Lineárna kombinácia vektorov

RNDr. Viera Vodičková

U: Nech je daných n ľubovoľných vektorov $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Každý vektor $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$, nazývame ***lineárnou kombináciou vektorov*** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú reálne čísla - koeficienty lineárnej kombinácie.

$\vec{v}$ – lineárna kombinácia vektorov $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$

$$\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \dots + a_n\vec{v_n},$$

koeficienty lineárnej kombinácie $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}$

Ž: *To je veľmi zložitá definícia, samé písmenká a indexy... Nie veľmi tomu rozumiem.*

U: Definícia je všeobecná pre n vektorov. Vysvetlíme si to na konkrétnom príklade. Napr. ak vektor $\vec{v} = 3\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2$, tak môžeme povedať, že vektor $\vec{v}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$. Ak sa nám nepáčia indexy, tak v prípade menšieho počtu vektorov (tu nám vystačí aj abeceda), môžeme vektory volať aj $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ a písať $\vec{c} = 3\vec{a} + 7\vec{b}$. Vektor $\vec{c}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{a}, \vec{b}$.

Ž: *Veď je to obyčajné násobenie a sčítavanie vektorov!*

U: Samozrejme, vektory ľubovoľne násobíme reálnym číslom a tieto násobky sčítavame - čiže kombinujeme, odtiaľ je aj názov. Vektory na kombinovanie nemusia byť len dva, môže ich byť ľubovoľný počet - to je to n, ktoré vystupuje v definícii. Napríklad, ak platí

$$\vec{u} = 5\vec{a} - 56\vec{b} + 0\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d},$$

tak vektor $\vec{u}$ je lineárnou kombináciou štyroch vektorov $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.

Ž: *Neprekáža, že vektor $\vec{c}$ je násobený nulou?*

U: Nie, koeficienty môžu byť ľubovoľné reálne čísla.

U: Pri ďalšej práci v analytickej geometrii budeme potrebovať pojmy ***lineárne závislé vektory*** a ***lineárne nezávislé vektory***.
Dva vektory $\vec{a}, \vec{b}$ nazývame ***lineárne závislé vektory*** práve vtedy, ak existuje reálne číslo k také, že platí $\vec{b} = k\vec{a}$.

$$\vec{b} = k\vec{a}, \quad k \in \mathbb{R}$$

vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ sú lineárne závislé.

U: V opačnom prípade hovoríme, že dva vektory sú ***lineárne nezávislé*** .

Ž: *Znamená to, že ak je jeden vektor násobkom druhého, tak sú lineárne závislé.*

U: Presne tak. A ak si spomenieš ako graficky násobíme vektory reálnym číslom, bude jasné, že dva lineárne závislé vektory môžeme umiestniť na jednu priamku. Preto tento poznatok môžeme využiť na zistenie kolineárnosti bodov.

Ž: *Kolineárnosť?*

U: Body nazývame ***kolineárne*** práve vtedy, ak ich môžeme umiestniť na jednu priamku. Tri body A, B, C sú kolineárne (ležia na jednej priamke) práve vtedy, ak sú vektory $B - A$ a $C - A$ lineárne závislé.

U: Pojem lineárne závislých a nezávislých vektorov sa dá rozšíriť aj pre n vektorov. Pri našej práci v analytickej geometrii vystačíme so závislosťou dvojice a trojice vektorov. Lineárna závislosť ***dvojice vektorov*** nám umožní určiť, či tri body ležia na jednej priamke, t. j. či sú kolineárne.

Ž: *Áno, o tom sme práve hovorili.*

U: Lineárna závislosť ***trojice vektorov*** nám zase umožní určiť, či štyri body ležia v jednej rovine, t. j. sú ***komplanárne***. Štyri body A, B, C, D ležia v jednej rovine (sú komplanárne) práve vtedy, ak sa dajú vektory $\vec{a} = B - A$, $\vec{b} = C - A$, $\vec{c} = D - A$ umiestniť do jednej roviny. Teda ak existujú také reálne čísla x, y, že platí: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Táto trojica vektorov je lineárne závislá.

