín α a ϱ.

Ž: *Tu sú vyjadrenia oboch rovín:*

$$\begin{aligned} \alpha:&\quad x - 2z + 5 = 0 \\ \varrho:&\quad 2x + 3y + z - 16 = 0. \end{aligned}$$

Je to sústava dvoch rovníc...

U: Na určenie parametrického vyjadrenia priamky p' nám stačia dva jej body. Znamená to, že musíme nájsť dva body, ktorých súradnice vyhovujú tejto sústave. Označme si ich napr. A a B. Súradnice bodu A získame tak, že si v modrej sústave zvolíme napr. $x = 0$.

Ž: *Pre $x = 0$ sústava vyzerá takto:*

$$\begin{aligned} -2z + 5 &= 0 \\ 3y + z - 16 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvej rovnice mám: $z = \frac{5}{2}$. Po dosadení do druhej rovnice platí:

$$3y + \frac{5}{2} - 16 = 0.$$

Odtiaľ $y = \frac{9}{2}$. Bod A má súradnice $A[0; \frac{9}{2}; \frac{5}{2}]$.

U: V poriadku. Pre bod B si zvoľme v modrej sústave napr. $z = 0$. Sústava potom vyzerá takto:

$$\begin{aligned} x + 5 &= 0 \\ 2x + 3y - 16 &= 0. \end{aligned}$$

Ž: *Z prvej rovnice mám:* $x = -5$. *Po dosadení do druhej rovnice dostávam:*

$$-10 + 3y - 16 = 0.$$

Odtiaľ $y = \frac{26}{3}$. *Bod* B *má súradnice* $B[-5; \frac{26}{3}; 0]$.

U: No a konečne sme vo finále. Potrebujeme ešte smerový vektor priamky p'. Môže to byť vektor $\vec{u} = B - A$. Má súradnice:

$$\vec{u} = (-5; \frac{25}{6}; -\frac{5}{2}).$$

Ž: *OK. Priamka* p' *má parametrické vyjadrenie:*

$$\begin{aligned} x &= -5t \\ y &= \frac{9}{2} + \frac{25}{6}t \\ z &= \frac{5}{2} - \frac{5}{2}t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

U: Výborne. Už len poznamenám, že je to len jedno z možných parametrických vyjadrení priamky, nakoľko ich má nekonečne veľa.

Úloha 1: *Určte kolmý priemet priamky* $p: x = 1 - t,\ y = 2 + 2t,\ z = 4 + 3t,\ t \in \mathbb{R}$ *do roviny určenej rovnicou* $\varrho:\ 2x + 3y - z - 6 = 0$.

Výsledok: napr.

$x = -1 + 16t$
$y = 6 - 25t$
$z = 10 - 43t, \quad t \in \mathbb{R}$