Odchýlka dvoch rovín

RNDr. Viera Vodičková

U: Najprv by sme si mali ujasniť, čo je to odchýlka dvoch rovín. Potom budeme riešiť úlohu, ako určiť túto odchýlku z analytického vyjadrenia rovín.

Ž: *Odchýlka rovín? To je predsa ich uhol!*

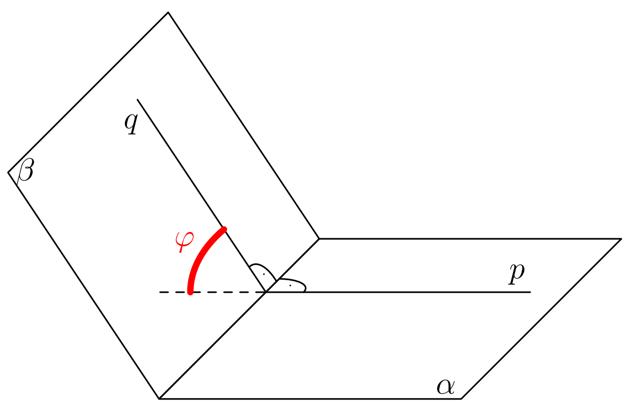
U: Musíme si zopakovať ako je v stereometrii definovaná odchýlka dvoch rovín. Začneme s prípadom rovnobežných rovín. Aká je ich odchýlka?

Ž: *Rovnobežné roviny majú odchýlku* $0°$.

U: Správne. A teraz roviny rôznobežné. Ak sú dve roviny rôznobežné, ich prienikom je . . .

Ž: *Priamka! To je jasné.*

U: Áno. Odchýlku dvoch rôznobežných rovín α a β definujeme ako odchýlku priamok p a q, pričom priamka p leží v rovine α, priamka q v rovine β a zároveň sú priamky p a q kolmé na priesečnicu rovín α a β. Celá situácia je znázornená na obrázku. Odchýlka rovín je vyznačená ako φ.



Ž: *Hm. . . Znamená to, že v každej rovine nájdem jednu priamku kolmú na ich priesečnicu. A namiesto uhla rovín počítam uhol týchto dvoch priamok.*

U: V podstate si to vystihol.

U: Tak, a teraz sa môžeme venovať analytickému vyjadreniu rovín. Akým spôsobom môžeme vyjadriť rovinu?

Ž: *Rovinu môžeme vyjadriť parametricky alebo všeobecnou rovnicou.*

U: Iste vieš, že parametrické rovnice roviny sú v podstate tri, vystupujú v nich dva smerové vektory a teda aj dva parametre. Naproti tomu všeobecná rovnica roviny je len jedna rovnica. Určite uznáš, že sa s ňou pracuje jednoduchšie. Sústredíme sa preto len na roviny dané všeobecnou rovnicou. V prípade, že by predsa bola niektorá rovina zadaná parametricky, mal by si vedieť prepísať parametrické rovnice tejto roviny na rovnicu všeobecnú.

Ž: *Snáď by som to zvládol.*

U: Majme dve roviny α a β dané všeobecnými rovnicami:

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

kde $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ sú reálne čísla, pričom aspoň jedno z čísel a_1, b_1, c_1 je rôzne od nuly a aspoň jedno z čísel a_2, b_2, c_2 je rôzne od nuly. Čo vieme zo všeobecných rovníc vyčítať?

Ž: *Zo všeobecnej rovnice roviny vieme určiť normálový vektor roviny. Normálový vektor roviny je vektor kolmý na rovinu.*

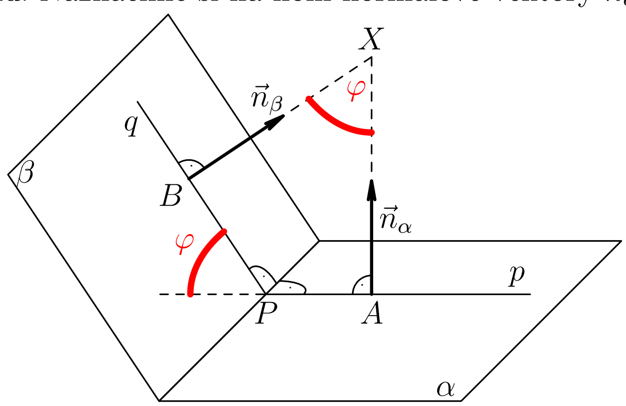
U: Správne. Označme normálové vektory rovín ako $\vec{n}_\alpha$ a $\vec{n}_\beta$. Aké budú mať súradnice?

Ž: *Súradnice normálového vektora sú čísla stojace pri x, y, z, a preto*

$$\vec{n}_\alpha = (a_1; b_1; c_1),$$

$$\vec{n}_\beta = (a_2; b_2; c_2).$$

U: Vrátime sa k obrázku. Naznačíme si na ňom normálové vektory $\vec{n}_\alpha$ a $\vec{n}_\beta$.