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

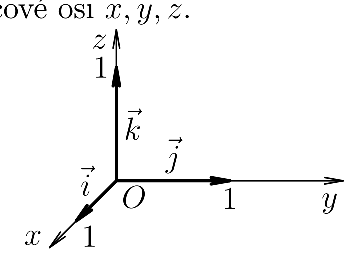
vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ sú lineárne závislé.

Ž: *Ak využijem, čo som sa naučil, tak to znamená, že vektor $\vec{c}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$.*

U: Áno, a grafické sčítavanie vektorov poukazuje na to, že tri lineárne závislé vektory môžeme umiestniť do jednej roviny.

Ž: *To znamená, že tri lineárne nezávislé vektory nemôžem umiestniť do jednej roviny.*

U: Áno. A aby sme si to trochu priblížili, najjednoduchším príkladom sú jednotkové vektory, ktoré umiestnime na súradnicové osi x, y, z.



U: Na osi x leží jednotkový vektor $\vec{i}$ so súradnicami $\vec{i} = (1; 0; 0)$, na osi y leží jednotkový vektor $\vec{j}$ so súradnicami $\vec{j} = (0; 1; 0)$, na osi z leží jednotkový vektor $\vec{k}$ so súradnicami $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Ž: *Jednotkový znamená, že má jednu súradnicu číslo 1 ?*

U: V tomto prípade, to tak vyzerá, ale jednotkový vektor je každý vektor, ktorého veľkosť je 1.
Z obrázka vidno, že vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sa nedajú umiestniť do jednej roviny, sú teda lineárne nezávislé.

Príklad 1: *Vyjadrite vektor $\vec{c} = (8; -1)$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{a} = (1; 1)$ a $\vec{b} = (2; -1)$.*

Ž: *Lineárna kombinácia - tento pojem si stále neviem zapamätať.*

U: Kombinácia znamená, že budeš kombinovať, t. j. sčítavať vhodné násobky vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ tak, aby si dostal vektor $\vec{c}$.

Ž: *Rozumiem tomu tak, že napríklad šesťkrát vektor $\vec{a}$ a k nemu raz vektor $\vec{b}$?*

U: To je dobrý príklad. Skúsime, či nám nevyhovuje. Vypočítajme súradnice takéhoto vektora. Počítame:

$$6\vec{a} + \vec{b},$$

vektory v zápise môžeme nahradiť zápisom ich súradníc. Takýto zápis potom vyzerá tak ako to vidíme v rámčeku.

$$\boxed{6(1; 1) + (2; -1)}$$

Ak to máme takto zapísané, už sa nám ľahko a prehľadne počíta: 6 krát prvá súradnica vektora $\vec{a}$ plus prvá súradnica vektora $\vec{b}$. A to isté aj s druhými súradnicami. Dostávame vektor so súradnicami $(8; 5)$.

$$\boxed{6\vec{a} + \vec{b} = 6(1; 1) + (2; -1) = (6.1 + 2;\ 6.1 + (-1)) = (8; 5)}$$

Ž: *Skoro nám to vyšlo, prvá súradnica je správna. Skúsim niečo iné...*

U: No, môžeme hádať a možno aj trafíme, ale nemusíme mať vždy také šťastie. Skúsme ísť na to cielene.

Ž: *Hľadáme také čísla, ktorými vynásobíme dané vektory, potom ich sčítame a dostaneme vektor $\vec{c}$.*

U: Označme si hľadané čísla x, y. Potom môžeme zapísať:

$$x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{c}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

U: Takúto rovnicu nazývame aj vektorová rovnica, lebo v nej vystupujú vektory. Opäť môžeme namiesto vektorov zapísať ich súradnice, tak ako to vidíme v rámčeku.

$$\boxed{x(1; 1) + y(2; -1) = (8; -1)}$$

Na ľavej strane vypočítame súradnice výsledného vektora, tak ako to vidno v ďalšom rámčeku.

$$\boxed{(x + 2y; x - y) = (8; -1)}$$

U: Nakoľko vieme, že dva vektory sa rovnajú práve vtedy, ak sa rovnajú ich príslušné súradnice, stačí nám porovnať súradnice vektorov na pravej a ľavej strane. To už skús urobiť sám.

Ž: *Porovnám príslušné súradnice a dostávam dve rovnice:*

$$x + 2y = 8$$

$$x - y = -1.$$

U: Dostali sme tak sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi. Stačí ju len vyriešiť.

Ž: *Dobre, takže z prvej si vyjadrím x*

$$x = 8 - 2y$$

a dosadím do druhej:

$$8 - 2y - y = -1.$$

Teraz už len riešim:

$$8 - 3y = -1$$

$$-3y = -9$$

$$y = 3.$$

Túto hodnotu dosadím do vyjadrenia pre x, to je tá modrá rovnica, a dostávam:

$$x = 8 - 2 \cdot 3 = 2.$$

U: Aké je teda riešenie?

Ž: *Vektor $\vec{a}$ musíme vynásobiť dvoma a vektor $\vec{b}$ troma.*

U: Zapíšme to.

Ž: $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Úloha 1: *Vyjadrite vektor $\vec{c} = (5; -17)$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{a} = (-5; -3)$ a $\vec{b} = (2; -4)$.*

Výsledok: $\vec{c} = -\vec{a} + 5\vec{b}$

Príklad 2: *Vyjadrite vektor* $\vec{w} = (4; -2)$ *ako lineárnu kombináciu vektorov* $\vec{u} = (\frac{1}{2}; \frac{4}{5})$ *a* $\vec{v} = (\frac{5}{2}; 4)$.

Ž: *Lineárna kombinácia - tento pojem si stále neviem zapamätať.*

U: Kombinácia znamená, že budeš kombinovať, t. j. sčítavať vhodné násobky vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ tak, aby si dostal vektor $\vec{c}$.

Ž: *Aha! Rozumiem. Zapíšem si rovno vektorovú rovnicu*

$$x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} = \vec{w}, \ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

U: Výborne, tak poďme na to!

Ž: *Vektory nahradím ich súradnicami, tak ako to vidíme v rámčeku.*

$$\boxed{x(\tfrac{1}{2}; \tfrac{4}{5}) + y(\tfrac{5}{2}; 4) = (4; -2)}$$

Na ľavej strane vypočítam súradnice výsledného vektora tak, že ich vynásobím s x *alebo s* y *a sčítam:*

$$(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y; \frac{4}{5}x + 4y) = (4; -2).$$

Teraz už môžem porovnať súradnice vektorov na pravej a ľavej strane:

$$\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y = 4$$

$$\frac{4}{5}x + 4y = -2.$$

U: Odstráňme najprv zlomky.

Ž: *Dobre, prvú rovnicu vynásobím s* 2 *a druhú s* 5.

$$x + 5y = 8$$

$$4x + 20y = -10.$$

Z prvej rovnice si vyjadrím x:

$$x = 8 - 5y$$

a dosadím do druhej:

$$32 - 20y + 20y = -10$$

$$32 = -10.$$

U: Čo to znamená?

Ž: *Asi nejaká hlúposť,* 32 *sa predsa nerovná* (-10).

U: To je pravda, sústava nemá riešenie.

Ž: *Ale čo bude s našou úlohou?*

U: Ak sústava nemá riešenie, ani vektor $\vec{w}$ sa nedá zapísať ako lineárna kombinácia vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Ž: *Je taká situácia vôbec možná?*

U: Samozrejme, musíme dôverovať tomu, čo vypočítame. Pozrime sa ešte raz na naše vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Ak si poriadne pozrieme ich súradnice, zistíme, že vektor $\vec{v}$ je vlastne päťnásobok vektora $\vec{u}$.

$$\vec{v} = 5 \cdot \vec{u}$$

Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú lineárne závislé.

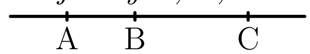
Ž: *To znamená, že sa dajú umiestniť na jednu priamku.*

U: Áno a práve preto vektor, ktorý na túto priamku nevieme umiestniť, nemôže byť ich lineárnou kombináciou.

Príklad 3: *Určte, či body $A[-3;2]$, $B[-7;-4]$, $C[-1;5]$ ležia na jednej priamke.*

U: Pomôžeme si vektormi a obrázkom. Predpokladajme, že body A, B a C ležia na jednej priamke. Ako by to asi vyzeralo?