Na základe obrázka tvrdím, že odchýlka rovín α a β je zhodná s odchýlkou normálových vektorov $\vec{n}_\alpha$ a $\vec{n}_\beta$.

Ž: *No, moment! To si musím premyslieť.*

U: V poriadku. Všimni si na obrázku štvoruholník $PAXB$. Pozrieme sa na jeho vnútorné uhly.

Ž: *Nakoľko normálový vektor roviny α je kolmý na rovinu α, tak je kolmý aj na každú priamku tejto roviny. Čiže je kolmý aj na priamku p. Uhol pri vrchole A v štvoruholníku $PAXB$ je pravý.*

U: Výborná úvaha. Zrejme aj uhol pri vrchole B je pravý. Aká bude veľkosť uhla pri vrchole P?

Ž: *Pri vrchole P? Hm... Vedľa je uhol φ. Mohlo by to byť $180° - \varphi$.*

U: Áno. Uhol φ je susedný uhol k vnútornému uhlu pri vrchole P, preto sa jeho veľkosť rovná $180° - \varphi$. Teraz si spomenieme, aký je súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov v ľubovoľnom konvexnom štvoruholníku.

Ž: *V štvoruholníku je súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov* 360°. *Je to tak ako vo štvorci.*

U: Počítajme spolu. Veľkosť vnútorného uhla pri vrchole X, teda uhla $\sphericalangle BXA$ sa rovná:

$$|\sphericalangle BXA| = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \varphi).$$

Z toho už vyplýva, že

$$|\sphericalangle BXA| = \varphi.$$

Ž: *Naozaj! Na obrázku je uhol* $\sphericalangle BXA$ *aj uhlom normálových vektorov* $\vec{n}_\alpha$ *a* $\vec{n}_\beta$.

U: Áno. Odchýlka týchto dvoch rovín je taká istá ako odchýlka ich normálových vektorov.

U: Vieš, ako sa vypočíta odchýlka vektorov?

Ž: *Je na to nejaký vzorec. A asi tam vystupuje kosínus uhla...*

U: Odchýlku φ dvoch vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ vypočítame podľa vzorca:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Ž: *Jasné! Hore máme skalárny súčin vektorov a dole súčin ich veľkostí.*

U: Odchýlku rovín α a β určíme ako odchýlku ich normálových vektorov, preto platí:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}.$$

Má to však jeden háčik.

Ž: *To som si mohol myslieť, že to nebude také jednoduché.*

U: Odchýlkou dvoch vektorov môže byť aj tupý uhol. Odchýlkou rovín nie.

Ž: *Vyriešime to jednoducho. Ak odchýlkou vektorov bude tupý uhol, zoberieme jeho susedný uhol. Čiže od* 180° *odčítame veľkosť tupého uhla a máme požadovanú odchýlku rovín.*

U: Už to len trocha zjednodušíme. Odchýlku počítame pomocou kosínusu uhla. Pre hodnoty kosínusu susedných uhlov platí:

$$\cos\varphi = -\cos(180^\circ - \varphi).$$

Ž: *Kosínus susedných uhlov sa líši len znamienkom.*

U: Áno. Navyše platí:

$$|\cos\varphi| = |\cos(180^\circ - \varphi)|.$$

Preto stačí do vzorca pre výpočet odchýlky dvoch vektorov len pridať absolútnu hodnotu:

$$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}\right|.$$

Ž: *Jasné. Hodnota kosínusu tupého uhla je záporná, a preto ju urobíme kladnou pomocou absolútnej hodnoty.*

U: Všimni si, že výraz v menovateli je stále kladný.

Ž: *Áno. Sú tam veľkosti vektorov, a to sú kladné čísla.*

U: Absolútna hodnota nemá pre menovateľ význam. Preto stačí absolútnu hodnotu pridať len do čitateľa. Vzorec pre výpočet odchýlky rovín α a β je:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}.$$

Odchýlka dvoch rovín

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|},$$

kde $\vec{n}_\alpha$ a $\vec{n}_\beta$ sú normálové vektory rovín α a β

Príklad 1: *Určte odchýlku rovín α a β, pričom:*
α: $x + y + 2z - 5 = 0$,
β: $x - 2y - z + 3 = 0$.

Ž: *Odchýlku dvoch rovín zistím pomocou ich normálových vektorov. Akú odchýlku budú mať normálové vektory, taká bude aj odchýlka rovín.*

U: Súhlasím. Až na to, že odchýlkou dvoch vektorov môže byť aj tupý uhol, odchýlkou dvoch rovín nie. Preto v nasledujúcom vzorci vystupuje absolútna hodnota:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}.$$

Ž: *Odchýlka rovín α a β je označená ako φ a podľa tohto vzorca ju ľahko vypočítame. $\vec{n}_\alpha$ a $\vec{n}_\beta$ sú normálové vektory rovín α a β.*

U: Dobre. Potrebujeme najprv súradnice normálových vektorov oboch rovín.