Ž: *Nejako takto, tu je priamka a na nej body A, B, C.*



U: Zoberme si dva vektory $\vec{u} = B - A$ **,** $\vec{v} = C - A$. Ak všetky tri body A, B a C ležia na jednej priamke, tak ako na obrázku, aké sú tieto vektory?

Ž: *No, na obrázku to vyzerá ako keby $\vec{v}$ bol dvakrát vektor $\vec{u}$.*

U: Musí to byť tak vždy?

Ž: *Asi nie, ale vždy bude jeden násobkom druhého.*

U: Správne, ideme zistiť, či je to tak. Chceme, aby $\vec{v} = k.\vec{u}$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ž: *My ale nemáme ešte žiadne vektory.*

U: Určme si súradnice oboch vektorov.

Ž: *Vektor $\vec{u}$ sa rovná $B - A$, preto bude mať takéto súradnice:*

$$\vec{u} = B - A = (-7-(-3);\, -4-2) = (-4;-6).$$

Podobne vektor $\vec{v}$ sa rovná $C - A$, preto bude mať takéto súradnice:

$$\vec{v} = C - A = (-1-(-3);\, 5-2) = (2;3)$$

U: Dobre. Teraz sa už môžeme vrátiť k našej rovnici $\vec{v} = k.\vec{u}$ a nahradiť vektory ich súradnicami.

Ž: *Hneď to urobím. Rovnica bude vyzerať tak, ako to vidieť v rámčeku.*

$$\boxed{(2;3) = k(-4;-6)}$$

Po porovnaní dostaneme dve rovnice:

$$2 = k \cdot (-4)$$

$$3 = k \cdot (-6).$$

U: Je to sústava dvoch rovníc, ale len s jednou neznámou. Vypočítajme ju z oboch rovníc.

Ž: *Z prvej rovnice dostávam, že k sa rovná 2 delene -4, čiže*

$$k = -\frac{1}{2}.$$

Podobne z druhej rovnice máme, že k sa rovná 3 delene -6, čiže

$$k = -\frac{1}{2}.$$

Vyšlo to isté. Teda sústava má riešenie.

U: To znamená, že $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$. Vektory sú lineárne závislé, ležia na jednej priamke.

Ž: *A teda aj body, ktoré ich tvoria ležia na jednej priamke.*

U: Vedel by si mi ešte povedať, čo by to znamenalo, keby sme z oboch rovníc dostali rôzne hodnoty pre číslo k?

Ž: *Sústava by nemala riešenie.*

U: Áno, a to by znamenalo, že vektor $\vec{v}$ nie je k-násobkom vektora $\vec{u}$. Body A, B a C by neležali na jednej priamke.

Úloha 1: *Určte, či body $A[4;5]$, $B[-2;8]$, $C[7;-1]$ ležia na jednej priamke.*

Výsledok: nie, neležia

Príklad 4: *Zistite, či vektory $\vec{a} = (2; -1; 0)$, $\vec{b} = (1; 0; 4)$ a $\vec{c} = (3; -2; -4)$ sú lineárne závislé.*

Ž: *Ak si dobre pamätám, tak lineárne závislé znamená, že jeden vektor sa dá poskladať pomocou druhých dvoch.*

U: Presnejšie povedané, aspoň jeden z týchto troch vektorov je lineárnou kombináciou ostatných dvoch.

Ž: *Vyberiem si napríklad vektor $\vec{c}$ a chcem, aby bol lineárnou kombináciou vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$.*

U: A ak sa ti to podarí, teda ak bude lineárnou kombináciou, potom budú tieto tri vektory lineárne závislé.

Ž: *Skúsim si to zapísať:*

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

U: Použil si dve nové premenné, treba o nich niečo povedať.

Ž: *Čísla x, y patria do množiny reálnych čísel.*

U: V poriadku, teraz nahradíme vektory v rovnici ich súradnicami. Tak ako to vidno v rámčeku.

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}\\ (c_1, c_2, c_3) = x(a_1, a_2, a_3) + y(b_1, b_2, b_3)\end{gathered}}$$

Ž: *Porovnaním získame tri rovnice:*

$$c_1 = xa_1 + yb_1$$

$$c_2 = xa_2 + yb_2$$

$$c_3 = xa_3 + yb_3.$$

U: Výborne, dosaďme súradnice jednotlivých vektorov.

Ž: *Dobre. Dosadzujem:*

$$3 = 2x + y$$

$$-2 = -x + 0y$$

$$-4 = 0x + 4y.$$

U: Dostali sme sústavu troch rovníc s dvoma neznámymi. Koľko riešení očakávame?

Ž: *No ak chceme, aby to vyšlo, tak asi jedno.*

U: Ak vektor $\vec{c}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$, tak sústava bude mať riešenie. Ako budeme sústavu riešiť?

Ž: *Nakoľko je rovníc viac ako neznámych, jednu rovnicu si zatiaľ nevšímam, to znamená, že riešim sústavu prvých dvoch rovníc.*

$$3 = 2x + y$$

$$-2 = -x + 0y.$$

Ž: *Ako sa však pozerám, z druhej rovnice vyplýva, že* $x = 2$*. Dosadím do prvej rovnice a vypočítam* y*.*

$$3 = 2 \cdot 2 + y$$

$$y = -1.$$

U: Dobre, čo urobíme s treťou rovnicou?

Ž: *Riešenie, ktoré nám vyšlo* $x = 2, y = -1$ *overíme v tretej rovnici.*

$$-4 = 0 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)$$

Vyhovuje aj tretej rovnici.

U: Celá sústava má práve jedno riešenie $x = 2,\ y = -1$. Znamená to, že vektor $\vec{c}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ a môžeme písať:

$$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}.$$

Vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sú teda lineárne závislé.

Úloha 1: *Zistite, či vektory* $\vec{w} = (-1; 1; 2)$, $\vec{u} = (1; 5; 2)$ *a* $\vec{v} = (1; 2; 0)$ *sú lineárne závislé.*

Výsledok: áno, $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$

Príklad 5: *Rozhodnite, či vektor* $\vec{w} = (0;6;3)$ *je lineárnou kombináciou vektorov* $\vec{u} = (2;0;1)$ *a* $\vec{v} = (-1;3;2)$.

Ž: *Lineárna kombinácia - znamená to, že budem nejako sčítavať vektory* $\vec{u}$ *a* $\vec{v}$, *aby som dostal vektor* $\vec{w}$.

U: Presnejšie, budeme sčítavať násobky vektorov. Zapíšme si to všeobecne.

Ž: $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

U: V matematike treba veci formulovať presne. Vektor $\vec{w}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ práve vtedy, ak existujú reálne čísla x, y také, že platí

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

Ž: *Vynasnažím sa zapamätať si to.*

U: Dobre, my však potrebujeme pracovať so súradnicami. Nahraďme preto vektory ich súradnicami, tak ako to vidno v rámčeku.

$$\boxed{(w_1, w_2, w_3) = x(u_1, u_2, u_3) + y(v_1, v_2, v_3)}$$

Ž: *Porovnaním získame tri rovnice:*

$$w_1 = xu_1 + yv_1$$

$$w_2 = xu_2 + yv_2$$

$$w_3 = xu_3 + yv_3.$$

U: Výborne. Dosaďme naše hodnoty.

Ž: *Súradnice vektorov sú* $\vec{w} = (0;6;3)$, $\vec{u} = (2;0;1)$ *a* $\vec{v} = (-1;3;2)$, *preto:*

$$0 = 2x + (-1)y$$

$$6 = 0x + 3y$$

$$3 = x + 2y.$$

U: Dostali sme sústavu troch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi.

Ž: *Rovníc je trochu veľa...*

U: Máš asi na mysli to, že pre dve neznáme by nám stačili len dve rovnice.

Ž: *Presne tak som to myslel.*

U: Tak to aj budeme riešiť. Vyberieme si len dve rovnice, tie najsympatickejšie, tretia vstúpi do hry až na koniec.

Ž: *No, keď si môžem vybrať ... popozerám si ich, asi sa mi najviac páči prvá a tretia rovnica.*

U: Prečo?