Ž: *Súradnice normálových vektorov ľahko prečítam zo všeobecných rovníc rovín. Sú to čísla stojace pri x, y a z. Normálové vektory rovín α a β majú súradnice:*

$$\vec{n}_\alpha = (1; 1; 2), \quad \vec{n}_\beta = (1; -2; -1).$$

U: Vysvetlíme si podrobnejšie uvedený vzorec na výpočet odchýlky.

Ž: *V čitateli máme skalárny súčin. V menovateli zase súčin veľkostí oboch vektorov.*

U: Pomenoval si to správne. Dúfam, že to vieš aj tak pekne vypočítať.

Ž: *Skúsim. Skalárny súčin vektorov vypočítam tak, že vynásobím ich prvé súradnice, k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc a k tomu ešte súčin ich tretích súradníc, teda*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

U: Dobre. To je všeobecný vzorec pre skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Použime ho pre náš prípad.

Ž: *Zopakujem si súradnice normálových vektorov*

$$\vec{n}_\alpha = (1; 1; 2), \quad \vec{n}_\beta = (1; -2; -1).$$

A počítam skalárny súčin:

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = 1 - 2 - 2 = -3.$$

U: Výborne. Skalárny súčin máme, poďme na veľkosti oboch vektorov.

Ž: *Opäť použijem vzorec, ktorý platí pre výpočet veľkosti vektora:*

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Pre normálové vektory rovín α a β môžeme písať:

$$|\vec{n}_\alpha| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6},$$

$$|\vec{n}_\beta| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}.$$

U: Súhlasím. Dáme to všetko dohromady a dosadíme vypočítané hodnoty do vzorca pre odchýlku.

Ž: *Počítam:*

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

U: Zvládol si to vynikajúco. Ak sa $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, potom platí $\varphi = 60^\circ$. Odchýlka rovín α a β je 60°.

Na záver ti ponúkam pohľad na celý výpočet, máš ho v rámčeku.

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}\\
\cos\varphi &= \frac{|1\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 2\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}\\
\cos\varphi &= \frac{|-3|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\\
\varphi &= 60^\circ
\end{aligned}}$$

Úloha 1: *Určte odchýlku rovín α a β, pričom:*
α: $3x - 4y + z - 6 = 0$,
β: $2x + y - 2z + 1 = 0$.

Výsledok: 90°

Príklad 2: *Určte odchýlku rovín α a β, pričom:*
α: $3x + 5 = 0$,
β: $x = 3 + r - 2s,\ y = 2 - r + 2s,\ z = -1 - 4r,\ r, s \in \mathbb{R}$.

Ž: *Odchýlku dvoch rovín zistím pomocou ich normálových vektorov.*

U: To je pravda. Všimni si však rovnice oboch rovín.

Ž: *Rovina α je daná všeobecnou rovnicou... a rovina β parametricky. Už viem! To budem musieť z parametrických rovníc roviny β vyrobiť rovnicu všeobecnú. Odstrániť parametre...*

U: Moment! Načo ti bude všeobecná rovnica roviny β?

Ž: *No predsa, aby som z nej mohol vyčítať normálový vektor!*

U: To znamená, že nepotrebuješ všeobecnú rovnicu, ale len normálový vektor roviny β.

Ž: *Hm... To je pravda. Takže, ako určím normálový vektor roviny β?*

U: Rovina β je daná parametricky. Z parametrického vyjadrenia vieme zistiť súradnice...

Ž: *... smerových vektorov roviny. Sú to čísla pri parametri r, resp. pri s. Smerové vektory roviny β majú súradnice:*

$$\vec{u} = (1; -1; -4),$$

$$\vec{v} = (-2; 2; 0).$$

Dúfam, že ten druhý vektor mám správne. Myslím tú tretiu súradnicu.

U: Ale samozrejme! V tretej parametrickej rovnici $z = -1 - 4r$ nevystupuje parameter s. Znamená to, že by mohla vyzerať aj takto: $z = -1 - 4r + 0s$. Preto tretia súradnica vektora $\vec{v}$ je nula.

Ž: *Teraz si potrebujem spomenúť ako zo smerových vektorov vyrobím normálový vektor roviny. Smerové vektory roviny sa dajú umiestniť do roviny, normálový je na rovinu kolmý.*

U: Správne. Normálový vektor roviny je kolmý nielen na rovinu, ale aj na oba smerové vektory roviny. Hľadáme vektor, kolmý na dva smerové vektory. Na to nám slúži vektorový súčin.

Ž: *Áno, už si spomínam. Idem počítať vektorový súčin vektorov $\vec{u} \times \vec{v}$. Zapíšem si ich súradnice do zákrytov pod seba, prvý riadok budú súradnice vektora $\vec{u}$, teda 1, -1 a -4, pridám ešte raz prvú a druhú súradnicu. Pripíšem 1 a -1. V druhom riadku urobím to isté s vektorom $\vec{v}$, budú to čísla -2, 2 a 0 a ešte -2 a 2.*

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & -1 & -4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & -2 & 2 \end{array}$$

Ž: *A teraz počítam. Prvá súradnica výsledného vektora je:*

$$-1 \cdot 0 - (-4) \cdot 2 = 0 + 8 = 8.$$

Druhá súradnica:

$$-4 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 = 8 + 0 = 8.$$

A nakoniec tretia súradnica:

$$1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-2) = 2 - 2 = 0.$$

Vektorový súčin $\vec{u} \times \vec{v}$ má súradnice $(8; 8; 0)$.