Ž: *Sú to také klasické rovnice, mám tam x, y ...*

U: Aha, takže druhá rovnica sa ti nepáči, lebo tam vystupuje $0x$?

Ž: *Tak nejako.*

U: Ale to sa mýliš! Práve preto, že tam vystupuje výraz $0x$, resp. neobjavuje sa tam neznáma x, je rovnica oveľa jednoduchšia ako ostatné dve. No ale, ponechajme tvoj výber. Takže prvá a tretia rovnica:

$$0 = 2x - y$$

$$3 = x + 2y.$$

Ž: *Použijem sčítaciu metódu. Prvú rovnice vynásobím dvoma, druhú opíšem:*

$$0 = 4x - 2y$$

$$3 = x + 2y.$$

A teraz obe rovnice sčítame.

$$3 = 5x.$$

Čiže dostávame, že $x = \frac{3}{5}$.

U: Dobre, to je hodnota neznámej x.

Ž: *Tú teraz dosadíme napr. do prvej rovnice* $0 = 2x - y$ *:*

$$0 = 2 \cdot \frac{3}{5} - y$$

a vypočítame y*.*

$$0 = \frac{6}{5} - y$$

$$y = \frac{6}{5}.$$

U: Máme zatiaľ riešenie $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{6}{5}$. Teraz prichádza na rad tretia, zatiaľ neuvažovaná rovnica. Vyskúšame, či pre naše riešenie platí rovnosť ľavej a pravej strany.

Ž: *Tu je nepoužitá rovnica :* $6 = 0x + 3y$*. Dosadíme:*

$$6 = 0 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{6}{5}$$

$$6 = \frac{18}{5}.$$

Rovnosť neplatí.

U: To teda znamená, že pôvodná sústava troch rovníc nemá riešenie. Teda vektor $\vec{w}$ nie je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Hovoríme, že tieto tri vektory sú lineárne nezávislé.

Úloha 1: *Rozhodnite, či vektor* $\vec{w} = (2; -1; 1)$ *je lineárnou kombináciou vektorov* $\vec{u} = (3; 1; 3)$ *a* $\vec{v} = (1; 1; 2)$.

Výsledok: nie

Úloha 2: *Rozhodnite, či vektor* $\vec{w} = (-1; 1; 2)$ *je lineárnou kombináciou vektorov* $\vec{u} = (1; 5; 2)$ *a* $\vec{v} = (1; 2; 0)$.

Výsledok: áno, platí $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$

Príklad 6: *Zistite či body* $A[1;2;3]$, $B[4;5;6]$, $C[-1;0;1]$ *a* $D[2;2;2]$ *ležia v jednej rovine.*

U: Položme si najprv otázku: koľko bodov určuje rovinu?

Ž: *Nóo... Dva alebo tri...?*

U: Dobre, tak pôjdeme postupne. Ležia dva rôzne ľubovoľné body v jednej rovine?

Ž: *To áno.*

U: A čo tri rôzne ľubovoľné body?

Ž: *Áno, aj troma rôznymi ľubovoľnými bodmi sa dá preložiť rovina.*

U: Výborne, no a čo štyri?

Ž: *No, môžeme mať šťastie a ten štvrtý bod bude patriť do roviny určenej ostatnými troma, alebo máme smolu a bude mimo nej.*

U: A práve o to pôjde v tejto úlohe. Pomocou daných bodov si vytvoríme vektory, a to tak, že budú začínať v tom istom bode.

Ž: *Napríklad vektory* $\vec{b} = B - A$, $\vec{c} = C - A$, $\vec{d} = D - A$.

U: Body A, B, C, D ležia v jednej rovine práve vtedy, keď sú tieto vektory $\vec{b}, \vec{c}$ a $\vec{d}$ lineárne závislé.

Ž: *Opäť ten nešťastný pojem lineárne závislé.*

U: Dá sa to povedať aj ináč. Lineárne závislé znamená, že aspoň jeden z troch vektorov je lineárnou kombináciou ostatných dvoch. To je práve vtedy, ak existujú také reálne čísla x, y, že napríklad platí

$$\vec{b} = x\vec{c} + y\vec{d}.$$

Ž: *Teraz mi je už jasné, čo mám počítať. Najprv si určím súradnice všetký troch vektorov.*

$$\vec{b} = B - A = (3;3;3)$$

$$\vec{c} = C - A = (-2;-2;-2)$$

$$\vec{d} = D - A = (1;0;-1).$$

U: Výborne, a teraz si prepíšeme naše vyjadrenie $\vec{b} = x\vec{c} + y\vec{d}$ pomocou súradníc, tak ako to vidno v rámčeku.

$$\boxed{(3;3;3;) = x(-2;-2;-2) + y(1;0;-1)}$$

Ž: *Dobre. Dostávame tri rovnice:*

$$3 = -2x + y$$

$$3 = -2x + 0y$$

$$3 = -2x - y.$$

U: Dostali sme sústavu troch rovníc s dvoma neznámymi.

Ž: *Z druhej rovnice dostávame, že* $x = -\frac{3}{2}$.

U: Dosaďme túto hodnotu do zvyšných rovníc.

Ž: *Prvá rovnica:*

$$3 = -2 \cdot (-\frac{3}{2}) + y.$$

Druhá rovnica:

$$3 = -2 \cdot (-\frac{3}{2}) - y.$$

Po úprave máme:

$$3 = 3 + y$$

$$3 = 3 - y.$$

Už vidíme, že $y = 0$ *vyhovuje obom rovniciam. Máme riešenie* $x = -\frac{3}{2};\ y = 0$.

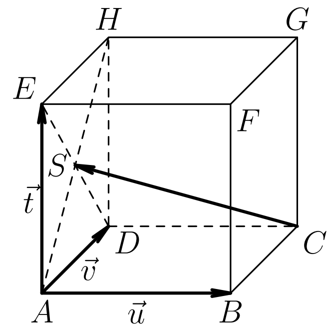
U: Pre našu úlohu to znamená, že existujú také reálne čísla x, y, že $\vec{b} = x\vec{c} + y\vec{d}$, vektory sú lineárne závislé, a preto body A, B, C, D ležia v jednej rovine. Hovoríme, že sú komplanárne.

Úloha 1: *Zistite či body* $A[1; -2; 3]$, $B[1; -2; 4]$, $C[3; -1; 4]$ *a* $D[2; -1; 4]$ *ležia v jednej rovine.*

Výsledok: nie, neležia v jednej rovine

Príklad 7: *Daná je kocka $ABCDEFGH$ a stred S jej steny $ADHE$. Označme $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ a $\vec{t} = \overrightarrow{AE}$. Vyjadrite vektor $\overrightarrow{CS}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{t}$.*

Ž: *Najprv si celú situáciu nakreslím. Načrtnem si kocku $ABCDEFGH$ a stred steny $ADHE$ označím ako S. Teraz si vyznačím dané vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$,$\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ a $\vec{t} = \overrightarrow{AE}$. A nakoniec zaznačím hľadaný vektor $\overrightarrow{CS}$.*



U: Výborne, obrázok je pekný, prehľadný.

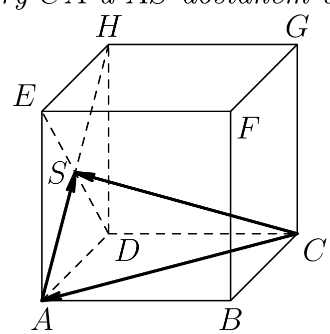
Ž: *Len teraz neviem ako na to. Pozerám sa na obrázok, pozerám … ale naozaj neviem ako z vektorov $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ poskladám vektor $\overrightarrow{CS}$.*

U: Niekedy sa možno stačí len pozrieť na obrázok a máme riešenie, ale nemusí to tak byť stále. Skúsme ísť na to pekne postupne. Vedel by si na obrázku nájsť dva také vektory, z ktorých by sme vedeli poskladať vektor $\overrightarrow{CS}$?

Ž: *Nejaké som našiel, no neviem, či sa budú hodiť.*

U: Neboj sa predkladať návrhy!

Ž: *Tak napríklad, ak sčítam vektory $\overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{AS}$ dostanem vektor $\overrightarrow{CS}$. Platí: $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{CS}$.*



U: Výborne!