U: Výborne. Vektorový súčin $\vec{u} \times \vec{v}$ je jedným z normálových vektorov roviny. Preto môžeme písať:

$$\vec{n}_\beta = \vec{u} \times \vec{v} = (8; 8; 0).$$

Vieme, že rovina má nekonečne veľa normálových vektorov. Každý nenulový násobok tohto vektora bude tiež normálovým vektorom roviny.

Ž: *Á, už viem, kam smerujete. Chcete zmenšiť súradnice normálového vektora. Súhlasím. Ako normálový vektor roviny β zoberme vektor*

$$\vec{n}_\beta = (1; 1; 0).$$

U: Normálový vektor roviny β by sme už mali. Ostala nám tá ľahšia časť, určiť normálový vektor roviny α.

Ž: *To bude hračka! Normálový vektor roviny α prečítam z jej všeobecnej rovnice $3x + 5 = 0$. Súradnice normálového vektora sú čísla stojace pri x, y a z. Uf! Ale máme tu len x!*

U: Ale, ale! To predsa nevadí. Určite vieš súradnice určiť.

Ž: *Máte pravdu. Voľajako ma to na chvíľu poplietlo. Súradnice normálového vektora roviny α sú:*

$$\vec{n}_\alpha = (3; 0; 0).$$

Druhá a tretia súradnica je nulová, pretože v rovnici nevystupuje y ani z.

U: Zvládol si to dobre. Odchýlku rovín α a β vypočítame podľa nasledujúceho vzorca:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}.$$

Vysvetlime si ho podrobnejšie.

Ž: *V čitateli máme skalárny súčin. V menovateli zase súčin veľkostí oboch vektorov.*

U: Pomenoval si to správne. Dúfam, že to vieš aj tak pekne vypočítať.

Ž: *Skúsim. Skalárny súčin vektorov vypočítame tak, že vynásobím ich prvé súradnice, k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc a nakoniec súčin ich tretích súradníc, teda*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

U: Dobre. To je všeobecný vzorec pre skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Použime ho pre náš prípad.

Ž: *Zopakujem si súradnice normálových vektorov*

$$\vec{n}_\alpha = (1; 1; 0)$$

$$\vec{n}_\beta = (3; 0; 0).$$

A počítam skalárny súčin:

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 3.$$

U: Výborne. Skalárny súčin máme, poďme na veľkosti oboch vektorov.

Ž: *Opäť použijem vzorec, ktorý platí pre výpočet veľkosti vektora:*

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Pre normálové vektory rovín α a β môžeme písať:

$$|\vec{n}_\alpha| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2},$$

$$|\vec{n}_\beta| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3.$$

U: Súhlasím. Dáme to všetko dohromady a dosadíme vypočítané hodnoty do vzorca pre odchýlku.

Ž: *Počítam:*

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|} = \frac{|3|}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

U: Navrhujem výslednú hodnotu upraviť, t. j. odstrániť odmocninu z menovateľa.

Ž: *Dobre. Vynásobím čitateľa aj menovateľa zlomku výrazom $\sqrt{2}$:*

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

U: Ak sa $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, potom platí $\varphi = 45°$. Odchýlka rovín α a β je $45°$.
Na záver ti ponúkam pohľad na celý výpočet, máš ho v rámčeku.

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|} \\
\cos\varphi &= \frac{|1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2}} \\
\cos\varphi &= \frac{|3|}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\varphi &= 45°
\end{aligned}}$$

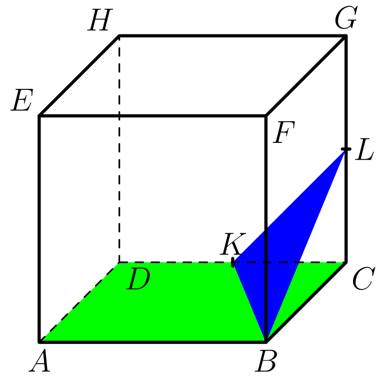
Úloha 1: *Určte odchýlku rovín* ϱ *a* σ*, pričom:*
ϱ: $3y + 8 = 0$,
σ: $x = 5 - r - 3s,\ y = 16 + r - 3s,\ z = 3 + 4r,\ r, s \in \mathbb{R}$.

Výsledok: $48°11'$

Príklad 3: *Daná je kocka $ABCDEFGH$ s dĺžkou hrany 4 cm. Určte analyticky odchýlku rovín $\overleftrightarrow{ABC}$ a $\overleftrightarrow{KBL}$, pričom bod K je stred hrany CD a bod L stred hrany CG.*

Ž: *Uf! To je normálna úloha zo stereometrie.*

U: Samozrejme. Úloha sa dá riešiť aj klasicky. Načrtnime si kocku a v nej dané roviny. Urobíme si aspoň predstavu o situácii.



Ž: *Máme tam vyznačené dve roviny, rovinu $\overleftrightarrow{ABC}$ zelenou a rovinu $\overleftrightarrow{KBL}$ modrou farbou. Máme určiť ich odchýlku. Hm... To by som potreboval nejakú kolmú rovinu na ich priesečnicu... Neviem si to teraz rýchlo predstaviť.*

U: To nevadí. My ideme riešiť úlohu analytickou metódou. Znamená to, že si nemusíme nič predstavovať a ani hľadať kolmú rovinu. Potrebujeme len preniesť túto úlohu do sveta analytickej geometrie.

Ž: *Ale ako? Nikde žiadne súradnice, vektory ani rovnice.*

U: Tak si ich vyrobíme sami.

Ž: *Aha. Chcete povedať, že si sami vytvoríme rovnice oboch rovín?*

U: Presne tak. Na to však potrebujeme poznať súradnice jednotlivých bodov.

Ž: *Žiadne nemáme.*

U: Zavedieme si súradnicovú sústavu. Podľa možnosti tak, aby sa nám počítalo čo najjednoduchšie.

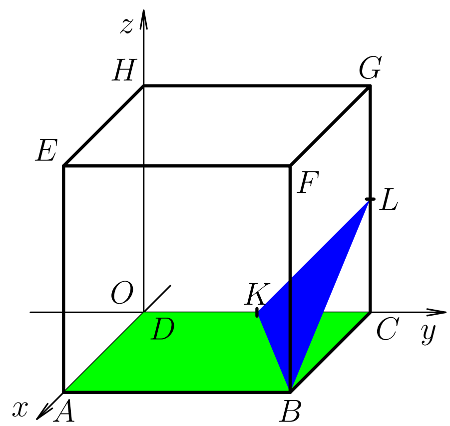
Ž: *Mám kocku a tú si umiestnim v sústave súradníc. Samozrejme v trojrozmernej, čiže v priestore. Asi bude najjednoduchšie umiestniť vrchol D do začiatku sústavy súradníc. Teda*

$$D[0; 0; 0].$$

U: Áno. To si zvolil šikovne. Dodám ešte, že spodná podstava kocky bude ležať v súradnicovej rovine xy. Hrana AD leží na osi x a hrana CD na osi y.

Ž: *Aha, a hrana DH na osi z.*

U: Všetko je zakreslené aj na obrázku.



U: Kocka má hranu 4 cm. Zoberme ako jeden dielik na súradnicových osiach 1cm. Napr. bod F bude mať súradnice

$$F[4;4;4].$$

Ž: *Dobre. Tak ja určím súradnice ostatných vrcholov kocky.*

U: Pozor. Aby si sa zbytočne neunavoval, urč súradnice len tých vrcholov, ktoré potrebujeme.

Ž: *Máme určiť odchýlku rovín $\overleftrightarrow{ABC}$ a $\overleftrightarrow{KBL}$. Potrebujem súradnice piatich bodov: A, B, C, K a L. Z obrázka je jasné, že bod A má súradnice*

$$A[4;0;0].$$

Podobne bod B má súradnice

$$B[4;4;0]$$

a bod C

$$C[0;4;0].$$

U: Ostávajú ešte body K a L. To nie sú vrcholy kocky.

Ž: *Mohol by som určiť súradnice ostatných vrcholov kocky a súradnice bodov K, L pomocou súradníc stredu úsečky.*

U: Áno, to by bol správny postup. Ale, keď sa pozrieš na obrázok, uvidíš to aj bez počítania.

Ž: *No jasné! Bod K leží na osi y, čiže má súradnice*

$$K[0;2;0].$$

Bod L je zase „nad“ bodom C vo výške 2 dieliky. Má preto súradnice

$$L[0;4;2].$$

U: Výborne. Tým sme úlohu zmenili na analytickú. Môžeme sa pustiť do určovania odchýlky rovín $\overleftrightarrow{ABC}$ a $\overleftrightarrow{KBL}$.

Ž: *Mali by sme asi vytvoriť všeobecné rovnice oboch rovín.*

U: Nebude to potrebné. Na určenie odchýlky rovín potrebujeme len ich normálové vektory.

Ž: *Jasné. Z odchýlky normálových vektorov vieme určiť aj odchýlku príslušných rovín.*

U: Kvôli prehľadnosti označme si jednotlivé roviny pomocou gréckych písmen nasledovne: $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$ a $\beta = \overleftrightarrow{KBL}$. Normálové vektory hneď neurčíme. Potrebujeme najprv dva smerové vektory pre každú rovinu. Rovinu α si nechajme na koniec. Začnime s rovinou $\beta = \overleftrightarrow{KBL}$, jej smerové vektory označme ako $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$.