Ž: *Lenže tam vôbec nevystupujú vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$.*

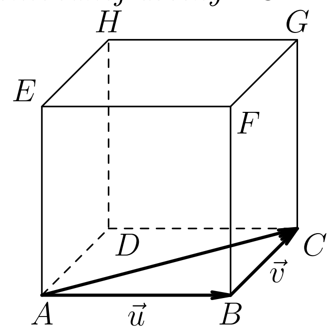
U: Len sa neponáhľaj. Teraz budeme hľadať, či pomocou vektorov $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ nevieme vyjadriť vektory $\overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{AS}$.

U: Začneme s vektorom $\overrightarrow{CA}$. Nezabudnime, že vektory si môžeme vhodne umiestniť.

Ž: *Vektor $\overrightarrow{CA}$ predstavuje uhlopriečka spodnej podstavy kocky, takže, ak si vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ umiestnim na druhú stranu …*

U: Na druhú stranu – to myslíš ako? Asi by si mal povedať, že vektor $\vec{v}$ rovnobežne premiestniš na protiľahlú stranu obdĺžnika $ABCD$.

Ž: *Presne tak, to znamená do orientovanej úsečky* $\overrightarrow{BC}$. *Dostávame, že* $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.



U: My sme však nepotrebovali orientovanú úsečku $\overrightarrow{AC}$, ale $\overrightarrow{CA}$. Aký je vzťah medzi nimi?

Ž: *Sú rovnaké, len opačne orientované.*

U: Hovoríme, že sú to navzájom opačné orientované úsečky alebo vektory. Pre ne platí: $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$

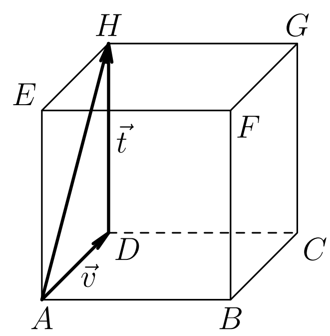
Ž: *Ak to dáme dohromady, dostávame:* $\overrightarrow{CA}=-(\vec{u}+\vec{v})=-\vec{u}-\vec{v}$

U: Teraz sa pozrieme na vektor $\overrightarrow{AS}$.

Ž: *Vektor* $\overrightarrow{AS}$*… nič mi nenapadá.*

U: Vektor $\overrightarrow{AS}$ je umiestnený na uhlopriečke bočnej steny $ADHE$. Skúsme si zobrať jeho dvojnásobok, t. j. vektor $\overrightarrow{AH}$.

Ž: *No áno, uhlopriečku predsa viem vyjadriť pomocou vektorov* $\vec{v}$ *a* $\vec{t}$. *Bude to podobné ako pred chvíľou v spodnej podstave. Vektor* $\vec{t}$ *si umiestnim do orientovanej úsečky* $\overrightarrow{DH}$, *a potom platí:* $\vec{v}+\vec{t}=\overrightarrow{AH}$.



U: Výborne. Ako teraz vyjadríme vektor $\overrightarrow{AS}$?

Ž: *Je to polovička vektora* $\overrightarrow{AH}$, *preto platí:*

$$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}(\vec{v}+\vec{t})=\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{t}.$$

U: Ostáva nám už len spojiť všetky naše poznatky. Máme:

$$\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AS}$$

$$\overrightarrow{CA} = -\vec{u} - \vec{v}$$

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{t}.$$

Ž: *Dosadíme vyjadrenia pre* $\overrightarrow{CA}$ *a* $\overrightarrow{AS}$*:*

$$\overrightarrow{CS} = -\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{t}$$

U: S vektormi v rovnosti môžeme pracovať ako s výrazmi, preto získaný vzťah po úprave zapíšeme:

$$\overrightarrow{CS} = -\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{t}.$$

U: A nakoniec ešte jedna poznámka. Možno sa ti v úlohe ťažko hľadali vyjadrenia pre jednotlivé vektory. No táto úloha sa dala riešiť aj pomocou súradníc. Potrebovali by sme len zaviesť sústavu súradníc a jednotlivým vrcholom kocky priradiť súradnice.