Ž: *Je to rovina $\beta = \overleftrightarrow{KBL}$. Smerové vektory budú $\vec{u}_1 = B - K$ a $\vec{u}_2 = L - K$. Body majú súradnice: $B[4;4;0]$, $K[0;2;0]$ a $L[0;4;2]$. Preto:*

$$\vec{u}_1 = B - K = (4-0;4-2;0-0) = (4;2;0),$$

$$\vec{u}_2 = L - K = (0-0;4-2;2-0) = (0;2;2).$$

U: Výborne. Pomocou smerových vektorov určíme teraz vektor normálový.

Ž: *Normálový vektor je kolmý na rovinu...*

U: ...a teda aj na všetky vektory v nej ležiace.

Ž: *Dobre. Normálový vektor je kolmý na smerové vektory. Ako získam vektor kolmý na dané dva vektory?*

U: Spomeň si na vektorový súčin.

Ž: *Jasné! Vektorový súčin dvoch vektorov je vektor na ne kolmý. Vypočítam vektorový súčin smerových vektorov $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ a mám normálový vektor $\vec{n}_\beta$.*

U: Na výpočet súradníc vektorového súčinu máme pomôcku. Zapíšeme súradnice vektorov pekne pod seba...

Ž: *...pridáme ešte raz prvú a druhú súradnicu. Áno spomínam si.*

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array}$$

A počítam. Prvá súradnica: $2 \cdot 2 - 0 \cdot 2 = 4$.
Druhá súradnica: $0 \cdot 0 - 4 \cdot 2 = -8$.
A nakoniec tretia súradnica: $4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8$.
Normálový vektor roviny β, $\vec{n}_\beta = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ má súradnice $\vec{n}_\beta = (4;-8;8)$.

U: Aby sa nám ľahšie počítalo, navrhujem zobrať ako normálový vektor roviny β radšej vektor so súradnicami $(1;-2;2)$, teda

$$\vec{n}_\beta = (1;-2;2).$$

Ž: *Nemám námietky.*

U: Teraz sa vrátime k rovine α. Potrebujeme jej normálový vektor.

Ž: *To bude také isté. Určím si dva smerové vektory a pomocou nich normálový.*

U: Možno by sme si mohli ušetriť prácu. Pozri sa na obrázok, akú polohu má rovina $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$?

Ž: *Je to spodná podstava kocky $ABCDEFGH$. Je umiestnená v rovine xy.*

U: Áno, rovina $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$ je vlastne rovinou xy. Preto jej normálovým vektorom môže byť jednotkový vektor v smere osi z, čiže vektor so súradnicami $(0; 0; 1)$.

Ž: *To je jednoduché! Čiže*

$$\vec{n}_\alpha = (0; 0; 1).$$

U: Dobre. Máme teda normálové vektory rovín α a β. Odchýlku týchto rovín vypočítame podľa vzorca:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}.$$

Ž: *Áno spomínam si. Začnem čitateľom. Máme tu skalárny súčin vektorov. Ten vypočítame tak, že vynásobím ich prvé súradnice, k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc a nakoniec súčin ich tretích súradníc.*

U: Pripomeniem ti súradnice normálových vektorov

$$\vec{n}_\alpha = (0; 0; 1)$$

$$\vec{n}_\beta = (1; -2; 2).$$

Ž: *A ja už počítam skalárny súčin:*

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 2.$$

U: Výborne. Ostal nám menovateľ.

Ž: *V menovateli vystupujú veľkosti vektorov. Postupne ich vypočítam.*

U: Nezabudni, že normálovým vektorom roviny α je jednotkový vektor $(0; 0; 1)$.

Ž: *Jasné. Platí, že veľkosť vektora $|\vec{n}_\alpha| = 1$. Teraz vypočítam veľkosť normálového vektora roviny β:*

$$|\vec{n}_\beta| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

U: Súhlasím. Dáme to všetko dohromady a dosadíme vypočítané hodnoty do vzorca pre odchýlku.

Ž: *Počítam:*

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|} = \frac{|2|}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

U: Použitím kalkulačky zistíme, že

$$\varphi = 48^\circ 11'.$$

Na záver ti ponúkam pohľad na celý výpočet, máš ho v rámčeku.

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|} \\ \cos\varphi &= \frac{|0 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 2|}{1 \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3} \\ \varphi &= 48^\circ 11' \end{aligned}}$$

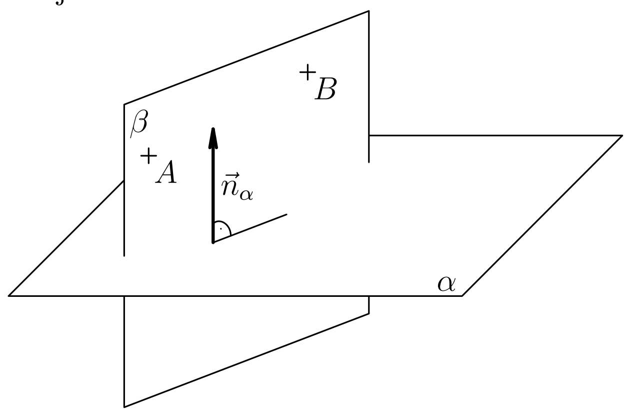
Úloha 1: *Daná je kocka $ABCDEFGH$ s dĺžkou hrany 4 cm. Určte analyticky odchýlku rovín $\overleftrightarrow{ABT}$ a $\overleftrightarrow{EFU}$, pričom bod T je stred hrany CG a bod U stred hrany DH.*

Výsledok: $53°7'$

Príklad 4: *Máme dané body $A[1;0;2]$, $B[-1;1;3]$ a rovinu $\alpha:\ x-y+2z-3=0$. Určte všeobecnú rovnicu roviny β, ktorá prechádza bodmi A, B a je kolmá na rovinu α.*

Ž: *Mám napísať všeobecnú rovnicu roviny β. Potrebujem jej normálový vektor. A potom ešte nejaký bod tejto roviny, ale to vidím, že mám hneď dané dva, A a B.*

U: S tým súhlasím. Navrhujem načrtnúť si celú situáciu.



Ž: *Na obrázku máme rovinu α, potom hľadanú rovinu β, ktorá je na ňu kolmá. V rovine β máme vyznačené dva body A a B, ktorých súradnice sú dané. Zároveň máme vyznačený normálový vektor roviny α. Ten takisto poznáme, nakoľko ho môžeme prečítať zo všeobecnej rovnice roviny α.*

U: V poriadku. Ako získame normálový vektor roviny β?

Ž: *Tu obrázok veľmi nepomáha. Nie je na ňom žiaden vektor kolmý na rovinu β.*

U: To je pravda. Ale možno by sa nám podarilo nájsť smerové vektory roviny β.

Ž: *Nó, to je už iná vec. Jedným zo smerových vektorov roviny β by mohol byť vektor $B-A$.*

U: Výborne. Aj druhý smerový vektor roviny β máme na obrázku. Bude ním normálový vektor roviny α.

Ž: *Naozaj! Rovina β je kolmá na rovinu α, preto môže normálový vektor roviny α ležať v rovine β.*

U: Zapamätaj si, že ***ak sú roviny α a β navzájom kolmé, tak normálový vektor roviny α je jedným zo smerových vektorov roviny β.***

Ž: *Už mám v tom jasno, tak sa pustím do práce. Smerové vektory roviny β označím ako $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Vektor $\vec{u}=B-A$, a preto bude mať súradnice:*

$$\vec{u}=B-A=(-2;1;1).$$

U: Dobre.

Ž: *Vektor $\vec{v}=\vec{n}_\alpha$, jeho súradnice prečítam zo všeobecnej rovnice roviny α, preto:*

$$\vec{v}=\vec{n}_\alpha=(1;-1;2).$$

U: Normálový vektor roviny β určíme ako vektorový súčin jej smerových vektorov:

$$\vec{n}_\beta=\vec{u}\times\vec{v}.$$

Ž: *Na výpočet súradníc vektorového súčinu máme pomôcku. Zapíšeme súradnice vektorov pekne pod seba, pridáme ešte raz ich prvú a druhú súradnicu.*

$$\begin{array}{ccccc} -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}$$

A počítam. Prvá súradnica: $1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 3$.
Druhá súradnica: $1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 = 5$.
A nakoniec tretia súradnica: $-2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 1$.
Normálový vektor roviny β, $\vec{n}_\beta = \vec{u} \times \vec{u}$, *má súradnice* $\vec{n}_\beta = (3; 5; 1)$.

U: Výborne. Pomocou súradníc normálového vektora môžeme vytvoriť všeobecnú rovnicu roviny β. Dostávame:

$$3x + 5y + z + d = 0.$$

Ž: *Ostáva nám vypočítať* d.

U: To nebude problém. Poznáme dva body A a B patriace rovine β. Ich súradnice musia vyhovovať všeobecnej rovnici. Preto dosadíme súradnice napr. bodu A a dopočítame d.

Ž: *Bod* $A[1; 0; 2]$. *Dosadím ich do všeobecnej rovnice namiesto* x, y, z *a dostanem:*

$$3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + d = 0.$$

Vypočítam d*:*

$$\begin{aligned} 3 + 0 + 2 + d &= 0 \\ d &= -5. \end{aligned}$$

U: Všeobecná rovnica roviny β je:

$$3x + 5y + z - 5 = 0.$$

Úloha 1: *Máme dané body* $L[3; -2; 5]$, $M[-2; 5; -4]$ *a rovinu* $\varrho:\ x = 1 + t + s$, $y = 2 - t - 3s$, $z = 4 + t - 3s$, $t, s \in \mathbb{R}$. *Určte všeobecnú rovnicu roviny* σ, *ktorá prechádza bodmi* L, M *a je kolmá na rovinu* ϱ.

Výsledok: $\sigma:\ 11x - 32y - 31z + 58 = 0$

Príklad 5: *Daný je bod $A[0;1;2]$ a dve roviny $\alpha:\ x+y-z+2=0$ a $\beta:\ 3x-y+2z-1=0$. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom A a je kolmá na rovinu α aj na rovinu β.*

Ž: *Mám nájsť rovinu...*

U: Označme ju napr. γ.

Ž: *Dobre, tak mám mám nájsť rovinu γ kolmú na dve iné roviny α a β. To by mala byť rovina γ kolmá aj na ich priesečnicu.*

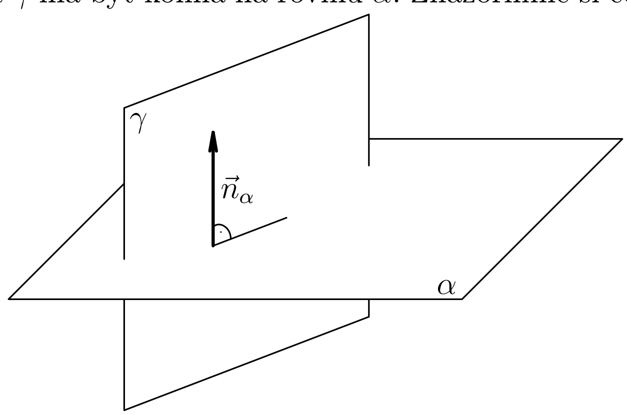
U: To máš, samozrejme, pravdu. V analytickej geometrii však túto skutočnosť nepotrebujeme. Sústredime sa na to, že hľadáme všeobecnú rovnicu roviny γ.

Ž: *Potrebujem normálový vektor roviny γ a súradnice aspoň jedného jej bodu. Súradnice mám, ide o bod A.*

U: Okrem neho máme dané aj všeobecné rovnice rovín α a β.

Ž: *Z nich sa môžeme dozvedieť súradnice normálových vektorov týchto rovín.*

U: Výborne. Poznáme teda ešte aj súradnice normálových vektorov rovín α a β. Preberieme to postupne. Rovina γ má byť kolmá na rovinu α. Znázornime si celú situáciu na obrázku.



Ž: *Na obrázku máme rovinu α, potom hľadanú rovinu γ, ktorá je na ňu kolmá. Zároveň máme vyznačený normálový vektor roviny α.*

U: V poriadku. Aký vzťah má normálový vektor roviny α ku rovine γ ?

Ž: *Nó... Možno by mohol ležať v rovine γ.*

U: Možno?

Ž: *Normálový vektor roviny α je na ňu kolmý. Aj rovina γ je kolmá na rovinu α. Áno, leží v rovine γ.*

U: Preto môže byť smerovým vektorom roviny γ.

Ž: *To je dobrý nápad! Ešte jeden taký smerový vektor a už by som vedel nájsť aj normálový vektor roviny γ.*

U: Ostala nám ešte rovina β.

Ž: *Jasné! Rovina γ je kolmá aj na rovinu β. Preto normálový vektor roviny β bude tiež jedným zo smerových vektorov roviny γ.*

U: Správne. Pre rovinu γ máme už dva smerové vektory. Všimni si, že nie sú lineárne závislé, preto nemôže byť problém nájsť aj jej normálový vektor.

Ž: *Normálový vektor určím ako vektorový súčin jej smerových vektorov. Pustím sa teda do práce. Najprv si určím súradnice normálových vektorov rovín α a β. Sú to čísla stojace pri x, y a z vo všeobecných rovniciach daných rovín. Preto:*

$$\vec{n}_\alpha = (1; 1; -1),$$

$$\vec{n}_\beta = (3; -1; 2).$$

U: Normálový vektor roviny γ určíme ako vektorový súčin týchto vektorov:

$$\vec{n}_\gamma = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta.$$

Ž: *Na výpočet súradníc vektorového súčinu máme pomôcku. Zapíšeme súradnice vektorov pekne pod seba, pridáme ešte raz ich prvú a druhú súradnicu.*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}$$

Prvá súradnica: $1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 1.$
Druhá súradnica: $-1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -5.$
A nakoniec tretia súradnica: $1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -4.$
Normálový vektor roviny γ, $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$ má súradnice $\vec{n}_\gamma = (1; -5; -4)$.

U: Výborne. Pomocou súradníc normálového vektora môžeme vytvoriť všeobecnú rovnicu roviny γ, dostávame:

$$x - 5y - 4z + d = 0.$$

Ž: *Ostáva nám vypočítať d.*

U: To nebude problém. Poznáme bod A, ktorý patrí rovine γ.

Ž: *Súradnice bodu $A[0; 1; 2]$ musia vyhovovať všeobecnej rovnici. Dosadím ich a dopočítam d. Dostávam:*

$$1 \cdot 0 - 5 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + d = 0.$$

Vypočítam d:

$$\begin{aligned} 0 - 5 - 8 + d &= 0 \\ d &= 13. \end{aligned}$$

U: Všeobecná rovnica roviny γ je:

$$x - 5y - 4z + 13 = 0.$$

Úloha 1: *Daný je bod* $A[1;-2;4]$ *a dve roviny* $\varrho:\ 2x+y-3z+7=0$ *a* $\sigma:\ x-2y-z+4=0$. *Nájdite všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom* A *a je kolmá na rovinu* ϱ *aj na rovinu* σ.

Výsledok: $7x+y+5z-25=0$